Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

§ 8. Der an einem Ende eingespannte Träger.

Die Durchbiegung f des Trägerendpunktes B gegen den Punkt M hat demnach die Größe:

$$f = \Sigma(\Delta f) = \frac{1}{EJ} \Sigma(\mathfrak{M} \cdot \Delta x)\, x$$

Der Ausdruck $\Sigma(\mathfrak{M} \cdot \Delta x)\, x$ bedeutet die Summe der statischen Momente sämtlicher Flächenstreifen der $\mathfrak{M}$-Fläche in Bezug auf den Punkt B. Wird daher der Schwerpunktsabstand dieser Fläche ($= F_m$) mit x_0 bezeichnet (Fig. 33), so ist nach S. 13:

$$\Sigma(\mathfrak{M} \cdot \Delta x)\, x = F_m \cdot x_0$$

folglich:

$$\mathbf{f = \frac{1}{EJ} F_m x_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 33)$$

oder allgemein:

$$\mathbf{f = \frac{1}{EJ} \cdot (\textbf{Moment der } \mathfrak{M}\textbf{-Fläche})} \quad \ldots\ldots \quad 34)$$

§ 8.

Der an einem Ende eingespannte Träger.

1. Belastung durch Einzelkräfte.

Nach Gl. 17) S. 18 ist für einen prismatischen Balken, bei welchem das Widerstandsmoment W für alle Querschnitte denselben Wert hat, die Spannung k um so größer, je größer das Moment $\mathfrak{M}$ ist. Da k an der stärkst gespannten Stelle des Balkens nicht größer als die zulässige Inanspruchnahme werden darf, so ist ein prismatischer Balken immer nach dem größten Momente zu berechnen, wobei k = der zulässigen Inanspruchnahme gesetzt wird.

Ist ein an einem Ende eingespannter Balken am anderen freien Ende durch die Kraft P belastet (Fig. 35), so hat für eine Stelle in der Entfernung x vom Endpunkte des Balkens das Moment der Kraft P den Wert:

$$\mathfrak{M}_x = P x$$

Das Moment wächst mit x und wird am größten da, wo der Hebelarm x am größten ist, also an der Einspannungsstelle, für welche x = l zu setzen ist. Danach ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = P l$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}_{max}} = \frac{x}{l}$$

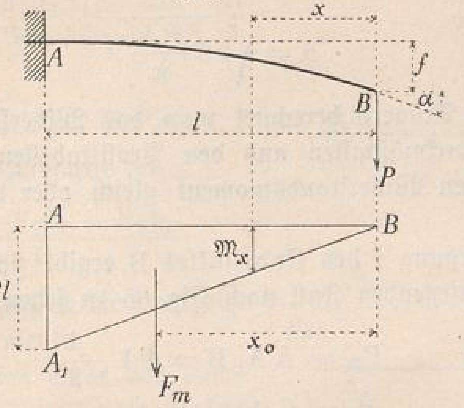
Die Momente verhalten sich wie die Entfernungen von der Belastungsstelle. Da für x = 0 auch $\mathfrak{M} = 0$ wird, so lassen sich die Momente darstellen durch die Ordinaten des Dreiecks AA_1B (Fig. 35), dessen Endordinate $AA_1 = Pl$ ist.

Setzt man in Gl. 17) S. 18 für $\mathfrak{M}$ den größten Wert $P\,l$ ein, so folgt:

$$\mathbf{P\,l = k\,W} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 35)$$

wo k die Spannung an der Einspannungsstelle, also die größte überhaupt im Balken auftretende Spannung ist, folglich gleich der zulässigen Inanspruch-

Fig. 35.



nahme zu setzen ist. Alle anderen Stellen eines prismatischen Balkens erleiden eine geringere Spannung, es ist deshalb die Einspannungsstelle der **gefährliche Querschnitt**.

Die letzte Gleichung kann in der Form:

$$P = \frac{k\,W}{l}$$

benutzt werden, die Tragfähigkeit eines gegebenen Balkens zu berechnen.

Soll dagegen für eine gegebene Belastung der erforderliche Balkenquerschnitt bestimmt werden, so ist zu setzen:

$$W = \frac{P\,l}{k}$$

So z. B. ist für einen Kreisquerschnitt mit dem Durchmesser d

$$\frac{d^3 \pi}{32} = \frac{P\,l}{k}$$

also:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} \, \frac{P\,l}{k}}$$

Für einen rechteckigen Querschnitt von der Breite b und der Höhe h würde sein:

$$\frac{b\,h^2}{6} = \frac{P\,l}{k}$$

Man kann hier nun entweder b annehmen und h danach berechnen, oder umgekehrt h annehmen und b danach berechnen, oder endlich für b : h ein bestimmtes Verhältnis wählen, woraus sich dann die Größen b und h ebenfalls ermitteln lassen. (Letzteres Verfahren ist wohl das zweckmäßigste.)

Setzt man z. B.

$$\frac{b}{h} = \frac{3}{4}, \text{ also } b = \frac{3}{4} h$$

so wird:

$$\frac{{}^3/_4\, h \,.\, h^2}{6} = \frac{P\,l}{k}$$

$$h = \sqrt[3]{8 \frac{P\,l}{k}}$$

Bei eisernen Trägern berechnet man das Widerstandsmoment W und sucht dann am zweckmäßigsten aus den Profiltabellen der Walzwerke ein Profil heraus, dessen Widerstandsmoment gleich oder nahezu gleich dem berechneten ist.

Die Durchbiegung f des Endpunktes B ergibt sich aus Gl. 33) S. 44, worin für den vorliegenden Fall nach Fig. 35 zu setzen ist:

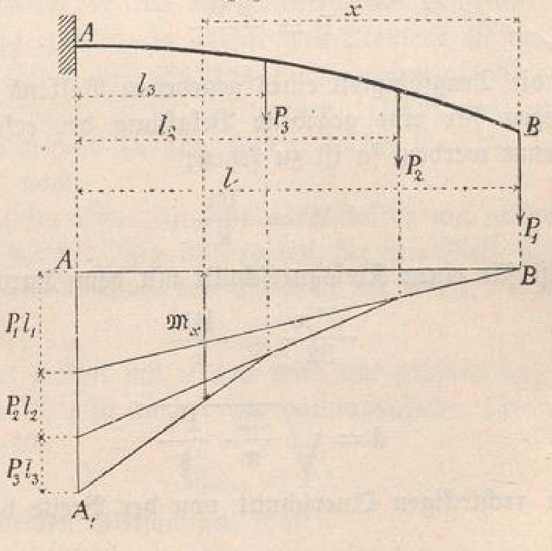
$$F_m = A\,A_1\,B = P\,l \,.\, \frac{l}{2}$$

$$x_0 = {}^2/_3\, l$$

Man erhält:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{P\,l^3}}{\mathbf{3\,EJ}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 36)$$

Fig. 36.



Setzt man hierin nach Gl. 17) S. 18:

$$P\,l = k\,W = k\,\frac{J}{e}$$

so wird:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\,\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{E}}\,\frac{\mathbf{l^2}}{\mathbf{e}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 37)$$

Der Winkel α, den die elastische Linie an dem Endpunkt B mit der Wagerechten einschließt, folgt nach Gl. 31) S. 43 aus:

$$\mathbf{tg}\,\alpha = \frac{\mathbf{Pl^2}}{\mathbf{2\,EJ}} \quad \ldots \ldots \quad 38)$$

Wirken auf einen eingespannten Träger verschiedene Einzelkräfte $P_1\ P_2\ P_3$ in den Entfernungen $l_1\ l_2\ l_3$ von der Einspannungsstelle (Fig. 36), so ist zu setzen:

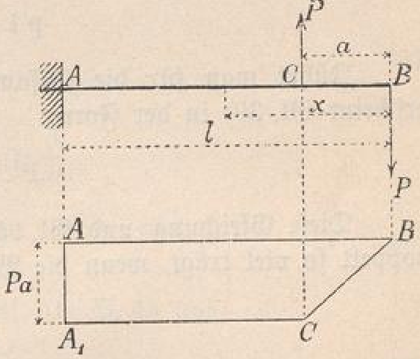
$$\mathfrak{M}_{max} = P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3$$

und das Widerstandsmoment wird:

$$W = \frac{P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3}{k}$$

Fig. 36 zeigt zugleich die graphische Darstellung der Momente.

Fig. 37.



Wirkt am freien Ende des eingespannten Trägers (Fig. 37) ein Kräftepaar, dessen Moment = P a ist, so ist für eine beliebige Stelle in der Entfernung x vom Endpunkte:

$$\mathfrak{M}_x = P\,x - P\,(x - a) = P\,a$$

Das Moment zwischen den Punkten A und C ist also unveränderlich und hat die Größe P a, daher:

$$W = \frac{P\,a}{k}$$

2. Streckenbelastung.

Ist die Belastung p für die Längeneinheit gleichmäßig über die ganze Länge l des Balkens verteilt (Fig. 38), so liegt der Angriffspunkt der Gesamtbelastung p l im Schwerpunkte der Belastungsfläche, hat also den Abstand $\frac{l}{2}$ von der Einspannungsstelle.

Das Moment an der Stelle x ist:

$$\mathfrak{M}_x = p\,x \cdot \frac{x}{2}$$

Das größte Moment an der Einspannungsstelle ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = p\,l \cdot \frac{l}{2}$$

folglich:

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}_{max}} = \frac{x^2}{l^2}$$

Die Momente verhalten sich wie die Quadrate der Abstände vom freien Ende des Balkens, die Momentenfläche wird daher begrenzt durch eine

Parabel AA_1B, deren Scheitel in B liegt und deren Höhe $AA_1 = \frac{p\,l^2}{2}$ ist. Eine einfache Konstruktion der Parabel ist in Fig. 38 angedeutet.

Der gefährliche Querschnitt des Balkens, welcher mit der Einspannungsstelle zusammenfällt, ist nach dem größten Moment zu berechnen. Setzt man:

$$\mathfrak{M}_{max} = k\,W$$

so folgt:

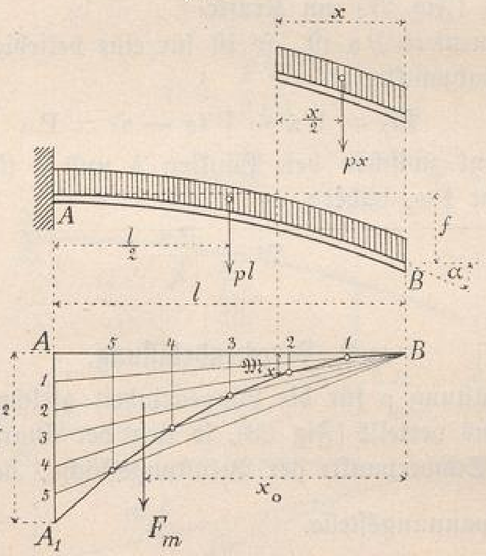
$$p\,l \cdot \frac{l}{2} = k\,W \quad \ldots\ldots\ldots \quad 39)$$

Führt man für die Gesamtbelastung $p\,l$ den Buchstaben P ein, so erscheint Gl. 39) in der Form:

$$P \cdot \frac{l}{2} = k\,W$$

Diese Gleichung und Gl. 35) S. 45 lassen erkennen, daß ein Balken doppelt so viel trägt, wenn die Belastung gleichmäßig über die Länge des-

Fig. 38.



selben verteilt ist, als wenn dieselbe Belastung als Einzelkraft am freien Ende des Balkens angreift.

Besteht die gleichmäßige Belastung aus dem Eigengewichte des Balkens und wird dieses mit G bezeichnet, so ist:

$$G \cdot \frac{l}{2} = k\,W$$

Daraus ergibt sich die Länge l, welche ein an einem Ende eingespannter Balken haben darf, um sich selbst noch mit Sicherheit tragen zu können, zu:

$$l = \frac{2\,k\,W}{G}$$

Die M-Fläche für den gleichmäßig belasteten Freiträger wird (wie schon oben gesagt) begrenzt durch eine Parabel und hat den Flächeninhalt:

$$F_m = \frac{l}{3} \cdot \frac{p\,l^2}{2} = \frac{p\,l^3}{6}$$

Der Abstand x_0 des Schwerpunktes dieser Fläche vom Trägerende B ist*):

$$x_0 = {}^3/_4\, l$$

Nach Einsetzung dieser Werte ergibt sich die Durchbiegung f aus Gl. 33) S. 44 zu:

$$\mathbf{f = \frac{p\,l^4}{8\,EJ}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 40)$$

oder nach Einsetzung von:

$$\frac{p\,l^2}{2} = k\,W = k\,\frac{J}{e}$$

zu:

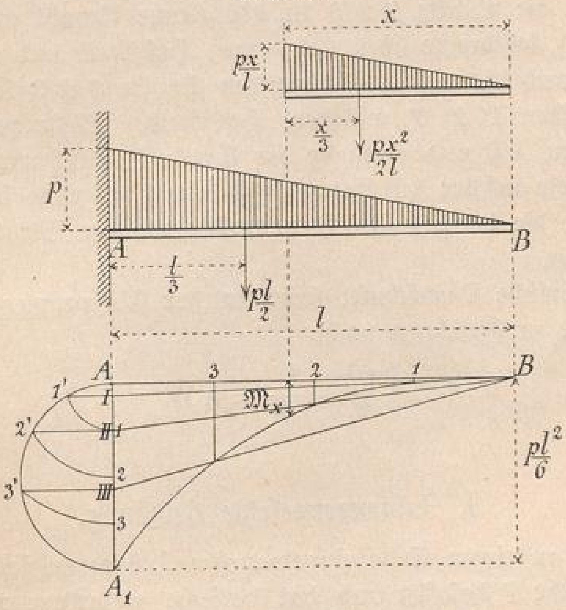
$$\mathbf{f = \frac{1}{4}\,\frac{k}{E}\,\frac{l^2}{e}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 41)$$

Der Winkel α (Fig. 38) folgt nach Gl. 31) S. 43 aus:

$$\mathbf{tg\,\alpha = \frac{p\,l^3}{6\,EJ}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 42)$$

Die Streckenbelastung sei nun nicht mehr gleichmäßig über die ganze Länge des Balkens verteilt, sondern sei $= p$ an der Einspannungsstelle A

Fig. 39.



und nehme von dort aus stetig und gleichförmig ab bis auf Null am freien Ende B (Fig. 39). Die Belastungsfläche ist alsdann ein Dreieck.

*) Vergl. Lauenstein, Mechanik, 5. Aufl. Gl. 47.

Die ganze Belastung ist $= \frac{p\,l}{2}$; der Angriffspunkt derselben (Schwerpunkt des Belastungsdreiecks) hat die Entfernung $\frac{1}{3}\,l$ von der Einspannungsstelle, folglich ist:

$$\mathfrak{M}_{\max} = \frac{p\,l}{2} \cdot \frac{l}{3} = \frac{p\,l^2}{6}$$

Für eine Stelle in der Entfernung x vom freien Balkenende ist die Belastungshöhe $= \frac{p\,x}{l}$. Die Belastung des Balkenstückes von der Länge x ist also:

$$P = \frac{p\,x}{l} \cdot \frac{x}{2} = \frac{p\,x^2}{2\,l}$$

und das Moment an der Stelle x:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p\,x^2}{2\,l} \cdot \frac{x}{3} = \frac{p\,x^3}{6\,l}$$

Aus den beiden Momentengleichungen folgt:

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}_{\max}} = \frac{x^3}{l^3}$$

Die Momente verhalten sich wie die dritten Potenzen der Abstände vom freien Ende des Balkens, die Momentenfläche wird daher begrenzt durch eine kubische Parabel, deren Scheitel in B liegt und deren Höhe $A\,A_1 = \frac{p\,l^2}{6}$ ist.

Zur Konstruktion der kubischen Parabel teile die Geraden $A\,A_1$ und $A\,B$ (Fig. 39) durch die Punkte 1 2 3 in die gleiche Anzahl unter sich gleicher Teile (hier vier), beschreibe über $A\,A_1$ einen Halbkreis und von dem Mittelpunkt A aus durch die auf $A\,A_1$ liegenden Punkte 1 2 3 Kreisbögen bis zu den Schnittpunkten 1′ 2′ 3′ mit dem Halbkreis. Ziehe ferner 1′ I, 2′ II, 3′ III parallel zu AB und verbinde die Punkte I II III mit B durch gerade Linien. Durch die auf der AB liegenden Punkte 1 2 3 ziehe sodann Parallelen zu $A\,A_1$, welche die durch I II III nach B gezogenen Strahlen in Parabelpunkten schneiden.

Der gefährliche Querschnitt liegt an der Einspannungsstelle und der Balken ist daher zu berechnen nach:

$$\mathbf{\frac{p\,l}{2} \cdot \frac{l}{3} = k\,W} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 43)$$

3. Zusammengesetzte Belastung.

Wird ein an einem Ende eingespannter Träger an seinem freien Ende durch das Gewicht P belastet und hat derselbe außerdem noch eine gleichmäßig über seine Länge verteilte Belastung p für die Längeneinheit zu tragen (Fig. 40), so ist:

$$\mathfrak{M}_{\max} = P\,l + p\,l \cdot \frac{l}{2}$$

Setzt man:

$$\mathfrak{M}_{max} = k\,W$$

so ergibt sich das Widerstandsmoment:

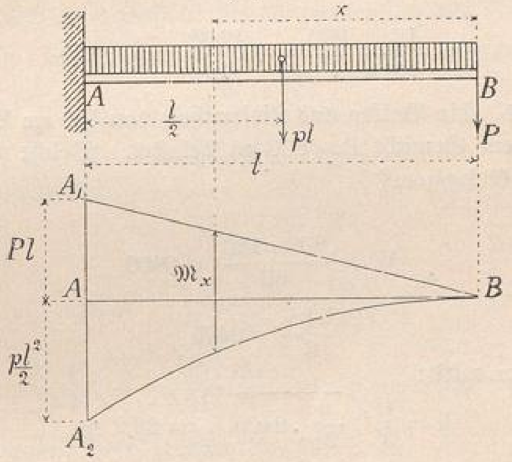
$$W = \frac{P\,l + p\,l \cdot \frac{l}{2}}{k}$$

Besteht die gleichmäßige Belastung aus dem Eigengewichte G des Trägers, so wird:

$$W = \frac{P\,l + G \cdot \frac{l}{2}}{k}$$

Die graphische Darstellung der Momente (Fig. 40) setzt sich zusammen aus dem Dreieck $A\,A_1\,B$, herrührend von der Einzelkraft P und der von der

Fig. 40.



Parabel A_2B begrenzten Fläche $A\,A_2\,B$ als Beitrag von der gleichmäßig verteilten Belastung.

Wird die durch die Einzelkraft P hervorgebrachte Beanspruchung mit k_1 und die durch die gleichmäßig verteilte Belastung hervorgebrachte Beanspruchung mit k_2 bezeichnet, so ergibt sich die Durchbiegung des Endpunktes B durch Addition der Gleichungen 37) und 41) zu:

$$\mathbf{f} = \left(\frac{\mathbf{k}_1}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{k}_2}{\mathbf{4}}\right)\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{E}}\,\frac{\mathbf{l}^2}{\mathbf{e}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 44)$$

Aufgabe 16. Ein an einem Ende wagerecht eingespannter Balken von Eichenholz, dessen Länge = 150 cm und dessen Querschnitt 20 × 24 cm ist, soll an seinem freien Ende durch ein Gewicht P belastet werden. Wie groß darf P sein?

Auflösung. Nach der Tabelle S. 4 ist hier zu setzen: k = 80 (für Druck); ferner ist nach der Tabelle 15 § 6 S. 40 für b = 20 cm, h = 24 cm:

$$W = 1920$$

folglich erhält man nach Gl. 35) S. 45:

$$P = \frac{80 \,.\, 1920}{150} = 1024 \text{ kg}$$

Aufgabe 17. Ein an einem Ende eingemauerter schmiedeeiserner I-Träger von 250 cm Länge wird am freien Ende durch ein Gewicht von 3000 kg belastet. Welches Profil muß der Träger erhalten und wie groß wird die Durchbiegung des Endpunktes sein? ($k \doteq 1000$)

Auflösung. Aus Gl. 35) S. 45 folgt:

$$W = \frac{3000 \,.\, 250}{1000} = 750$$

Nach Tabelle 2 § 6 ist das Profil Nr. 32 mit $W = 781$ zu wählen.

Die Beanspruchung wird dann genau:

$$k = \frac{\mathfrak{M}}{W} = \frac{3000 \,.\, 250}{781} = 960 \text{ kg/qcm}$$

Die Durchbiegung beträgt nach Gl. 37) S. 46, worin $e = \frac{h}{2} = 16$ cm zu setzen ist:

$$f = \frac{1}{3} \, \frac{960}{2000000} \,.\, \frac{250^2}{16} = 0{,}625 \text{ cm}$$

Aufgabe 18. Ein Balken aus Kiefernholz von 180 cm Länge ist an seinem freien Ende durch ein Gewicht $P = 800$ kg belastet. Welche Abmessungen erhält der Balken bei $k = 60$ kg/qcm?

Auflösung.

$$W = \frac{800 \,.\, 180}{60} = 2400$$

$$\frac{b\,h^2}{6} = 2400$$

Für $b = 21$ cm wird:

$$h = \sqrt{\frac{6}{21} \,.\, 2400} = \infty\, 26{,}2 \text{ cm}$$

Wählt man $h = 26$ cm, so wird:

$$b = \frac{6 \,.\, 2400}{26^2} = 21{,}3 \text{ cm}$$

Wird $b = {}^3\!/_4\, h$ angenommen, so ergibt sich:

$$\frac{{}^3\!/_4\, h \,.\, h^2}{6} = 2400$$

$$h = \sqrt[3]{8 \,.\, 2400} = 26{,}8 \text{ cm}$$

$$b = \frac{3}{4} \,.\, 26{,}8 = 20{,}1 \text{ cm}$$

Aufgabe 19. Ein 220 cm ausladender I-Träger soll nach Fig. 36 S. 46 belastet sein, und zwar sei:

$$P_1 = 200 \text{ kg}; \quad l_1 = 220 \text{ cm}$$
$$P_2 = 500 \text{ kg}; \quad l_2 = 180 \text{ cm}$$
$$P_3 = 300 \text{ kg}; \quad l_3 = 120 \text{ cm}$$

Welches Profil muß der Träger erhalten bei $k = 1000$?

Auflösung.

$$\mathfrak{M}_{max} = 200 \cdot 220 + 500 \cdot 180 + 300 \cdot 120 = 170000 \text{ kg cm}$$

$$W = \frac{170000}{1000} = 170$$

Nach Tabelle 2 § 6 genügt Profil Nr. 19 mit $W = 185$.

Aufgabe 20. Welche gleichmäßig verteilte Belastung kann ein 200 cm langer Freiträger aus Eichenholz, dessen Breite $b = 18$ cm und dessen Höhe $h = 24$ cm ist, mit Sicherheit tragen? $(k = 60)$

Auflösung. Nach Tabelle 15 § 6 S. 40 ist:

$$W = 1728$$

folglich nach Gl. 39) S. 48:

$$p\,l = \frac{2 \cdot 60 \cdot 1728}{200} = 1036{,}8 \text{ kg}$$

Aufgabe 21. Wie lang kann ein an einem Ende wagerecht eingespannter I-Träger Profil Nr. 18 sein, um sich selbst (bei $k = 1000$) noch mit Sicherheit tragen zu können, und wie groß ist die Durchbiegung des freien Endes?

Auflösung. Das Widerstandsmoment dieses Trägers ist nach Tabelle 2 § 6:

$$W = 161$$

Das Gewicht für 1 cm Länge:

$$g = 0{,}217 \text{ kg}$$

folglich das Gesamtgewicht:

$$G = 0{,}217 \cdot l$$

Danach ist:

$$l = \frac{2\,k\,W}{G} = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 161}{0{,}217 \cdot l}$$

$$l = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 161}{0{,}217}} = 1218 \text{ cm} = 12{,}18 \text{ m}$$

Die Durchbiegung beträgt nach Gl. 41) S. 49:

$$f = \frac{1}{4} \cdot \frac{1000}{2000000} \cdot \frac{1218^2}{9} = 20{,}6 \text{ cm}$$

Aufgabe 22. Ein 200 cm langer Freiträger aus I-Eisen soll am Ende durch $P = 500$ kg belastet sein; außerdem hat derselbe noch eine gleichmäßige Belastung $p = 8$ kg auf 1 cm zu tragen. Es soll das Profil des Trägers und die Durchbiegung des Endpunktes bestimmt werden. $(k = 1000)$

Auflösung.

$$\mathfrak{M}_{max} = 500 \cdot 200 + 8 \cdot 200 \cdot \frac{200}{2} = 260000$$

$$W = \frac{260000}{1000} = 260$$

Gewählt: Profil Nr. 22 mit $W = 278$.

Die durch $P = 500$ hervorgebrachte Beanspruchung ist:

$$k_1 = \frac{500 \cdot 200}{278} = 360 \text{ kg/qcm}$$

Durch die gleichmäßig verteilte Belastung entsteht:

$$k_2 = \frac{8 \, . \, 200 \, . \, 200}{2 \, . \, 278} = 575 \text{ kg/qcm}$$

Im ganzen:

$$k = k_1 + k_2 = 935 \text{ kg/qcm}$$

Die Durchbiegung beträgt nach Gl. 44) S. 51:

$$F = \left(\frac{360}{3} + \frac{575}{4}\right) \frac{200^2}{2000000 \, . \, 11} = 0{,}48 \text{ cm}$$

Aufgabe 23. Ein Balkon von 3,2 m Länge und 1,2 m Ausladung wird durch 5 Konsolträger (I-Eisen) unterstützt, die 0,8 m auseinander liegen. Wie stark müssen diese genommen werden, wenn als Belastung einschließlich Eigengewicht 750 kg auf 1 qm gerechnet wird und das Gewicht der Brüstung 200 kg für das laufende Meter beträgt?

Auflösung. Auf jeden der drei mittleren Träger kommt die gleichmäßig verteilte Belastung:

$$p\,l = 0{,}8 \, . \, 1{,}2 \, . \, 750 = 720 \text{ kg}$$

und die am Ende wirkende Einzellast:

$$P = 0{,}8 \, . \, 200 = 160 \text{ kg}$$

folglich ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{720 \, . \, 120}{2} + 160 \, . \, 120 = 62400$$

$$W = \frac{62400}{1000} = 62{,}4$$

Nach der Tabelle 2 § 6 genügen I-Eisen Nr. 13 mit W = 67,0.

Für die beiden Endträger sind die Belastungen:

$$p\,l = 0{,}4 \, . \, 1{,}2 \, . \, 750 + 1{,}2 \, . \, 200 = 600 \text{ kg}$$

$$P = 0{,}4 \, . \, 200 = 80 \text{ kg}$$

folglich ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{600 \, . \, 120}{2} + 80 \, . \, 120 = 45600$$

$$W = \frac{45600}{1000} = 45{,}6$$

Erforderlich: I-Eisen Nr. 12 mit W = 54,5.

Aufgabe 24. Es soll der eiserne I-Träger Fig. 41 unter Berücksichtigung des Eigengewichtes berechnet werden.

Auflösung. Wird das Eigengewicht des Trägers auf 1 cm Länge mit g bezeichnet, so ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = 500 \, . \, 600 + 600 \, . \, 400 + 600\,g \, . \, 300$$

$$\mathfrak{M}_{max} = 540000 + 180000 \, . \, g$$

$$W = \frac{540000}{1000} + \frac{180000}{1000} \, . \, g$$

$$W = 540 + 180 \, . \, g$$

Nach der Tabelle 2 § 6 würde ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes Profil Nr. 28 mit W = 541 genügen. Das Gewicht dieses Eisens beträgt 0,476 kg für 1 cm Länge, folglich ist:

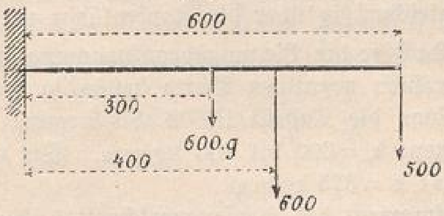
$$180\ g = 180 \,.\, 0{,}476 = 85{,}7$$

und das erforderliche Widerstandsmoment würde betragen:

$$W = 540 + 85{,}7 = 625{,}7$$

Danach ist Profil Nr. 28 zu schwach und es ist dafür das Profil Nr. 30 mit W = 652 zu wählen.

Fig. 41.



Da das Gewicht dieses Eisens 0,538 kg für 1 cm Länge beträgt, so ist

$$180\ g = 180 \,.\, 0{,}538 = \backsim 97$$

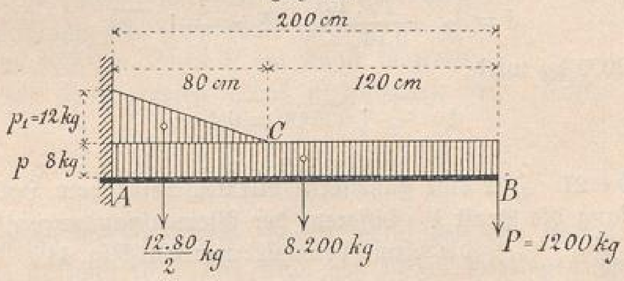
das erforderliche Widerstandsmoment also:

$$W = 540 + 97 = 637$$

Das Profil Nr. 30 ist daher genügend.

Aufgabe 25. Ein Freiträger von 200 cm Länge ist nach Fig. 42 belastet. Es soll das erforderliche Profil berechnet werden.

Fig. 42.



Auflösung. Das Moment bei A ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{12 \,.\, 80}{2} \,.\, \frac{80}{3} + 8 \,.\, 200 \,.\, 100 + 1200 \,.\, 200 = 412800$$

Das Moment bei C ist:

$$\mathfrak{M}_c = 8 \,.\, 120 \,.\, 60 + 1200 \,.\, 120 = 201600$$

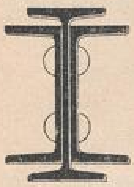
Für den Querschnitt bei C ist daher erforderlich:

$$W_c = \frac{201600}{1000} = 202$$

und für den Querschnitt bei A:

$$W = \frac{412800}{1000} = 413$$

Fig. 43.



Für den Träger kann danach gewählt werden:

ein I-Eisen Nr. 26 mit W = 441

oder: zwei I-Eisen Nr. 20 mit je W = 214, davon eins durchlaufend von A bis B, das andere nur von A bis C reichend

oder: ein I-Eisen Nr. 20 durchlaufend von A bis B und zwei C-Eisen Nr. 16 mit je W = 116 von A bis C (nach Fig. 43).

Aufgabe 26. Wie groß muß der Durchmesser d eines cylindrischen Tragzapfens aus Flußeisen sein, dessen Länge l = 1,5 d betragen soll, unter der Annahme, daß sich der Druck P gleichmäßig über die Zapfenlänge verteilt?

Auflösung. Da hier die Biegungsbeanspruchung zwischen einem größten positiven und einem größten negativen Werte beständig wechselt, so ist für die zulässige Inanspruchnahme die Tabelle III S. 5 (Biegung) maßgebend. Danach ist für Flußeisen zu setzen: k = 300 bis 400 kg/qcm. Wir wählen unter Voraussetzung guten Materials: k = 375 kg/qcm.

Das Widerstandsmoment des Zapfenquerschnittes ist nach der Tabelle S. 27 Nr. 13:

$$W = \frac{d^3 \pi}{32}$$

folglich lautet die allgemeine Biegungsgleichung:

$$\frac{d^3 \pi}{32} k = P \frac{l}{2}$$

Setzt man hierin l : d = 1,5 und k = 375, so entsteht:

$$\frac{d^2 \pi}{32} = \frac{1,5\,P}{2\,.\,375}$$

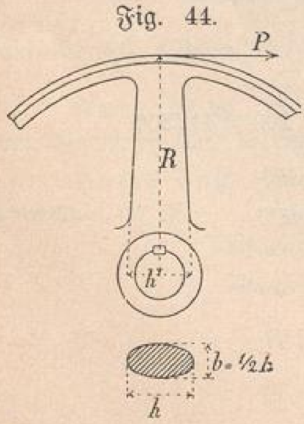
$$d = \sqrt{\frac{16\,.\,1,5}{3,14\,.\,375}\,.\,P} = \frac{1}{7}\sqrt{P}$$

z. B. für P = 2000 kg wird:

$$d = \frac{1}{7}\sqrt{2000} = 6,4 \text{ cm}$$

Aufgabe 27. Für eine gußeiserne Riemenscheibe vom Halbmesser R, auf welche am Umfang die Kraft P (Differenz der Riemenspannungen)*) wirkt, sollen die Arme berechnet werden (Fig. 44).

Fig. 44.



Auflösung. Die Arme können annähernd als fest in der Nabe eingespannte Träger von der Länge R betrachtet werden, die am anderen Ende durch die Kraft P belastet sind. Man kann (nach v. Bach) annehmen, daß ⅓ der Arme gleichzeitig und gleichmäßig zur Kraftübertragung beiträgt, so daß, wenn die Armzahl mit z bezeichnet wird, zu setzen ist:

$$P R = k W \frac{z}{3}$$

---

*) Vergl. Lauenstein, Mechanik. 5. Aufl. S. 116, Gl. 152.

Der Armquerschnitt ist elliptisch und hat, verlängert gedacht und in der Mitte der Welle gemessen, die Höhe h und die Breite $b = \frac{1}{2} h$.

Für diesen Querschnitt ist nach der Tabelle S. 27 Nr. 15:

$$W = \frac{b h^2 \pi}{32} = \frac{h^3 \pi}{2 \cdot 32}$$

dafür genügend genau:

$$W = 0{,}1 \cdot \frac{h^3}{2}$$

Setzt man diesen Wert, und außerdem (da hier die Belastung zwischen Null und einem Maximum wechseln kann) nach der Tabelle II S. 5 die Biegungsbeanspruchung für Gußeisen: $k = 300$ kg/qcm in die obige Gleichung ein, so erhält man:

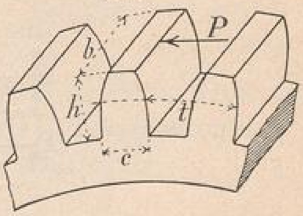
$$PR = 300 \cdot 0{,}1 \frac{h^3}{2} \cdot \frac{z}{3}$$

und daraus:

$$h = \sqrt[3]{\frac{PR}{5z}}$$

Aufgabe 28. Es soll die erforderliche Teilung eines gußeisernen Zahnrades berechnet werden, welches den Zahndruck P auszuhalten hat (Fig. 45).

Fig. 45.



Auflösung. Der Druck P beginnt (bei dem treibenden Rade) an der Wurzel des in Eingriff kommenden Zahnes und steigt dann während des Ganges der Räder allmählich auf bis zum Kopf, in welchem Augenblick (oder auch schon früher) ein folgendes Zähnepaar in Eingriff kommt. Der ungünstigste Fall für einen Zahn (und dieser Fall wird immer der Berechnung der Zahnstärke zu Grunde gelegt) ist also der, daß der Druck P am Kopfe angreift und daß nur ein Zahn diesen Druck auszuhalten hat. Unter dieser Voraussetzung ist:

$$Ph = kW = k \frac{b c^2}{6}$$

Es ist in der Praxis üblich, die Abmessungen der Zähne (Breite, Höhe, Stärke) auf die Teilung (d. i. das Maß von einem beliebigen Punkte des einen Zahnes bis zu dem gleichliegenden Punkte des folgenden Zahnes, im Teilkreise gemessen) zu beziehen. Wird die Teilung mit t bezeichnet, so ist zu setzen:

$$h = 0{,}7\, t$$

und angenähert:

$$c = 0{,}5\, t$$

Man erhält dann für $k = 300$ kg/qcm (Tabelle II S. 5):

$$P \cdot 0{,}7\, t = 300 \frac{b\,(0{,}5\, t)^2}{6}$$

oder:

$$P = \frac{300 \cdot 0{,}25\, b\, t^2}{6 \cdot 0{,}7\, t} = \backsim 18\, b\, t$$

Für Windenräder mit $b = 2t$ wird:

$$P = 18 \,.\, 2t \,.\, t = 36t^2$$

woraus die Teilung folgt:

$$t = \frac{1}{6}\sqrt{P}$$

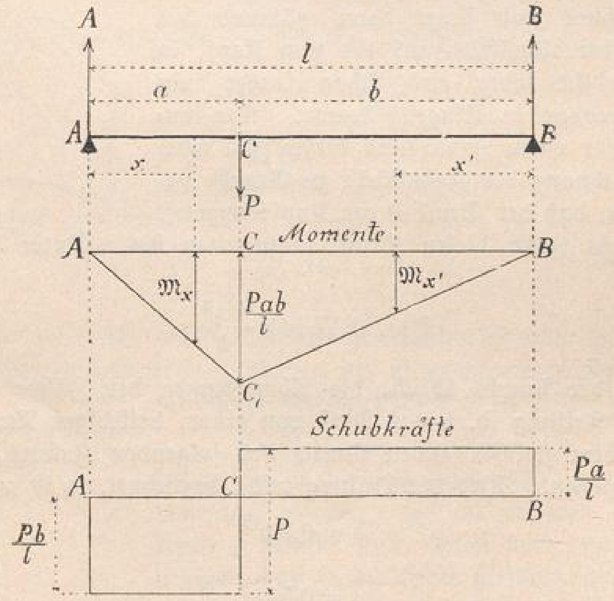
§ 9.

Der Träger auf zwei Stützen.

1. Belastung durch Einzelkräfte.

Ein an beiden Enden unterstützter, durch lotrechte Kräfte belasteter Träger übt auf die Unterstützungspunkte lotrecht abwärts gerichtete Drücke, die sogen. Stützendrücke oder Auflagerdrücke, aus, und nach dem Gesetze der Wechselwirkung erfährt umgekehrt der Träger durch die Unterstützungspunkte die gleichen, aber entgegengesetzt, also lotrecht aufwärts gerichteten Drücke. Diese werden Stützenwiderstände genannt.

Fig. 46.



Ist der Träger AB (Fig. 46) durch eine lotrechte Kraft P belastet, welche die ganze Trägerlänge l in die Abschnitte a und b teilt, und werden die Stützenwiderstände mit A und B bezeichnet, so müssen sich die drei Kräfte ABP im Gleichgewichte halten, daher:

$$A + B = P$$