Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

§ 2. Widerstand gegen Zug und Druck.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78212

§ 2.

Widerstand gegen Zug und Druck.

Eine am oberen Endpunkte aufgehängte und durch ein Gewicht P belastete prismatische Stange von F qcm Querschnitt kann angesehen werden als bestehend aus F einzelnen Stangen von je 1 qcm Querschnitt.

Ist k die zulässige Inanspruchnahme, so kann jede dieser Einzelstangen belastet werden mit k kg, folglich die ganze Stange, deren Querschnitt F qcm beträgt, mit k . F kg, daher:

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{k} \qquad \qquad 1)$$

Belastung = Querschnitt × Inanspruchnahme.

Die Belastung erzeugt nach § 1 in der Stange, deren Länge = l sein möge, eine Verlängerung λ, welche sich, wie die Erfahrung lehrt, gleichmäßig über die ganze Länge der Stange verteilt. Durch Versuche ist ferner festgestellt, daß innerhalb der Elastizitätsgrenze die Verlängerung in demselben Verhältnis zu- oder abnimmt, als die Belastung P selbst, so daß z. B. bei einer und derselben Stange 2 P die doppelte Verlängerung, $^1/_4$ P nur den vierten Teil der Verlängerung erzeugen würde als P.

Die Verlängerungen verhalten sich also wie die Belastungen.

In einer Einzelstange von 1 qcm Querschnitt und l cm Länge entsteht nun die Verlängerung λ durch die Belastung k. Nach § 1 erzeugt der Elastizitätsmodul E in derselben Stange die Verlängerung l, folglich ist:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{E}} \qquad \qquad 2)$$

Setzt man hierin für k den sich aus Gl. 1) ergebenden Wert:

$$k = \frac{P}{F}$$

ein, so erhält man für die Verlängerung λ, welche in einer Stange von F qcm Querschnitt und l cm Länge durch eine Belastung von P kg erzeugt wird, den Ausdruck:

$$\lambda = \frac{\mathbf{P}\,l}{\mathbf{F}\,\mathbf{E}} \qquad \qquad 3)$$

Die Verlängerung λ steht in geradem Verhältnis zu der Belastung und der Länge der Stange, in umgekehrtem Verhältnis zu dem Querschnitt und dem Elastizitätsmodul.

Das Verhältnis:

$$\frac{\text{Verlängerung}}{\text{Ursprüngliche Länge}} = \frac{\lambda}{l} = \varepsilon$$

heißt die Dehnung.

Die Dehnung wird hervorgebracht durch die Spannung k und man nennt das Verhältnis:

$$\frac{\text{Dehnung}}{\text{Spannung}} = \frac{\varepsilon}{k} = \frac{\lambda}{l\,k}$$

den Dehnungskoeffizient, den umgekehrten (reziproken) Wert aber den Elastizitätsmodul E. Danach ist:

$$E = \frac{k\,l}{\lambda} = \frac{P\,l}{F\,\lambda}$$

woraus sich für die Verlängerung λ wieder der obige Ausdruck (Gl. 3) ergibt.

Die Gleichungen 1, 2 und 3 gelten ebenfalls für einen am unteren Endpunkte befestigten oder durch eine Unterlage unterstützten kurzen Stab, auf welchen am oberen Endpunkte die Belastung P wirkt. Die Druckkraft P erzeugt in dem Stabe die Druckspannung k und die Verkürzung λ.

Aufgabe 1. Wenn eine Hängesäule von Eichenholz eine Belastung von 14000 kg mit Sicherheit tragen soll, wie groß muß die Seite a des quadratischen Querschnittes genommen werden? (k = 100)

Auflösung. Nach Gl. 1) ist:

$$F = \frac{P}{k} = \frac{14000}{100} = 140 \text{ qcm}$$

Nun ist:

$$F = a^2$$

folglich:

$$a^2 = 140$$

$$a = \sqrt{140} = \backsim 12 \text{ cm}$$

Aufgabe 2. Wie groß muß der Durchmesser d einer schmiedeeisernen Stange sein, welche in der Achsenrichtung mit 25000 kg belastet werden soll? (k = 1000)

Auflösung. Nach Gl. 1) ist:

$$F = \frac{P}{k} = \frac{25000}{1000} = 25 \text{ qcm}$$

Nun ist:

$$F = \frac{d^2\pi}{4}$$

folglich:

$$\frac{d^2\pi}{4} = 25$$

$$d = \sqrt{\frac{25 \cdot 4}{3{,}14}} = \backsim 5{,}6 \text{ cm}$$

Aufgabe 3. Welche Belastung kann ein $1^1/_2$ Stein starker quadratischer Pfeiler aus Ziegelstein tragen bei einer Inanspruchnahme k = 7 kg?

Auflösung. Bei Normalziegeln (25 × 12 × 6,5 cm) ist die Seitenlänge des Pfeilers bei 1 cm Fuge:

$$a = 25 + 1 + 12 = 38 \text{ cm}$$

folglich der Querschnitt:

$$F = 38 \cdot 38 = 1444 \text{ qcm}$$

und nach Gl. 1):

$$P = F \cdot k = 1444 \cdot 7 = 10108 \text{ kg}$$

Aufgabe 4. Wie groß muß der Durchmesser d einer vollen gußeisernen kurzen Säule sein, welche eine Last von 20000 kg zu tragen hat? ($k = 500$)

Auflösung. Nach Gl. 1) ist:

$$F = \frac{P}{k} = \frac{20000}{500} = 40 \text{ qcm}$$

$$\frac{d^2 \pi}{4} = 40$$

$$d = 7{,}14 \text{ cm}$$

Aufgabe 5. Wie groß muß die Seite a des quadratischen Fußes der vorigen Säule sein, wenn der Unterstützungsquader mit $k = 25$ kg beansprucht werden darf, und wie groß ist die Beanspruchung k_1 des Baugrundes, wenn der Unterstützungsquader der Säule 75 cm lang und 70 cm breit ist:

Auflösung.

$$a^2 = \frac{20000}{25} = 800 \text{ qcm}$$

$$a = 28{,}3 \text{ cm}$$

$$k_1 = \frac{20000}{75 \cdot 70} = 3{,}8 \text{ kg}$$

Aufgabe 6. Der Kolben einer hydraulischen Presse hat $D = 40$ cm Durchmesser. Wie stark ist jede der vier cylindrischen schmiedeeisernen Säulen bei der Beanspruchung $k = 1000$ zu nehmen, wenn der Wasserdruck $p = 160$ kg für 1 qcm (160 Atmosphären) beträgt?

Auflösung. Der Kolbenquerschnitt ist:

$$\frac{D^2 \pi}{4} = \frac{40^2 \cdot 3{,}14}{4} = 1256 \text{ qcm}$$

folglich kommt auf jede der vier Säulen die Kraft:

$$P = \frac{1256 \cdot 160}{4} = 50240 \text{ kg}$$

Nach Gl. 1) wird dann der erforderliche Säulenquerschnitt:

$$F = \frac{P}{k}$$

also:

$$F = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{50240}{1000} = 50{,}24 \text{ qcm}$$

woraus folgt:

$$d = 8 \text{ cm}$$

Aufgabe 7. Eine Kette ist belastet mit $P = 4000$ kg. Es soll der erforderliche Durchmesser d des Ketteneisens berechnet werden unter Annahme von $k = 637$ kg/qcm.

Auflösung. Die Last verteilt sich auf 2 Querschnitte des Ketteneisens. Danach:

$$2 \frac{d^2 \pi}{4} 637 = 4000$$

$$\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{4000}{2 \cdot 637} = 3{,}14 \text{ qcm}$$

$$d = 2 \text{ cm}$$

Aufgabe 8. Für einen Dampfcylinder von $D = 60$ cm Durchmesser, in welchen der Dampf mit 8 Atmosphären Ueberdruck ($p = 8$ kg/qcm) eintritt, soll die Anzahl und der Durchmesser der Deckelschrauben berechnet werden.

Auflösung. Der Durchmesser des Kreises, in dem die Deckelschrauben angeordnet sind, beträgt etwa $D_1 = 70$ cm; der Umfang desselben ist also:

$$D_1 \pi = 70 \cdot 3{,}14 = 220 \text{ cm}$$

Nimmt man die Entfernung der Schrauben voneinander zu 14 cm an, so sind erforderlich:

$$i = \frac{220}{14} = \backsim 16 \text{ Schrauben.}$$

Der Dampfdruck ist:

$$\frac{D^2 \pi}{4} \cdot p = \frac{60^2 \cdot 3{,}14}{4} \cdot 8 = \backsim 22620 \text{ kg}$$

Eine Schraube ist daher belastet mit:

$$P = \frac{22620}{16} = 1414 \text{ kg}$$

Für $k = 350$ kg/qcm ergibt sich der erforderliche Kernquerschnitt zu:

$$\frac{d_1{}^2 \pi}{4} = \frac{1414}{350} = 4{,}04 \text{ qcm}$$

und danach:

$$d_1 = 2{,}27 \text{ cm}$$

Der nächstliegende Wert der Whitworth'schen Schraubentabelle ist:

$$d_1 = 2{,}39 \text{ cm}$$

welche dem äußeren Schraubendurchmesser

$$d = 2{,}86 \text{ cm} = 1^1/_8{}''$$

entspricht.

Aufgabe 9. Wenn der äußere Durchmesser D einer hohlen gußeisernen Säule, welche eine Last von 30000 kg zu tragen hat, $= 12$ cm ist, wie groß muß dann der innere Durchmesser d angenommen werden? ($k = 500$)

Auflösung.

$$F = \frac{P}{k} = \frac{30000}{500} = 60 \text{ qcm}$$

$$\frac{(D^2 - d^2)\pi}{4} = 60$$

$$D^2 - d^2 = \frac{4 \cdot 60}{3{,}14}$$

$$d^2 = D^2 - \frac{4 \cdot 60}{3{,}14} = 144 - 76{,}4 = 67{,}6$$

$$d = 8{,}2 \text{ cm}$$

Die Wandstärke der Säule wird dann:

$$\delta = \frac{D - d}{2} = \frac{12 - 8{,}2}{2} = 1{,}9 \text{ cm}$$

Aufgabe 10. Wie viel beträgt die Zusammendrückung der obigen Säule, wenn die Länge derselben 140 cm ist?

Auflösung. Nach Gl. 3) S. 6 ist:

$$\lambda = \frac{30000 \,.\, 140}{60 \,.\, 1000000} = 0{,}07 \text{ cm}$$

Aufgabe 11. Eine schmiedeeiserne Stange von 500 cm Länge, deren Querschnitt ein Rechteck von 5 cm Länge und 3 cm Breite bildet, wird belastet mit 12000 kg. Wie groß ist die Verlängerung?

Auflösung.

$$F = 5 \,.\, 3 = 15 \text{ qcm}$$

folglich:

$$\lambda = \frac{12000 \,.\, 500}{15 \,.\, 2000000} = 0{,}2 \text{ cm}$$

Aufgabe 12. Eine Stahlstange von 200 cm Länge und 4 qcm Querschnitt soll durch ein Gewicht um 0,12 cm ausgedehnt werden. Wie groß muß dieses Gewicht sein?

Auflösung. Nach Gl. 3) S. 6 ist:

$$P = \frac{\lambda \,.\, F \,.\, E}{l}$$

$$P = \frac{0{,}12 \,.\, 4 \,.\, 2200000}{200} = 5280 \text{ kg}$$

Aufgabe 13. Eine runde schmiedeeiserne Stange von 350 cm Länge wurde durch ein Gewicht von 8000 kg um 0,14 cm ausgedehnt. Wie groß war der Durchmesser d dieser Stange?

Auflösung. Da hier:

$$F = \frac{d^2 \pi}{4}$$

so ist nach Gl. 3) S. 6:

$$\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{P\,l}{\lambda E} = \frac{8000 \,.\, 350}{0{,}14 \,.\, 2000000} = 10 \text{ qcm}$$

$$d = \backsim 3{,}6 \text{ cm}$$

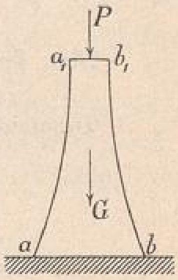
Bisher wurde das Eigengewicht der gezogenen oder gedrückten Körper nicht weiter berücksichtigt und kann sehr häufig auch ohne wesentlichen Fehler vernachlässigt werden. In manchen Fällen dagegen kann die Natur der Aufgabe es verlangen, das Eigengewicht, welches z. B. bei Mauerwerk eine bedeutende Rolle spielt, auch bei langen Schachtgestängen ziemlich erheblich ist, mit in Rechnung zu ziehen.

Ist G das Eigengewicht eines Mauerpfeilers, welcher oben durch das Gewicht P belastet ist, so wirkt auf den unteren Querschnitt die Last P + G. Die Grundfläche des Pfeilers muß daher die Größe erhalten:

$$F = \frac{P + G}{k}$$

Auf irgend einen anderen Querschnitt des Pfeilers kommt ein um so geringerer Teil des Eigengewichtes, je höher dieser Querschnitt über dem unteren liegt. Die Querschnitte könnten deshalb nach oben hin allmählich kleiner werden bis zum oberen, welcher nur durch P belastet wird.

Fig. 6.



Bei genauer Berechnung ergeben sich als Begrenzungslinien des Pfeilers Kurven und man würde danach dem Pfeiler etwa die nebenstehende Form (Fig. 6) zu geben haben. Aus praktischen Gründen thut man dies indes selten, sondern stellt hohe Pfeiler gewöhnlich mit geradlinigen Böschungen her, indem man die Punkte a a_1 und b b_1 durch gerade Linien verbindet.

Bei höheren Gebäudemauern führt man einen Querschnitt unverändert durch ein oder zwei Stockwerke durch und geht dann nach oben hin sprungweise auf den nächsten kleineren Querschnitt über.

Die nebenstehende Fig. 7 möge eine solche abgetreppte Mauer darstellen. Ist F_1 der Querschnitt und G_1 das Gewicht des oberen, F_2 der Querschnitt und G_2 das Gewicht des unteren Teiles, so wird:

Fig. 7.

$$F_1 = \frac{P + G_1}{k}$$

$$F_2 = \frac{P + G_1 + G_2}{k}$$

Bezeichnet man mit γ das Gewicht der Kubikeinheit des Materiales, so ist:

$$G_1 = \gamma F_1 l_1$$
$$G_2 = \gamma F_2 l_2$$

Aufgabe 14. Ein 150 m langes schmiedeeisernes Schachtgestänge von quadratförmigem Querschnitt hat außer seinem Eigengewicht noch eine Last P = 20000 kg zu tragen. Dasselbe besteht aus 5 in der Längsrichtung miteinander verbundenen prismatischen Stäben von je l = 30 m Länge. Welchen Querschnitt muß jeder einzelne Stab (bei k = 500)*) erhalten, wenn das Gewicht von 1 ccm Schmiedeeisen: $\gamma = 0{,}0078$ kg beträgt?

Auflösung. Für den untersten Stab ist, wenn a_1 die Seite des quadratischen Querschnitts bedeutet:

$$a_1{}^2 = \frac{P + \gamma a_1{}^2 l}{k}$$

$$a_1{}^2 (k - \gamma l) = P$$

$$a_1{}^2 = \frac{P}{k - \gamma l} = \frac{20000}{500 - 0{,}0078 \,.\, 3000} = 42$$

$$a_1{}^2 = \sqrt{42} = 6{,}5 \text{ cm}$$

*) Bei Schachtgestängen nimmt man wegen der beständigen Bewegung die zuläßige Beanspruchung nur gering an.

Das Gewicht des Stabes beträgt danach:

$$G_1 = \gamma\, l\, a_1{}^2 = 0{,}0078\,.\,3000\,.\,42 = 983 \text{ kg}$$

Für den zweiten Stab (von unten ab gerechnet) ist:

$$a_2{}^2 = \frac{P + G_1 + \gamma\, a_2{}^2\, l}{k}$$

Man findet:

$$a_2 = 6{,}6 \text{ cm} \quad ; \quad G_2 = 1030 \text{ kg}$$

Desgleichen für die weiteren Stäbe:

$$a_3 = 6{,}8 \text{ cm} \quad ; \quad G_3 = 1080 \text{ kg}$$
$$a_4 = 7{,}0 \text{ cm} \quad ; \quad G_4 = 1134 \text{ kg}$$
$$a_5 = 7{,}1 \text{ cm} \quad ; \quad G_5 = 1190 \text{ kg}$$

Das Gewicht des ganzen Gestänges beträgt:

$$G = 5417 \text{ kg}$$

Wäre das Gestänge mit überall gleichem Querschnitt ausgeführt, so würde sein:

$$a^2 = \frac{P + \gamma\, a^2 L}{k}$$

$$a^2 = \frac{P}{k - \gamma L} = \frac{20000}{500 - 0{,}0078\,.\,15000} = 52{,}2 \text{ qcm}$$

$$a = \sqrt{52{,}2} = \sim 7{,}2 \text{ cm}$$

$$G = \gamma\, L\, a^2 = 0{,}0078\,.\,15000\,.\,52{,}2 = 6107 \text{ kg}$$

Da die Beanspruchung k für das ganze Gestänge nahezu den gleichen Wert 500 hat, so ist nach Gl. 2) S. 6 die Verlängerung sehr angenähert:

$$\lambda = \frac{500\,.\,15000}{2000000} = 3{,}75 \text{ cm}$$

§ 3.

Flächenmomente und Säulenmomente*).

Unter dem statischen Moment einer Kraft, bezogen auf eine senkrecht zur Kraftebene stehende Achse, versteht man bekanntlich das Produkt aus der Kraft und dem rechtwinkligen Abstande derselben von der Achse (dem Hebelarm).

Wirken in derselben Ebene gleichzeitig mehrere Kräfte, so ist das statische Moment der Mittelkraft gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte**).

Dieser Satz der statischen Momente gilt auch für in verschiedenen Ebenen liegende Parallelkräfte und lautet dann:

Das statische Moment der Mittelkraft paralleler Kräfte in Bezug auf eine der Kraftrichtung parallele beliebige Ebene ist gleich der Summe der statischen Momente aller Einzelkräfte in Bezug auf dieselbe Ebene.

Bestehen die Parallelkräfte aus den Gewichten der einzelnen Massen-

*) Nach R. Land. Vergl. Zeitschr. d. V. d. J. 1897, S. 1246.

**) Siehe Lauenstein, Mechanik, 5. Aufl., § 6.