Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

§ 7. Die Krümmung und Durchbiegung der belasteten Balken.

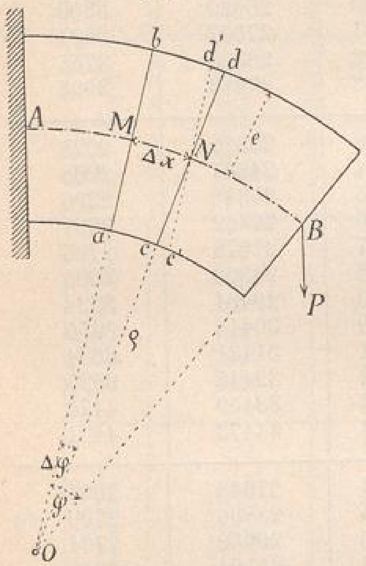
urn:nbn:de:hbz:466:1-78212

§ 7.

Die Krümmung und Durchbiegung der belasteten Balken.

In § 4 S. 15 wurde die neutrale Faserschicht eines Balkens als diejenige Faserschicht erklärt, welche, wenn der Balken durch eine Belastung eine Durchbiegung erfährt, weder verlängert noch verkürzt, sondern nur gebogen wird.

Fig. 32.



Denkt man sich durch die Längsachse des Balkens eine lotrechte Ebene gelegt, so schneidet diese die gebogene neutrale Faserschicht in einer krummen Linie, welche die **elastische Linie** genannt wird. Diese kann angesehen werden als zusammengesetzt aus einzelnen Kreisbögen, deren Halbmesser an verschiedenen Stellen des Balkens im allgemeinen verschieden groß sind.

Ist O der Mittelpunkt des Kreisbogens für das sehr kleine Bogenstück MN (Fig. 32) und bezeichnet man den **Krümmungshalbmesser** NO mit ϱ, so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke d'dN und MNO:

$$\frac{\mathrm{d'd}}{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{e}}{\varrho}$$

d'd ist die Verlängerung der Faser, deren ursprüngliche Länge = MN war, folglich ist nach Gl. 2) S. 6 zu setzen:

$$\frac{\mathrm{d'd}}{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{E}}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\mathbf{e}}{\boldsymbol{\varrho}} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{E}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 28)$$

Setzt man für k den Wert aus Gl. 17) S. 18

$$\mathrm{k} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{W}} = \frac{\mathfrak{M}\,\mathrm{e}}{\mathrm{J}}$$

ein, so erhält man:

$$\frac{\mathrm{e}}{\varrho} = \frac{\mathfrak{M}\,\mathrm{e}}{\mathrm{EJ}}$$

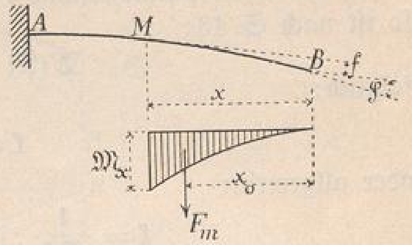
Für den Krümmungshalbmesser ϱ ergibt sich danach die Größe:

$$\varrho = \frac{\mathbf{EJ}}{\mathfrak{M}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 29)$$

Man erkennt aus dieser Gleichung, daß bei einem prismatischen Balken, bei welchem J stets denselben Wert behält, der Krümmungshalbmesser um so kleiner wird, je größer das Kraftmoment $\mathfrak{M}$ wird, und daß für diejenige Stelle des Balkens, wo das Moment am größten ist, der Krümmungshalbmesser seinen kleinsten Wert annimmt, der Balken dort also am schärfsten gekrümmt ist.

Infolge der Krümmung erleiden die einzelnen Punkte des Balkens eine Durchbiegung, welche sich folgendermaßen berechnen läßt.

Fig. 33.



Aus dem Dreieck MNO (Fig. 32) mit der sehr kleinen Seite $MN = \Delta x$ und dem sehr kleinen Winkel $MON = \Delta\varphi$ folgt:

$$\Delta x = \varrho \cdot \Delta\varphi \quad \text{oder} \quad \Delta\varphi = \frac{\Delta x}{\varrho}$$

und wenn für ϱ der Wert aus Gl. 29) eingesetzt wird:

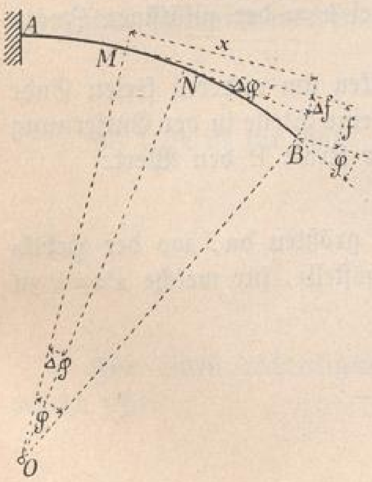
$$\Delta\varphi = \frac{\mathfrak{M} \cdot \Delta x}{EJ} \quad \text{. . . . . 30)}$$

Denkt man die Länge $MB = x$ in sehr viele kleine Abschnitte Δx und dem entsprechend den Winkel $MOB = \varphi$ in sehr viele kleine Winkelteile $\Delta\varphi$ zerlegt, so erhält man nach der letzten Gleichung für das Trägerstück MB:

$$\varphi = \Sigma(\Delta\varphi) = \frac{1}{EJ} \Sigma(\mathfrak{M} \cdot \Delta x)$$

Trägt man nun (Fig. 33) die Momente $\mathfrak{M}$ auf den Endpunkten der zugehörigen x als Strecken auf, so erhält man als Darstellung von $\Sigma(\mathfrak{M} \cdot \Delta x)$ eine Fläche, die sogen. Momentenfläche oder kurz $\mathfrak{M}$-Fläche. Der Inhalt derselben werde durch F_m bezeichnet. Es ist dann nach der letzten Gleichung, da man wegen Kleinheit des Winkels genügend genau $\operatorname{tg}\varphi$ statt φ setzen kann:

Fig. 34.



$$\mathbf{tg\,\varphi = \frac{1}{EJ} \cdot F_m} \quad \text{. . . 31)}$$

oder allgemein:

$$\mathbf{tg\,\varphi = \frac{1}{EJ} \cdot (\mathfrak{M}\text{-Fläche})} \quad \text{. 32)}$$

Nach Fig. 34 ist:

$$\Delta f = x \cdot \Delta\varphi$$

oder wenn für $\Delta\varphi$ der Wert aus Gl. 30) eingesetzt wird:

$$\Delta f = x \frac{\mathfrak{M} \cdot \Delta x}{EJ}$$

Die Durchbiegung f des Trägerendpunktes B gegen den Punkt M hat demnach die Größe:

$$f = \Sigma(\Delta f) = \frac{1}{EJ} \Sigma(\mathfrak{M} \cdot \Delta x)\, x$$

Der Ausdruck $\Sigma(\mathfrak{M} \cdot \Delta x)\, x$ bedeutet die Summe der statischen Momente sämtlicher Flächenstreifen der M-Fläche in Bezug auf den Punkt B. Wird daher der Schwerpunktsabstand dieser Fläche ($= F_m$) mit x_0 bezeichnet (Fig. 33), so ist nach S. 13:

$$\Sigma(\mathfrak{M} \cdot \Delta x)\, x = F_m \cdot x_0$$

folglich:

$$\mathbf{f = \frac{1}{EJ} F_m x_0} \qquad \text{. . . . . 33)}$$

oder allgemein:

$$\mathbf{f = \frac{1}{EJ} \cdot (\text{Moment der M-Fläche})} \qquad \text{. . . . . 34)}$$

§ 8.

Der an einem Ende eingespannte Träger.

1. Belastung durch Einzelkräfte.

Nach Gl. 17) S. 18 ist für einen prismatischen Balken, bei welchem das Widerstandsmoment W für alle Querschnitte denselben Wert hat, die Spannung k um so größer, je größer das Moment $\mathfrak{M}$ ist. Da k an der stärkst gespannten Stelle des Balkens nicht größer als die zulässige Inanspruchnahme werden darf, so ist ein prismatischer Balken immer nach dem größten Momente zu berechnen, wobei k = der zulässigen Inanspruchnahme gesetzt wird.

Ist ein an einem Ende eingespannter Balken am anderen freien Ende durch die Kraft P belastet (Fig. 35), so hat für eine Stelle in der Entfernung x vom Endpunkte des Balkens das Moment der Kraft P den Wert:

$$\mathfrak{M}_x = P x$$

Das Moment wächst mit x und wird am größten da, wo der Hebelarm x am größten ist, also an der Einspannungsstelle, für welche $x = l$ zu setzen ist. Danach ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = P l$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}_{max}} = \frac{x}{l}$$

Die Momente verhalten sich wie die Entfernungen von der Belastungsstelle. Da für $x = 0$ auch $\mathfrak{M} = 0$ wird, so lassen sich die Momente darstellen durch die Ordinaten des Dreiecks AA_1B (Fig. 35), dessen Endordinate $AA_1 = P l$ ist.