Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

§ 4. Widerstand gegen Biegung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78212

Das statische Moment eines Säulchens $f y$ (kurz genannt **Säulenmoment**) bezogen auf die Achse O O ist nun $= f y \cdot y = f y^2$, folglich das Säulenmoment für die ganze Säule V, wenn y_m deren Schwerpunktsabstand von der O O bedeutet:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{y}_m = \Sigma (\mathbf{f}\,\mathbf{y}^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

Für die Säule V_α mit den um $t:1$ geänderten Höhen ergibt sich entsprechend:

$$\mathbf{V}_\alpha \cdot \mathbf{y}_m = \mathbf{t} \cdot \Sigma (\mathbf{f}\,\mathbf{y}^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 8)$$

Der Ausdruck $\Sigma (f y^2)$ bedeutet die Summe aller Flächenteilchen, multipliziert mit dem Quadrate ihrer Abstände von der Achse O und wird das **Trägheitsmoment** der Fläche F in Bezug auf die Achse O genannt. Bezeichnet man dasselbe durch J_0, setzt also:

$$\mathbf{J}_0 = \Sigma (\mathbf{f}\,\mathbf{y}^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 9)$$

so erhält man aus Gl. 7):

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{y}_m = \mathbf{J}_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 10)$$

oder in Worten:

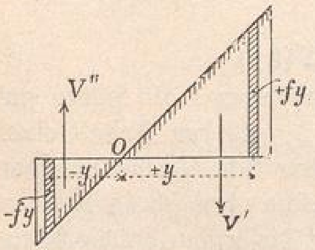
Das Säulenmoment der Säule $V = F y_0$ ist gleich dem Trägheitsmoment J_0 der Fläche F für die Achse O.

Für die Säule V_α ergibt sich ebenso:

$$\mathbf{V}_\alpha \cdot \mathbf{y}_m = \mathbf{t} \cdot \mathbf{J}_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 11)$$

Liegt die Achse O nicht, wie bisher angenommen, außerhalb der Fläche F, sondern schneidet sie dieselbe (wie in Fig. 9), so haben die auf verschiedenen Seiten der Achse liegenden Abstände y der Flächenteilchen f verschiedenes Vorzeichen, und folglich werden dann die zugehörigen Flächenmomente bei der Säulendarstellung nach verschiedenen Seiten der F-Ebene aufgetragen. Die beiden Säulenteile V′ und V″ gehen in diesem Falle in Keilstücke über, von denen eins positiv, das andere negativ zu nehmen ist, deren Momente also in Bezug auf die Achse O die gleiche Drehrichtung haben, so daß die von ihnen gelieferten Beiträge für das Trägheitsmoment J_0 gleiches Vorzeichen und zwar das positive haben, weil $J_0 = \Sigma (f y^2)$ als Ausdruck vierten Grades stets positiv sein muß.

Fig. 9.



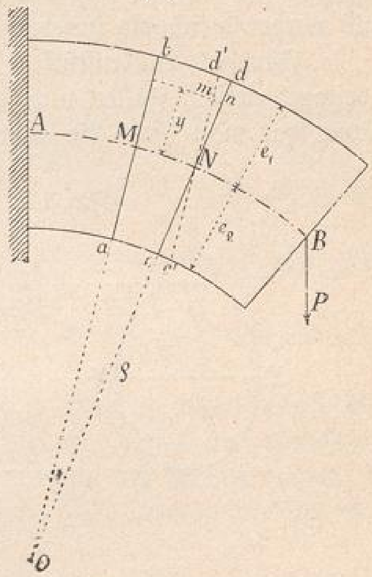
§ 4.

Widerstand gegen Biegung.

Ist ein gerader, in Bezug auf die Bildebene symmetrisch vorausgesetzter Balken mit seinem einen Ende eingespannt, und wird das andere freie Ende desselben durch ein in der Symmetrieebene angreifendes Gewicht P belastet, so erfährt derselbe dadurch eine Biegung (Fig. 10).

Denkt man sich den Balken aus einzelnen Fasern bestehend, welche der Längsachse parallel sind, so werden durch die Biegung die oberen Fasern verlängert, die unteren Fasern verkürzt. Zwischen der obersten und untersten Faserschicht muß sich eine mittlere senkrecht zur Bildebene stehende Faserschicht AB befinden, die weder verlängert noch verkürzt, sondern nur gebogen wird. Diese heißt die neutrale Faserschicht. Diese Schicht schneidet jeden durch den Körper gelegten Querschnitt in einer geraden Linie, welche die neutrale Achse des Querschnittes genannt wird.

Fig. 10.



Die beiden, sehr nahe aneinander liegenden Querschnitte ab und cd des Balkens (Fig. 10), welche vor der Biegung einander parallel waren, haben nach der Biegung eine gegeneinander geneigte Lage. Zieht man durch N zu ab die Parallele c′d′, so stellen die Abschnitte zwischen cd und c′d′ die Verlängerungen bezw. Verkürzungen der einzelnen Faserabschnitte dar, welche vor der Biegung sämtlich die Länge MN hatten. So z. B. ist mn die Verlängerung einer Faser, welche den Abstand y von der neutralen Faserschicht hat; d′d die Verlängerung der im Abstande e_1 von der neutralen liegenden äußersten Faser, cc′ die Verkürzung der untersten Faser im Abstande e_2 von der neutralen.

Nach Fig. 10 ist:

$$\frac{mn}{d'd} = \frac{y}{e_1}$$

Nach § 2 verhalten sich nun die Verlängerungen wie die Spannungen. Wird also mit s die Spannung der im Abstande y von der neutralen befindlichen Faser, mit k_1 die Spannung der auf der erhabenen Seite liegenden äußersten Faser bezeichnet, so ist:

$$\frac{mn}{d'd} = \frac{s}{k_1}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{k}_1} = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{e}_1} \qquad \text{12)}$$

Ebenso wird:

$$\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{k}_2} = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{e}_2} \qquad \text{13)}$$

Die Spannungen der einzelnen Fasern eines gebogenen Balkens verhalten sich wie ihre Abstände von der neutralen Faser.

Die inneren Spannungen müssen den äußeren Kräften das Gleichgewicht halten. Denkt man sich den Balken durch eine im Abstande x vom Ende hindurchgelegte Querschnittsebene in zwei Teile zerschnitten (Fig. 11), so sind an der Schnittstelle solche in der Symmetrieebene angreifende äußere Kräfte anzubringen, daß dadurch genau dieselbe Wirkung hervorgebracht wird, als vorher durch die inneren Spannungen.

Für das Balkenstück B N (Fig. 11), welches, da die Biegung in den weitaus meisten Fällen nur sehr gering ist, wagerecht angenommen werden kann, hat man dann die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen anzuwenden.

Fig. 11.

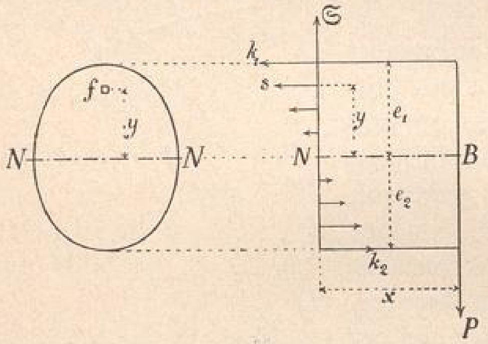
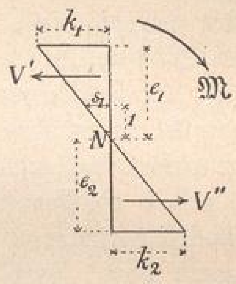


Fig. 11a.



Diese lauten bekanntlich, da nach der obigen Voraussetzung die Kräfte hier alle in einer Ebene wirken:

1) Die algebraische Summe der lotrechten Kräfte muß = Null sein.
2) Die algebraische Summe der wagerechten Kräfte muß = Null sein.
3) Die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Drehpunkt muß = Null sein.

Nach der ersten dieser Bedingungen ist an der Schnittstelle eine lotrecht nach oben gerichtete Kraft:

$$\mathfrak{S} = P$$

anzubringen, welche als Abscherungswiderstand wirkt und eine Verschiebung des Balkenstückes in der Schnittebene verhindert.

Die einzigen wagerechten Kräfte, welche auf das Balkenstück B N wirken, sind die Spannungswiderstände, welche in der oberen Hälfte der Schnittfläche als Zugspannungen (von rechts nach links gerichtet), in der unteren Hälfte als Druckspannungen (von links nach rechts gerichtet) wirken.

Trägt man diese Spannungswiderstände, welche sich (wie oben bereits gesagt war) verhalten, wie ihre Abstände von der neutralen Faser, auf den zugehörigen Flächenteilchen f als Strecken auf (Fig. 11a), so bilden sie in ihrer Gesamtheit einen Spannungsdoppelkeil vom Inhalt $V = V' + V''$, begrenzt einerseits von der Querschnittsfläche F, andererseits von einer durch die N N verlaufenden Ebene, deren Neigung bestimmt ist durch die Spannung s_1 im Abstande 1 von der N N. Nach der zweiten Gleichgewichtsbedingung muß dann sein:

$$V = V' + V'' = 0$$

also auch nach Gl. 5) S. 13:

$$\Sigma(f y) = 0$$

d. h. die Summe der statischen Momente (Flächenmomente) sämtlicher Flächenteilchen der Querschnittsfläche in Bezug auf die Achse N N muß = Null sein, woraus nach der Lehre vom Schwerpunkt*) folgt, daß die Achse N N eine Schwerachse der Querschnittsfläche ist.

Da dies für alle Querschnittsflächen gilt, die durch den Balken hindurchgelegt werden können, so erhält man den Satz:

Die neutrale Faserschicht geht durch die Schwerpunkte sämtlicher Querschnittsflächen hindurch.

Nach der dritten Gleichgewichtsbedingung muß in Bezug auf jede beliebige, also auch z. B. in Bezug auf die Achse N das rechts herumdrehende Moment $\mathfrak{M}$ der äußeren Kraft P gleich der Summe der Momente der in der Schnittfläche wirkenden Spannungswiderstände sein, welche für sich eine Drehung nach links hervorbringen würden.

Letztere werden in Fig. 11a dargestellt durch das Säulenmoment des Spannungsdoppelkeiles, und man erhält daher unter Benutzung der Gl. 8) bezw. 11) S. 14:

$$\mathfrak{M} = s_1 \Sigma(f y^2) = s_1 J$$

worin $\Sigma(f y^2) = J$ das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche F in Bezug auf die Schwerachse N N bedeutet:

Nun ist nach Fig. 11a:

$$s_1 : 1 = k_1 : e_1 = k_2 : e_2$$

oder

$$s_1 = \frac{k_1}{e_1} = \frac{k_2}{e_2}$$

folglich wird:

$$\mathbf{\mathfrak{M} = k_1 \frac{J}{e_1} = k_2 \frac{J}{e_2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 14)$$

Den Ausdruck $\frac{J}{e_1}$ bezw. $\frac{J}{e_2}$ nennt man das Widerstandsmoment des Querschnittes und bezeichnet dasselbe mit W_1 bezw. W_2

$$\mathbf{W_1 = \frac{J}{e_1}} \text{ desgl. } \mathbf{W_2 = \frac{J}{e_2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 15)$$

*) Vergl. Lauenstein, Mechanik, 5. Aufl., § 9, Gl. 35.

Danach ist:

$$\mathfrak{M} = \mathbf{k}_1\,\mathbf{W}_1 = \mathbf{k}_2\,\mathbf{W}_2 \quad \ldots\ldots \quad 16)$$

Meistens liegt der Schwerpunkt des Querschnittes, also auch die neutrale Achse in der Mitte der Höhe; es ist dann $e_1 = e_2 = e$ folglich auch $W_1 = W_2 = W$, und man erhält:

$$\mathfrak{M} = \mathbf{k}\,\mathbf{W} \quad \ldots\ldots \quad 17)$$

Biegungsmoment = k × Widerstandsmoment.

Da f als Flächenteilchen ein quadratischer Ausdruck ist (Breite × Höhe), so erscheint das Trägheitsmoment stets als Größe vierten Grades, das Widerstandsmoment als Größe dritten Grades.

Trägheitsmoment und Widerstandsmoment in Bezug auf die Schwerachse sind nur abhängig von der Form und Größe des Querschnittes.

§ 5.

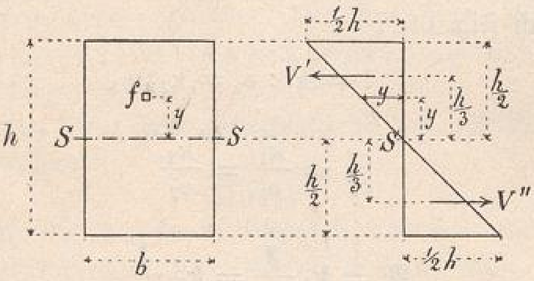
Trägheitsmomente und Widerstandsmomente.

Aus dem allgemeinen Ausdruck für das Trägheitsmoment:

$$J = \Sigma\,(f y^2)$$

ergeben sich für die verschiedenen Querschnittsformen bestimmte Werte, welche sich für das Rechteck und die aus Rechtecken zusammengesetzten regelmäßigen

Fig. 12.



Figuren, für das Dreieck und für den Kreis mit elementaren Mitteln berechnen lassen, in allen anderen Fällen aber durch Integration zu bestimmen sind.

Bei dem Rechteck von der Breite b und der Höhe h (Fig. 12) entsteht durch Auftragen der Abstände y von der Schwerachse S auf die zugehörigen Flächenteilchen f ein Doppelkeil mit der Keilkante SS.

Der Inhalt eines Keilstückes ist:

$$V' = V'' = \frac{1}{2}\left(\frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{2}\right) = \frac{bh^2}{8}$$