Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

§ 3. Flächenmomente und Säulenmomente.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78212

Das Gewicht des Stabes beträgt danach:

$$G_1 = \gamma\, l\, a_1^2 = 0{,}0078 \,.\, 3000 \,.\, 42 = 983 \text{ kg}$$

Für den zweiten Stab (von unten ab gerechnet) ist:

$$a_2^2 = \frac{P + G_1 + \gamma\, a_2^2\, l}{k}$$

Man findet:

$$a_2 = 6{,}6 \text{ cm} \quad ; \quad G_2 = 1030 \text{ kg}$$

Desgleichen für die weiteren Stäbe:

$$a_3 = 6{,}8 \text{ cm} \quad ; \quad G_3 = 1080 \text{ kg}$$
$$a_4 = 7{,}0 \text{ cm} \quad ; \quad G_4 = 1134 \text{ kg}$$
$$a_5 = 7{,}1 \text{ cm} \quad ; \quad G_5 = 1190 \text{ kg}$$

Das Gewicht des ganzen Gestänges beträgt:

$$G = 5417 \text{ kg}$$

Wäre das Gestänge mit überall gleichem Querschnitt ausgeführt, so würde sein:

$$a^2 = \frac{P + \gamma\, a^2 L}{k}$$

$$a^2 = \frac{P}{k - \gamma L} = \frac{20\,000}{500 - 0{,}0078 \,.\, 15\,000} = 52{,}2 \text{ qcm}$$

$$a = \sqrt{52{,}2} = \sim 7{,}2 \text{ cm}$$

$$G = \gamma\, L\, a^2 = 0{,}0078 \,.\, 15000 \,.\, 52{,}2 = 6107 \text{ kg}$$

Da die Beanspruchung k für das ganze Gestänge nahezu den gleichen Wert 500 hat, so ist nach Gl. 2) S. 6 die Verlängerung sehr angenähert:

$$\lambda = \frac{500 \,.\, 15\,000}{2\,000\,000} = 3{,}75 \text{ cm}$$

§ 3.

Flächenmomente und Säulenmomente*).

Unter dem statischen Moment einer Kraft, bezogen auf eine senkrecht zur Kraftebene stehende Achse, versteht man bekanntlich das Produkt aus der Kraft und dem rechtwinkligen Abstande derselben von der Achse (dem Hebelarm).

Wirken in derselben Ebene gleichzeitig mehrere Kräfte, so ist das statische Moment der Mittelkraft gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte**).

Dieser Satz der statischen Momente gilt auch für in verschiedenen Ebenen liegende Parallelkräfte und lautet dann:

Das statische Moment der Mittelkraft paralleler Kräfte in Bezug auf eine der Kraftrichtung parallele beliebige Ebene ist gleich der Summe der statischen Momente aller Einzelkräfte in Bezug auf dieselbe Ebene.

Bestehen die Parallelkräfte aus den Gewichten der einzelnen Massen-

*) Nach R. Land. Vergl. Zeitschr. d. V. d. J. 1897, S. 1246.

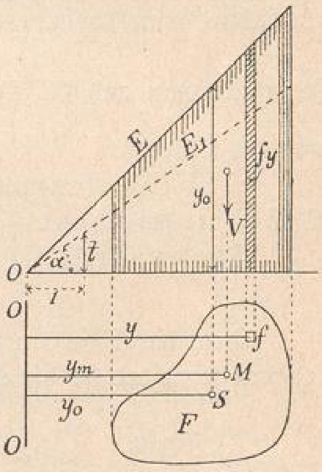
**) Siehe Lauenstein, Mechanik, 5. Aufl., § 6.

teilchen eines Körpers, ist also deren Mittelkraft gleich dem Gewichte der ganzen Körpermasse, so kann, da sich die Gewichtsteilchen wie die Massenteilchen verhalten, der obige Satz auch in der Fassung ausgesprochen werden:

Das statische Moment der ganzen Masse eines Körpers ist gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Massenteilchen, bezogen auf ein und dieselbe Ebene.

Hat der Körper die Gestalt einer sehr dünnen ebenen Platte, die man als gleichmäßig mit Masse bedeckte Fläche ansehen kann, so läßt sich, indem man die einzelnen Flächenteile als Gewichte auffaßt, auch der Begriff des statischen Momentes auf eine Fläche ausdehnen. In diesem Sinne erhält man den Satz:

Fig. 8.



Das statische Moment der ganzen Fläche (Fläche mal Schwerpunktsabstand), bezogen auf eine beliebige Ebene, ist gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Flächenteilchen, bezogen auf dieselbe Ebene.

Es sei nun eine beliebige Fläche F gegeben (Fig. 8) und eine Ebene senkrecht dazu, welche die Flächenebene in der Geraden O O schneidet. Die Gerade O O wird kurz als Achse bezeichnet. Ist dann y_0 der Abstand des Schwerpunktes S der Fläche F von der Achse, sind ferner f_1 f_2 . . . die einzelnen Flächenteilchen und y_1 y_2 . . . deren senkrechte Abstände von der Achse O O, so ist:

$$\mathbf{F\,y_0 = f_1\,y_1 + f_2\,y_2 + \ldots = \Sigma(f\,y)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 4)$$

Trägt man nun die Abstände y auf den zugehörigen f als Höhen auf und betrachtet das dadurch entstehende jedesmalige fy als den Inhalt eines Säulchens, so erhält man in der Gesamtheit als körperliche Darstellung von Σ (fy) eine über der Fläche F errichtete Säule, welche oben schräg begrenzt ist durch eine unter 45° gegen F geneigte Ebene E. Diese schneidet die Ebene der Fläche F in der Geraden O O.

Die über F errichtete oben abgeschrägte Säule, deren Inhalt mit V bezeichnet werden möge, ist also gleich dem statischen Moment (dem Flächenmoment) von F bezogen auf die Achse O O.

$$\mathbf{V = \Sigma(f\,y) = F\,y_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5)$$

Wird die Säule, anstatt durch die unter 45° geneigte Ebene E, oben begrenzt durch eine Ebene E_1 mit dem Neigungswinkel α, welcher bestimmt ist durch die Höhe t im Abstande 1 von der O O ($\mathrm{tg}\,\alpha = t : 1$), und wird deren Inhalt mit V_α bezeichnet, so ist:

$$\frac{V_\alpha}{V} = \frac{t}{1}$$

oder

$$\mathbf{V_\alpha = t\,.\,V} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 6)$$

Das statische Moment eines Säulchens f y (kurz genannt **Säulenmoment**) bezogen auf die Achse O O ist nun $= f y \cdot y = f y^2$, folglich das Säulenmoment für die ganze Säule V, wenn y_m deren Schwerpunktsabstand von der O O bedeutet:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{y}_m = \Sigma(\mathbf{f}\,\mathbf{y}^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

Für die Säule V_α mit den um t : 1 geänderten Höhen ergibt sich entsprechend:

$$\mathbf{V}_\alpha \cdot \mathbf{y}_m = \mathbf{t} \cdot \Sigma(\mathbf{f}\,\mathbf{y}^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

Der Ausdruck $\Sigma(f y^2)$ bedeutet die Summe aller Flächenteilchen, multipliziert mit dem Quadrate ihrer Abstände von der Achse O und wird das **Trägheitsmoment** der Fläche F in Bezug auf die Achse O genannt. Bezeichnet man dasselbe durch J_0, setzt also:

$$\mathbf{J}_0 = \Sigma(\mathbf{f}\,\mathbf{y}^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

so erhält man aus Gl. 7):

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{y}_m = \mathbf{J}_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

oder in Worten:

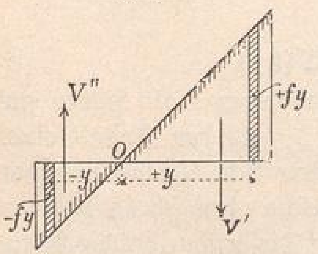
Das Säulenmoment der Säule $V = F y_0$ ist gleich dem Trägheitsmoment J_0 der Fläche F für die Achse O.

Für die Säule V_α ergibt sich ebenso:

$$\mathbf{V}_\alpha \cdot \mathbf{y}_m = \mathbf{t} \cdot \mathbf{J}_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

Liegt die Achse O nicht, wie bisher angenommen, außerhalb der Fläche F, sondern schneidet sie dieselbe (wie in Fig. 9), so haben die auf verschiedenen Seiten der Achse liegenden Abstände y der Flächenteilchen f verschiedenes Vorzeichen, und folglich werden dann die zugehörigen Flächenmomente bei der Säulendarstellung nach verschiedenen Seiten der F-Ebene aufgetragen. Die beiden Säulenteile V′ und V″ gehen in diesem Falle in Keilstücke über, von denen eins positiv, das andere negativ zu nehmen ist, deren Momente also in Bezug auf die Achse O die gleiche Drehrichtung haben, so daß die von ihnen gelieferten Beiträge für das Trägheitsmoment J_0 gleiches Vorzeichen und zwar das positive haben, weil $J_0 = \Sigma(f y^2)$ als Ausdruck vierten Grades stets positiv sein muß.

Fig. 9.



§ 4.

Widerstand gegen Biegung.

Ist ein gerader, in Bezug auf die Bildebene symmetrisch vorausgesetzter Balken mit seinem einen Ende eingespannt, und wird das andere freie Ende desselben durch ein in der Symmetrieebene angreifendes Gewicht P belastet, so erfährt derselbe dadurch eine Biegung (Fig. 10).