Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

§ 5. Trägheitsmomente und Widerstandsmomente.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78212

Danach ist:

$$\mathfrak{M} = \mathbf{k_1\, W_1 = k_2\, W_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16)$$

Meistens liegt der Schwerpunkt des Querschnittes, also auch die neutrale Achse in der Mitte der Höhe; es ist dann $e_1 = e_2 = e$ folglich auch $W_1 = W_2 = W$, und man erhält:

$$\mathfrak{M} = \mathbf{k\, W} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17)$$

Biegungsmoment $= \mathbf{k} \times$ Widerstandsmoment.

Da f als Flächenteilchen ein quadratischer Ausdruck ist (Breite $\times$ Höhe), so erscheint das Trägheitsmoment stets als Größe vierten Grades, das Widerstandsmoment als Größe dritten Grades.

Trägheitsmoment und Widerstandsmoment in Bezug auf die Schwerachse sind nur abhängig von der Form und Größe des Querschnittes.

§ 5.

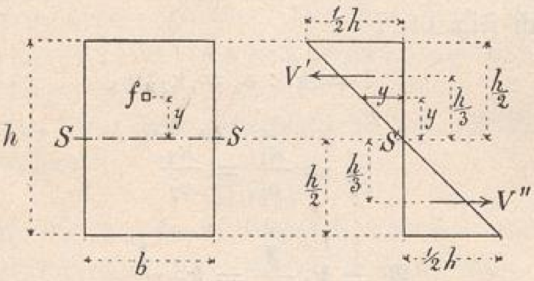
Trägheitsmomente und Widerstandsmomente.

Aus dem allgemeinen Ausdruck für das Trägheitsmoment:

$$J = \Sigma (f y^2)$$

ergeben sich für die verschiedenen Querschnittsformen bestimmte Werte, welche sich für das Rechteck und die aus Rechtecken zusammengesetzten regelmäßigen

Fig. 12.



Figuren, für das Dreieck und für den Kreis mit elementaren Mitteln berechnen lassen, in allen anderen Fällen aber durch Integration zu bestimmen sind.

Bei dem Rechteck von der Breite b und der Höhe h (Fig. 12) entsteht durch Auftragen der Abstände y von der Schwerachse S auf die zugehörigen Flächenteilchen f ein Doppelkeil mit der Keilkante SS.

Der Inhalt eines Keilstückes ist:

$$V' = V'' = \frac{1}{2}\left(\frac{b\,h}{2} \cdot \frac{h}{2}\right) = \frac{b\,h^2}{8}$$

und der Abstand des Schwerpunktes desselben von der Achse S:

$$y_m = \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{3}$$

folglich:

$$V \cdot y_m = (V' + V'')\, y_m = 2\,\frac{b\,h^2}{8} \cdot \frac{h}{3} = \frac{b\,h^3}{12}$$

Fig. 13.

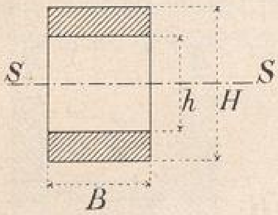


Fig. 14.

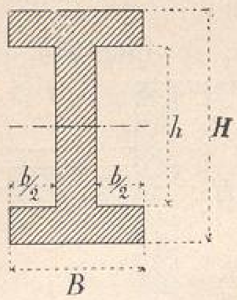
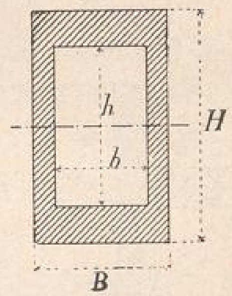


Fig. 15.



Danach ist unter Berücksichtigung der Gl. 10) S. 14 das Trägheitsmoment des Rechteckes in Bezug auf die Schwerachse:

$$\mathbf{J = \frac{b\,h^3}{12}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 18)$$

Für den besonderen Fall, daß das Rechteck ein Quadrat von der Seite a ist, erhält man:

$$\mathbf{J = \frac{a^4}{12}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 19)$$

Fig. 16.

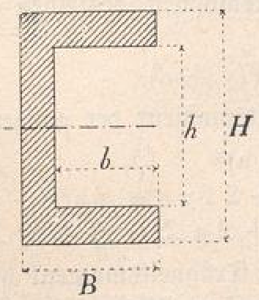


Fig. 17.

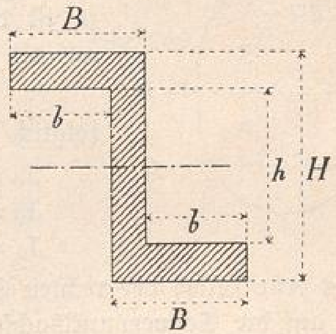


Fig. 13 kann angesehen werden als Differenz der beiden Rechtecke BH und Bh, folglich ist das Trägheitsmoment dieses Querschnittes gleich der Differenz der Trägheitsmomente der beiden Rechtecke.

$$J = \frac{B\,H^3}{12} - \frac{B\,h^3}{12} = \frac{B\,(H^3 - h^3)}{12}$$

Ebenso lassen sich die Querschnitte Fig. 14 bis 17 ansehen als Differenz der Rechtecke B H und b h, danach ist:

$$J = \frac{B H^3}{12} - \frac{b h^3}{12}$$

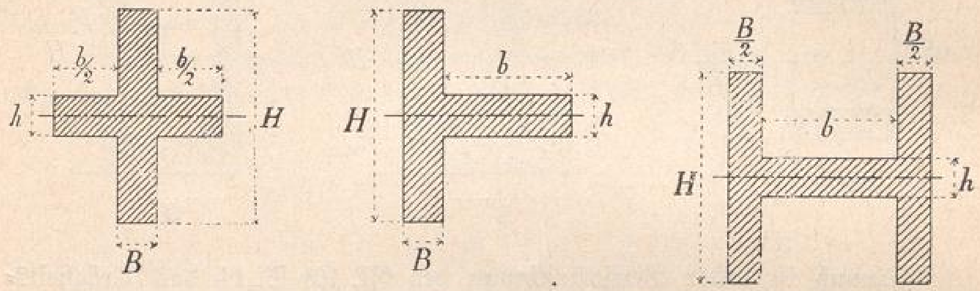
Die Querschnitte Fig. 18 bis 20 können aufgefaßt werden als Summe der Rechtecke B H und b h, folglich:

$$J = \frac{B H^3}{12} + \frac{b h^3}{12}$$

Fig. 18.

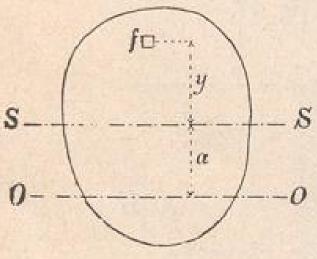
Fig. 19.

Fig. 20.



Die Größe des Trägheitsmomentes eines bestimmten Querschnittes ist abhängig von der Lage der Achse. Bei den bisher aufgeführten Trägheitsmomenten ist die Achse stets Schwerpunktsachse und zugleich Symmetrieachse, d. h. sie geht durch den Schwerpunkt des Querschnitts und teilt denselben in zwei symmetrische Hälften. Das Trägheitsmoment in Bezug auf irgend eine andere Achse O O, welche der Schwerpunktsachse S S parallel ist und den Abstand a von derselben hat (Fig. 21), kann folgendermaßen bestimmt werden:

Fig. 21.



Ist f irgend ein sehr kleines Flächenteilchen, so ist das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf die Achse O

$$f\,(y + a)^2$$

folglich das Trägheitsmoment der ganzen Fläche:

$$J_0 = \Sigma\, f\,(y + a)^2$$
$$J_0 = \Sigma\,(f\,y^2 + 2\,f\,y\,a + f\,a^2)$$
$$J_0 = \Sigma\,(f\,y^2) + 2\,a\,\Sigma\,(f\,y) + a^2\,\Sigma\,(f)$$

Das erste Glied der rechten Seite ist das Trägheitsmoment der Fläche in Bezug auf die Schwerpunktsachse; in dem zweiten Gliede bedeutet $\Sigma\,(f\,y)$ das statische Moment aller Flächenteilchen in Bezug auf die Schwerachse, welches nach der Lehre vom Schwerpunkt gleich Null ist, folglich muß das ganze zweite Glied = Null sein. Das dritte Glied ist, wenn F die ganze Querschnittsfläche bedeutet, $= F\,a^2$.

Danach ist:

$$\mathbf{J_0 = J_s + F\,a^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 20)$$

Man erhält das Trägheitsmoment in Bezug auf eine der Schwerachse parallele Achse, wenn man zu dem Trägheitsmomente in Bezug auf die Schwerachse das Produkt aus der ganzen Querschnittsfläche und dem Quadrat des Abstandes der beiden Achsen hinzufügt.

Für ein Rechteck $b \times h$ ist z. B. das Trägheitsmoment in Bezug auf die Schwerachse

$$J_s = \frac{b\,h^3}{12}$$

folglich ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch die untere Kante des Rechtecks gelegte Achse, da hier $F = b\,h$ und $a = \frac{1}{2}\,h$ einzusetzen ist:

$$J_0 = \frac{b\,h^3}{12} + b\,h\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$\mathbf{J_0 = \frac{b\,h^3}{3}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 21)$$

Nach Gl. 20) ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Schwerachse von allen Trägheitsmomenten das kleinste.

Bei den Querschnittsformen Fig. 22 bis 24 ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse O

$$J_0 = \frac{B\,H^3}{3} + \frac{b\,h^3}{3}$$

Wird mit F die ganze Querschnittsfläche und mit x_0 der Abstand des Schwerpunktes derselben von der Achse O bezeichnet, so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Schwerachse:

$$J_s = J_0 - F\,x_0^2$$

Zur Bestimmung des Schwerpunktsabstandes x_0 ist der S. 13 angeführte Satz anzuwenden: Das statische Moment der ganzen Fläche ist gleich

Fig. 22.

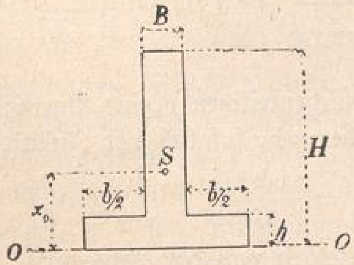
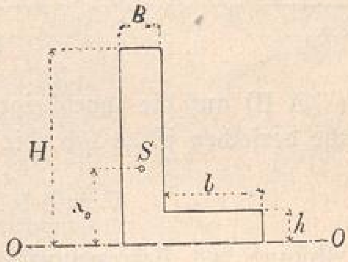


Fig. 23.



der Summe der statischen Momente der einzelnen Flächenteile in Bezug auf eine beliebige Achse. Danach ist in Bezug auf die Achse O:

$$F\,x_0 = B\,H \,.\, \frac{H}{2} + b\,h \,.\, \frac{h}{2}$$

$$x_0 = \frac{B\,H^2 + b\,h^2}{2\,F}$$

Z. B. ist für ein Winkeleisen $10 \times 10 \times 1{,}2$ cm (Fig. 25) ohne Berücksichtigung der Abrundungen:

$$F = 1{,}2 \,.\, 10 + 8{,}8 \,.\, 1{,}2 = 22{,}6 \text{ qcm}$$

$$x_0 = \frac{1{,}2 \,.\, 10^2 + 8{,}8 \,.\, 1{,}2^2}{2 \,.\, 22{,}6} = 2{,}94$$

$$J_0 = \frac{1{,}2 \,.\, 10^3}{3} + \frac{8{,}8 \,.\, 1{,}2^3}{3} = 405$$

$$J_s = 405 - 22{,}6 \,.\, 2{,}94^2 = 209$$

Fig. 24.

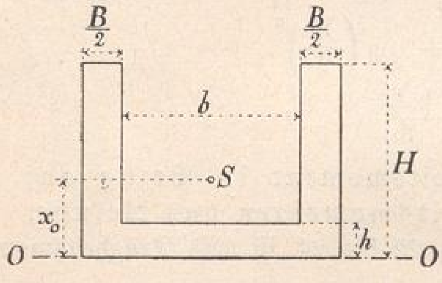
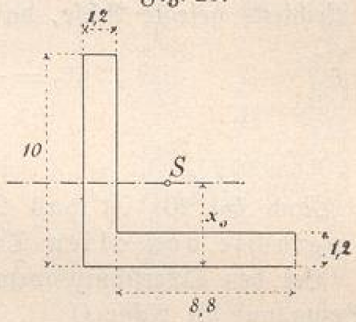


Fig. 25.



Für ein Dreieck A B C von der Grundlinie b und der Höhe h (Fig. 26) ergibt sich durch Auftragen der Abstände y von der durch die Spitze gelegten

Fig. 26.

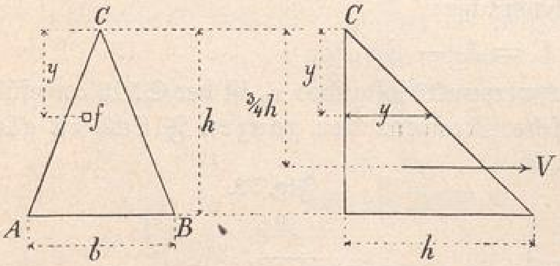
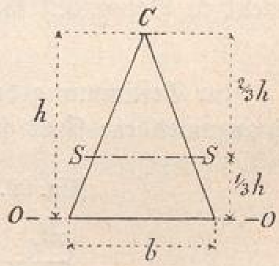


Fig. 27.



Achse C ($\parallel$ A B) auf die zugehörigen Flächenteilchen f eine Pyramide. Die Grundfläche derselben ist $= b\,h$, die Höhe $= h$, folglich der Inhalt:

$$V = b\,h \,.\, \frac{h}{3} = \frac{b\,h^2}{3}$$

und der Abstand des Schwerpunktes derselben von der Achse C:

$$y_m = {}^3/_4\, h$$

Nach Gl. 10) S. 14 ist dann das Trägheitsmoment des Dreiecks in Bezug auf eine durch die Spitze C gelegte der Grundlinie parallele Achse bezw. Ebene:

$$J_c = V \,.\, y_m = \frac{b\,h^2}{3} \,.\, \frac{3}{4}\,h = \frac{b\,h^3}{4}$$

In Bezug auf die Schwerachse S S (Fig. 27) ist ferner nach Gl. 20) S. 20:

$$J_s = J_c - F\,(^2/_3\,h)^2$$

$$J_s = \frac{b\,h^3}{4} - \frac{b\,h}{2}\,(^2/_3\,h)^2 = \frac{b\,h^3}{36}$$

und in Bezug auf die Achse O O:

$$J_o = J_s + F\,(^1/_3\,h)^2$$

$$J_o = \frac{b\,h^3}{36} + \frac{b\,h}{2}\,(^1/_3\,h)^2 = \frac{b\,h^3}{12}$$

Ein Kreis kann angesehen werden als bestehend aus sehr vielen Dreiecken, deren Spitzen mit dem Mittelpunkte des Kreises zusammenfallen und deren sehr kleine Grundlinien b auf dem Kreisumfange liegen. Ist r der Halbmesser des Kreises, so ist das Trägheitsmoment eines solchen Dreiecks in Bezug auf den Mittelpunkt C

$$\frac{b\,r^3}{4}$$

und die Summe der Trägheitsmomente aller dieser Dreiecke, d. i. das Trägheitsmoment des ganzen Kreises:

$$J_c = \frac{r^3}{4}\,\Sigma\,(b)$$

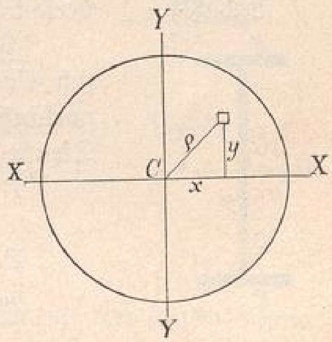
Da aber Σ (b) gleich dem Umfang des Kreises, $= 2\,r\,\pi$ ist, so wird:

$$J_c = \frac{r^3}{4}\,.\,2\,r\,\pi = \frac{r^4\,\pi}{2}$$

Führt man den Durchmesser d ein, setzt also $r = \frac{d}{2}$, so erhält man für das Trägheitsmoment des Kreises in Bezug auf die durch den Mittelpunkt gelegte rechtwinklig zur Bildfläche stehende Achse, d. i. für das polare oder zentrale Trägheitsmoment des Kreises den Ausdruck:

$$J_c = \frac{d^4\,\pi}{32} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 22)$$

Fig. 28.



Zieht man (Fig. 28) durch den Mittelpunkt des Kreises zwei rechtwinklig aufeinander stehende Durchmesser X X und Y Y, und ist ϱ der Abstand eines Flächenteilchens f vom Mittelpunkt, so ist das Trägheitsmoment dieses Flächenteilchens in Bezug auf die winkelrecht zur Bildfläche stehende Achse C

$$f\,\varrho^2 = f\,x^2 + f\,y^2$$

Für die Summe aller Flächenteilchen wird dann:

$$\Sigma\,(f\,\varrho^2) = \Sigma\,(f\,x^2) + \Sigma\,(f\,y^2)$$

oder:

$$J_c = J_y + J_x$$

Da der Kreis eine nach allen Seiten hin symmetrische Figur ist, so ist:

$$J_y = J_x = J$$

folglich:

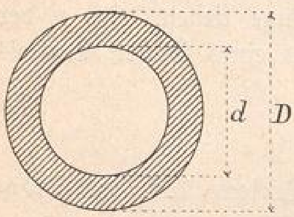
$$J_c = 2\,J$$

Das Trägheitsmoment des Kreises in Bezug auf einen Durchmesser ist danach:

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{J_c}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{d^4\,\pi}}{\mathbf{64}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 23)$$

Die Ringfläche Fig. 29 kann angesehen werden als Differenz zweier Kreise von den Durchmessern D und d, folglich ist das Trägheitsmoment derselben:

Fig. 29.



$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{(D^4 - d^4)\,\pi}}{\mathbf{64}} \quad \ldots \quad 24)$$

Die Widerstandsmomente der verschiedenen Querschnitte ergeben sich nach Gl. 15) S. 17, wenn man die auf die Schwerachse bezogenen Trägheitsmomente durch den Abstand e der äußersten Faser von der neutralen Faser dividiert.

Für das Rechteck $b \times h$ ist $e = \frac{h}{2}$, folglich ist das Widerstandsmoment:

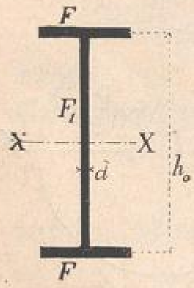
$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{b\,h^2}}{\mathbf{6}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 25)$$

Für den Kreis vom Durchmesser d ist $e = \frac{d}{2}$, daher:

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{d^3\,\pi}}{\mathbf{32}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 26)$$

Bei den Querschnitten Fig. 22 bis 27 haben, da hier e_1 nicht $= e_2$ ist, die Widerstandsmomente für die untere und obere Kante verschiedene Werte.

Fig. 30.



Für das Widerstandsmoment der I-Querschnitte läßt sich ein Annäherungsausdruck aufstellen, welcher zu der vorläufigen Berechnung genieteter Träger vielfach gute Dienste leistet. Bedeutet (Fig. 30):

F die Querschnittsfläche eines Flantsches bezw. einer Gurtung,

F_1 die Querschnittsfläche des Steges oder Stehbleches,

h_0 den Abstand der Schwerpunkte der Flantschen oder Gurtungen,

so ist in Bezug auf die wagerechte Schwerachse X X das Trägheitsmoment der beiden Flantschen (oder Gurtungen) angenähert:

$$J_1 = 2\,F\left(\frac{h_0}{2}\right)^2 = \frac{F\,h_0{}^2}{2}$$

und das Trägheitsmoment des Steges:

$$J_2 = \frac{d\,h_o^3}{12} = \frac{F_1\,h_o^2}{12}$$

folglich das Gesamtträgheitsmoment:

$$J = J_1 + J_2 = \frac{h_o^2}{2}\left(F + {}^1/_6\,F_1\right)$$

woraus sich durch Division mit $\frac{h_o}{2}$ das Widerstandsmoment ergibt:

$$\mathbf{W = h_o\,(F + {}^1/_6\,F_1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 27)$$

Die Gleichung ist bei gegebenem W, h_o und d für F aufzulösen, und es sind danach die erforderlichen Walzeisen zu bestimmen.

Aufgabe 15. Das Widerstandsmoment eines aus Stehblech und Winkeleisen zusammengesetzten Trägerquerschnittes soll $W = 2900$ betragen, die ganze Trägerhöhe sei $h = 72$ cm und danach schätzungsweise $h_o = 66$ cm. Die Stärke des Stehbleches ist $d = 1$ cm. Es sollen die erforderlichen Winkeleisen berechnet werden.

Fig. 31.

Auflösung. Die Querschnittsfläche des Stehbleches ist angenähert:

$$F_1 = d\,h_o = 1\,.\,66 = 66 \text{ qcm}$$

daher nach Gl. 27)

$$2900 = 66\,(F + {}^1/_6\,.\,66)$$

woraus folgt:

$$F = \frac{2900}{66} - 11 = 33 \text{ qcm}$$

Jeder der beiden Winkel einer Gurtung erfordert danach den Nutzquerschnitt $^1/_2\,F = 16{,}5$ qcm und bei Nieten von 2 cm Durchmesser den Gesamtquerschnitt:

$$f = 16{,}5 + 2\,.\,1 = 18{,}5 \text{ qcm}$$

Dafür genügt der Winkel $10 \times 10 \times 1$ cm mit $f = 19$ qcm.

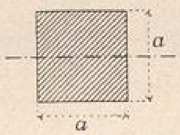
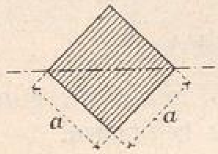
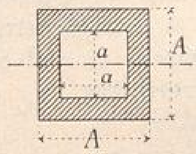
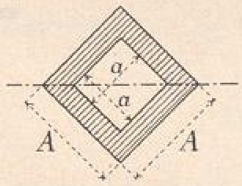
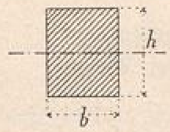
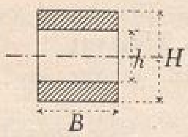
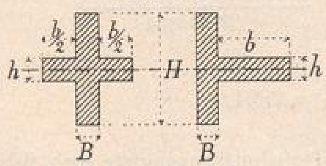
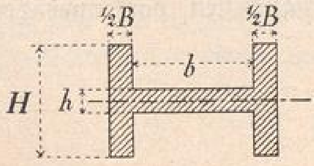
Für diesen Querschnitt (Fig. 31), welcher als Differenz von Rechtecken betrachtet werden kann, ergibt sich genau:

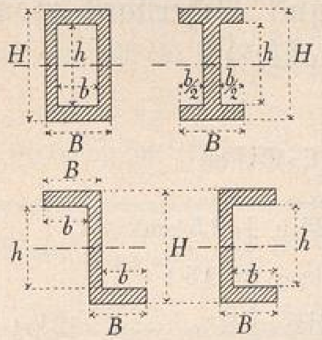
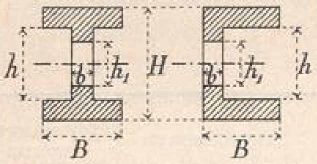
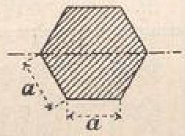
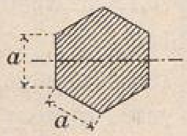
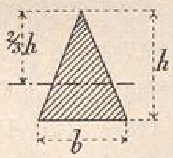
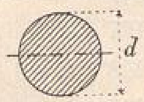
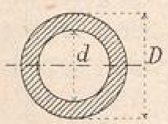
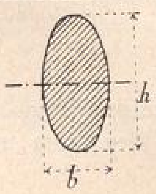
$$J = \frac{21\,.\,72^3 - 18\,.\,70^3 - 2\,.\,52^3}{12} - 2\,\underbrace{\left(\frac{3\,.\,2^3}{12} + 6\,.\,30{,}5^2\right)}_{\text{Nietabzug}} = 104082$$

folglich:

$$W = \frac{104082}{36} = 2891$$

In der folgenden Tabelle sind die Trägheitsmomente und Widerstandsmomente für die wichtigsten und am häufigsten vorkommenden einfachen Querschnitte zusammengestellt.

Nr.	Querschnittsform	Trägheitsmoment J	Widerstandsmoment W
1		$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^3}{6}$
2		$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^3}{6\sqrt{2}}$
3		$\frac{A^4 - a^4}{12}$	$\frac{A^4 - a^4}{6\,A}$
4		$\frac{A^4 - a^4}{12}$	$\frac{A^4 - a^4}{6\sqrt{2}\,.\,A}$
5		$\frac{b\,h^3}{12}$	$\frac{b\,h^2}{6}$
6		$\frac{B(H^3 - h^3)}{12}$	$\frac{B(H^3 - h^3)}{6\,H}$
7	 	$\frac{B\,H^3 + b\,h^3}{12}$	$\frac{B\,H^3 + b\,h^3}{6\,H}$

Nr.	Querschnittsform	Trägheitsmoment J	Widerstandsmoment W
8		$\frac{BH^3 - bh^3}{12}$	$\frac{BH^3 - bh^3}{6H}$
9		$\frac{B(H^3-h^3)+b(h^3-h_1^3)}{12}$	$\frac{B(H^3-h^3)+b(h^3-h_1^3)}{6H}$
10		$\frac{5\sqrt{3}}{16}a^4$ $= 0{,}5413\ a^4$	$\frac{5}{8}a^3$
11		$\frac{5\sqrt{3}}{16}a^4$ $= 0{,}5413\ a^4$	$0{,}5413\ a^3$
12		$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{bh^2}{24}$ für die oberste Faser $\frac{bh^2}{12}$ für die Grundlinie
13		$\frac{d^4\pi}{64}$	$\frac{d^3\pi}{32}$
14		$\frac{(D^4 - d^4)\pi}{64}$	$\frac{(D^4 - d^4)\pi}{32D}$
15		$\frac{bh^3\pi}{64}$	$\frac{bh^2\pi}{32}$