Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

§ 9. Der Träger auf zwei Stützen.

Für Windenräder mit $b = 2t$ wird:

$$P = 18 \,.\, 2t \,.\, t = 36\,t^2$$

woraus die Teilung folgt:

$$t = \frac{1}{6}\sqrt{P}$$

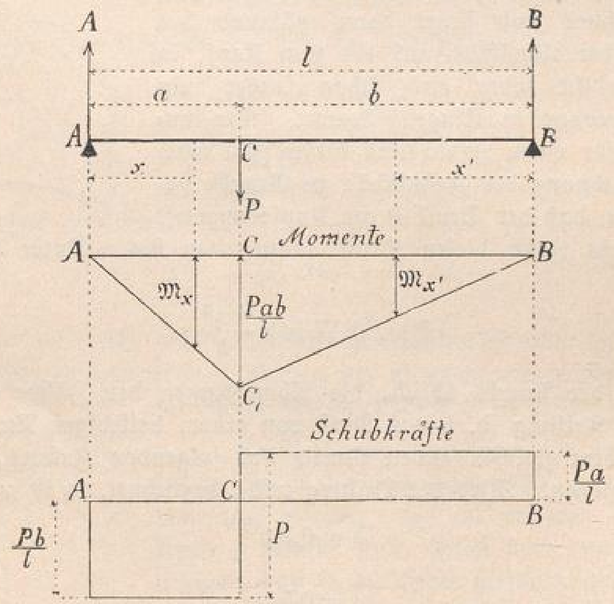
§ 9.

Der Träger auf zwei Stützen.

1. Belastung durch Einzelkräfte.

Ein an beiden Enden unterstützter, durch lotrechte Kräfte belasteter Träger übt auf die Unterstützungspunkte lotrecht abwärts gerichtete Drücke, die sogen. Stützendrücke oder Auflagerdrücke, aus, und nach dem Gesetze der Wechselwirkung erfährt umgekehrt der Träger durch die Unterstützungspunkte die gleichen, aber entgegengesetzt, also lotrecht aufwärts gerichteten Drücke. Diese werden Stützenwiderstände genannt.

Fig. 46.



Ist der Träger AB (Fig. 46) durch eine lotrechte Kraft P belastet, welche die ganze Trägerlänge l in die Abschnitte a und b teilt, und werden die Stützenwiderstände mit A und B bezeichnet, so müssen sich die drei Kräfte ABP im Gleichgewichte halten, daher:

$$A + B = P$$

Die Stützenwiderstände A und B ergeben sich aus der Gleichung der statischen Momente. In Bezug auf den Drehpunkt B ist $A\,l = P\,b$, folglich:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{P\,b}}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 45)$$

In Bezug auf den Drehpunkt A ist $B\,l = P\,a$, daher:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{P\,a}}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 46)$$

Ist der eine Stützenwiderstand, z. B. A, mit Hilfe der Gleichung der statischen Momente ermittelt, so ergibt sich der andere Stützenwiderstand B auch aus der Bedingung:

$$B = P - A = P - \frac{P\,b}{l} = \frac{P\,a}{l}$$

Der Widerstand der einen Stütze ist gleich der Last, multipliziert mit dem Abstande derselben von der anderen Stütze und dividiert durch die ganze Trägerlänge.

Das Moment $\mathfrak{M}_x$ im Abstande x von A ist:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x = \frac{P\,b}{l}\,x$$

Das Moment $\mathfrak{M}_x'$ im Abstande x′ von B ist:

$$\mathfrak{M}_x' = B\,x' = \frac{P\,a}{l}\,x'$$

Die Momente haben in den Auflagerpunkten den Wert Null, nehmen dann mit x bezw. x′ zu und erreichen den größten Wert im Angriffspunkte C der Last. Für diesen Punkt wird $x = a$ und $x' = b$, folglich ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = P\,\frac{a\,b}{l}$$

Da die Momente sich verhalten wie die Abstände von den Unterstützungspunkten, so müssen die Begrenzungslinien der Figur, welche die Momente graphisch darstellt, gerade Linien sein. Konstruiert man also das Dreieck $A\,B\,C_1$ (Fig. 46) so, daß $C\,C_1 = P\,\frac{a\,b}{l}$ ist, so können die Momente durch die Ordinaten dieses Dreiecks gemessen werden.

Ist der Träger prismatisch, so ist zur Berechnung des Querschnittes das größte Moment maßgebend, welches $= k\,W$ zu setzen ist.

$$\mathbf{P}\,\frac{\mathbf{a\,b}}{l} = \mathbf{k\,W} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 47)$$

Denkt man sich den Träger in der Entfernung $x < a$ vom Auflager A zerschnitten und betrachtet das linke Stück desselben (Fig. 47), so ist der Stützenwiderstand A die einzige äußere auf das Trägerstück wirkende Kraft. Da sich aber der ganze Träger und folglich auch jedes einzelne Stück desselben im Gleichgewichte befinden soll, so muß an der Schnittstelle noch eine Kraft S angebracht werden, welche gleiche Größe, aber entgegengesetzte Richtung wie A hat. Diese Kraft wird Schubkraft oder Querkraft genannt; sie sucht das linke Trägerstück gegen das rechte in lotrechter Richtung zu verschieben, was durch die in dem betreffenden Querschnitt auftretenden inneren Schubspannungen verhindert wird.

Die Schubkraft ändert sich nicht von A bis C.

Wird $x > a$, so kommt im Punkte C die äußere Kraft P hinzu und das Trägerstück (Fig. 48) befindet sich unter Einwirkung der drei Kräfte A, P

Fig. 47.

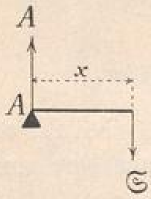
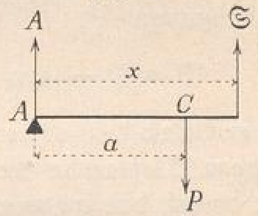


Fig. 48.



und $\mathfrak{S}$ im Gleichgewichte. Es hat deshalb von C bis B die für das linke Trägerstück nach oben gerichtete Schubkraft die Größe:

$$\mathfrak{S} = P - A = B$$

Im Punkte C, also an der Stelle, wo das Moment seinen größten Wert erreicht, ändert die Schubkraft die Richtung, hat also die Größe Null.

Die Schubkräfte lassen sich, ähnlich wie die Momente, durch eine geometrische Figur graphisch darstellen, wie in Fig. 46 angedeutet ist.

Wird $a = b = \frac{l}{2}$, d. h. hängt die Last P in der Mitte des Trägers, so sind die Stützenwiderstände:

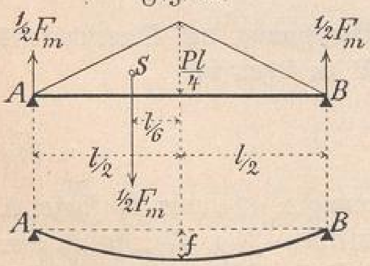
$$A = B = \tfrac{1}{2} P$$

und man erhält statt Gl. 47):

$$\frac{\mathbf{P\,l}}{\mathbf{4}} = \mathbf{k\,W} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 48)$$

Die Berechnung der Durchbiegung f kann auch hier wieder geschehen mit Hilfe der M-Fläche, durch welche man den Träger als belastet auffaßt.

Fig. 49.



Unter der Annahme von $a = b = \frac{1}{2}\,l$ ist der Inhalt der M-Fläche (Fig. 49):

$$F_m = \frac{P\,l}{4} \cdot \frac{l}{2} = \frac{P\,l^2}{8}$$

und das dadurch hervorgerufene Moment in Bezug auf die Trägermitte:

$$\tfrac{1}{2}\,F_m \cdot \frac{l}{2} - \tfrac{1}{2}\,F_m \cdot \frac{l}{6} = \frac{P\,l^3}{32} - \frac{P\,l^3}{96} = \frac{P\,l^3}{48}$$

folglich nach Gl. 34) S. 44:

$$f = \frac{1}{EJ} \frac{P l^3}{48}$$

Setzt man hierin:

$$\frac{P l}{4} = k \frac{J}{e}$$

so folgt:

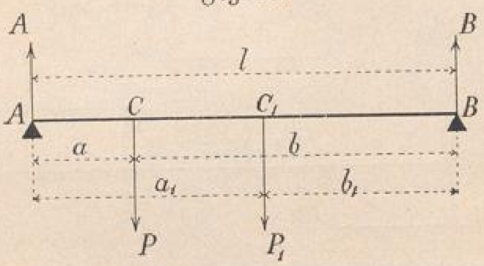
$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}} \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{E}} \frac{\mathbf{l}^2}{\mathbf{e}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 49)$$

Genau in derselben Weise ergibt sich, wenn der Angriffspunkt C der Last P die Trägerlänge l in die unter sich ungleichen Abschnitte a und b teilt (Fig. 46), die Durchbiegung im Punkte C zu:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{E}} \frac{\mathbf{a\,b}}{\mathbf{e}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 50)$$

Für $a = b = \frac{1}{2} l$ entsteht hieraus natürlich wieder die Gl. 49).

Fig. 50.



Wirken zwei Einzellasten P und P_1 auf den Träger und teilen diese die ganze Trägerlänge l in die Abschnitte a und b, bezw. a_1 und b_1 (Fig. 50), so sind die Stützenwiderstände:

$$A = \frac{P b + P_1 b_1}{l} \qquad B = \frac{P a + P_1 a_1}{l}$$

und die Momente an den Laststellen C und C_1:

$$\mathfrak{M} = A a \qquad \mathfrak{M}_1 = B b_1$$

Es ist in jedem einzelnen Falle zu untersuchen, welches dieser Momente das größere ist; das größte Moment ist $= k W$ zu setzen und danach der Träger zu berechnen.

Sind die beiden Lasten einander gleich ($= P$) und greifen dieselben in der gleichen Entfernung a von den Auflagern an, so entsteht der in Fig. 51 dargestellte einfachere Fall.

Die Stützenwiderstände sind hier:

$$A = B = P$$

Das Moment ist in den Auflagerpunkten = Null und wächst von dort ab gleichmäßig bis zu den Laststellen, wo es die Größe annimmt:

$$\mathfrak{M} = P a$$

Zwischen den Laststellen bleibt das Moment unveränderlich, denn für eine Stelle in der Entfernung x vom Auflager ist:

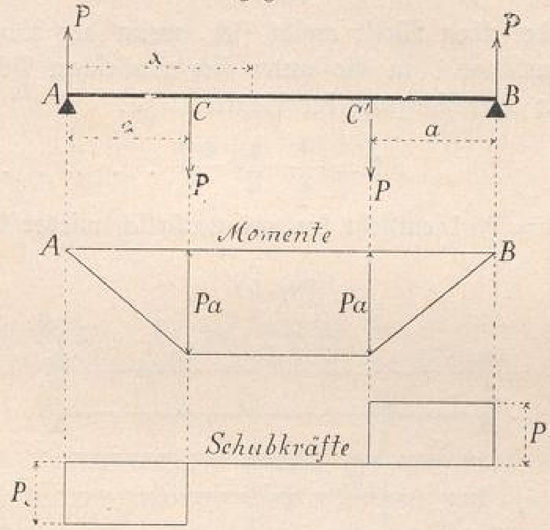
$$\mathfrak{M}_x = P\,x - P\,(x - a) = P\,a$$

$P\,a$ ist also zugleich das größte Moment, daher:

$$P\,a = k\,W$$

Die Schubkraft $\mathfrak{S}$ hat zwischen den Laststellen C und C′ die Größe Null.

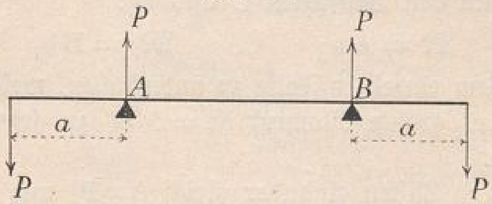
Fig. 51.



Vertauscht man in Fig. 51 die Lasten mit den Stützenwiderständen und denkt sich die ganze Figur herumgedreht, so erhält man den in Fig. 52 dargestellten Belastungsfall.

Die Berechnung dieses Trägers, bei welchem das Moment zwischen den Stützpunkten die unveränderliche Größe $P\,a$ hat, geschieht in derselben Weise

Fig. 52.



wie bei dem Träger Fig. 51. Die Trägerlänge zwischen den Stützpunkten ist in diesem, sowie auch in dem vorigen Falle (Fig. 51) unter der Voraussetzung, daß der Träger selbst als gewichtlos betrachtet werden kann, ganz ohne Einfluß auf die Tragfähigkeit, da in dem größten Momente $P\,a$ die Trägerlänge nicht erscheint.

Wirkt außer den Kräften P, welche an den Enden des über die Stützpunkte um das Stück a hinausragenden Trägers angreifen, innerhalb der Auflager noch eine Kraft P_1 und teilt diese die Stützlänge l in die Abschnitte a_1 und b_1 (Fig. 53), so sind die Stützenwiderstände:

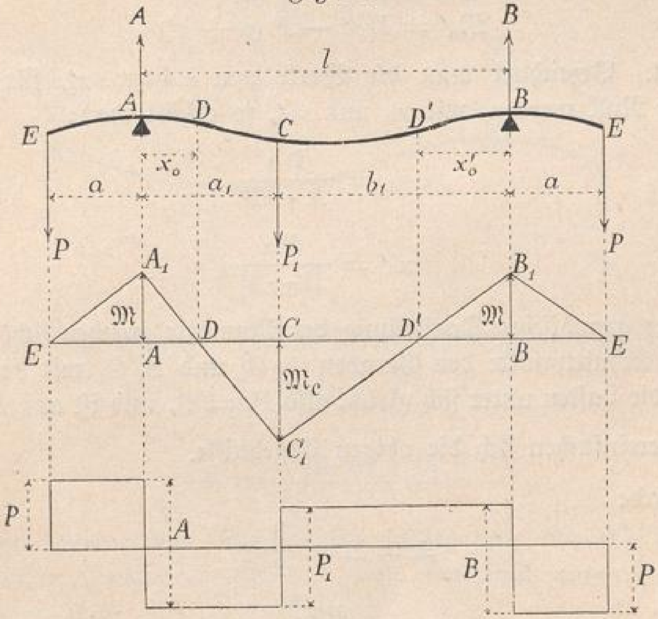
$$A = P + \frac{P_1 b_1}{l}$$

$$B = P + \frac{P_1 a_1}{l}$$

Das Moment bei C hat die Größe:

$$\mathfrak{M}_c = A a_1 - P (a + a_1)$$

Fig. 53.



und wenn für A der obige Wert eingesetzt wird:

$$\mathfrak{M}_c = P_1 \frac{a_1 b_1}{l} - P a$$

Das Moment über den Stützen hat die absolute Größe:

$$\mathfrak{M} = P a$$

Die Tragfähigkeit des Trägers wird voll ausgenutzt, wenn die Momente einander gleich sind.

Setzt man $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c$, so folgt:

$$2 P a = P_1 \frac{a_1 b_1}{l}$$

oder:

$$a = \frac{P_1}{P} \frac{a_1 b_1}{2 l}$$

Danach:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c = \frac{P_1}{2} \frac{a_1 b_1}{l}$$

Das Moment im Lastpunkte C erteilt dem Balken eine Biegung, welche gerade entgegengesetzt der durch die Stützenmomente hervorgebrachten Biegung ist. Während über den Stützen die oberen Fasern des Balkens gezogen werden, sind bei C die oberen Fasern gedrückt. Zwischen den Stützpunkten A und B müssen daher zwei Punkte D und D' liegen, in denen die eine Biegung in die andere übergeht, wo also überhaupt keine Biegung stattfindet, das Biegungsmoment in diesen Punkten daher = Null ist.

Man findet die Lage dieser Punkte, wenn man die Momente in den Abständen x und x' von den Stützpunkten A bezw. B, nämlich:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - P\,(a + x)$$
$$\mathfrak{M}_{x'} = B\,x' - P\,(a + x')$$

= Null setzt. Bezeichnet man die Werte von x bezw. x', für welche diese Momente = Null werden, mit x_0 und x_0', so erhält man:

$$x_0 = \frac{P\,a}{A - P}$$

$$x_0' = \frac{P\,a}{B - P}$$

In der graphischen Darstellung der Momente ergeben sich die Punkte D und D' als Schnittpunkte der Geraden $A_1\,C_1$ und $B_1\,C_1$ mit der E E.

Sind die Lasten unter sich gleich, also $P_1 = P$, und ist außerdem $a_1 = b_1 = \frac{l}{2}$, so vereinfachen sich die obigen Ergebnisse.

Es wird:

$$A = B = \frac{3}{2}\,P$$

$$\mathfrak{M}_c = \frac{P\,l}{4} - P\,a$$

$$\mathfrak{M} = P\,a$$

Sollen die Stützenmomente gleich dem Momente in der Mitte des Trägers sein, so folgt aus:

$$P\,a = \frac{P\,l}{4} - P\,a$$

$$a = \frac{l}{8}$$

Danach wird:

$$\mathfrak{M} = \frac{P\,l}{8}$$

und

$$x_0 = x_0' = \frac{\frac{P\,l}{8}}{\frac{3}{2}\,P - P} = \frac{l}{4}$$

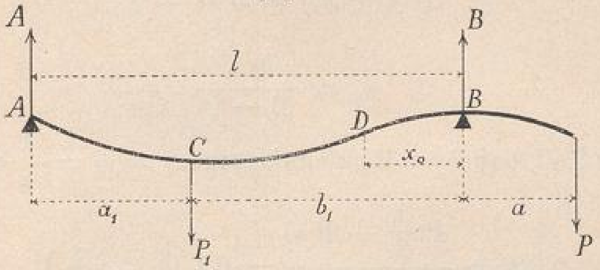
Ist ein auf den Stützen A und B aufgelagerter Träger, welcher über die eine Stütze B um das Stück a hinausragt, am freien Ende durch die Kraft P belastet und hat derselbe außerdem noch eine Last P_1 zu tragen, welche innerhalb der Stützen angreift und die Stützlänge l in die Abschnitte a_1 und b_1 teilt, so ist nach Fig. 54 in Bezug auf den Drehpunkt B:

$$A l - P_1 b_1 + P a = 0$$

in Bezug auf den Drehpunkt A:

$$- B l + P_1 a_1 + P (a + l) = 0$$

Fig. 54.



Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Stützenwiderstände:

$$A = \frac{P_1 b_1 - P a}{l}$$

$$B = \frac{P_1 a_1 + P (a + l)}{l}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, daß für $P a > P_1 b_1$ der Stützenwiderstand A negativ wird, d. h. von oben nach unten wirkt.

Für $P a = P_1 b_1$ wird A = Null.

In beiden Fällen entsteht bei B das Maximalmoment:

$$\mathfrak{M}_b = P a$$

Ist $P a < P_1 b_1$, so wird A positiv. Es entsteht dann im Lastpunkte C ein zweites Maximalmoment von der Größe:

$$\mathfrak{M}_c = A a_1 = \frac{P_1 b_1 - P a}{l} \cdot a_1$$

Welches von diesen beiden Momenten das absolut größte ist, muß für jeden einzelnen Fall untersucht werden. Das größte Moment ist dann = k W zu setzen und der Balken danach zu berechnen.

Die Tragfähigkeit des Balkens wird voll ausgenutzt, wenn die Momente einander gleich sind. Setzt man $\mathfrak{M}_b = \mathfrak{M}_c$, so folgt:

$$P a = \frac{P_1 b_1 - P a}{l} \cdot a_1$$

oder:

$$a = \frac{P_1}{P} \frac{a_1 b_1}{l + a_1}$$

Nach Einsetzung dieses Wertes wird dann:

$$\mathfrak{M}_b = \mathfrak{M}_c = P_1 \frac{a_1 b_1}{l + a_1} \cdot$$

Das Moment $\mathfrak{M}_b$ erteilt dem Balken eine Biegung, welche gerade entgegengesetzt der durch das Moment $\mathfrak{M}_c$ hervorgebrachten Biegung ist. Zwischen den Punkten C und B muß sich daher ein Punkt D befinden, in welchem die eine Biegung in die andere übergeht, das Moment also = Null ist.

Die Entfernung x_0 dieses Punktes von der Stütze B ergibt sich dann aus der Bedingung:

$$P(a + x_0) - B x_0 = 0$$

zu:

$$x_0 = \frac{P a}{B - P}$$

Für den Fall, daß $P_1 = P$ und außerdem $a_1 = b_1 = \frac{l}{2}$ ist, erhält man:

$$A = \frac{P \frac{l}{2} - P a}{l} = P\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{l}\right)$$

$$B = \frac{P \frac{l}{2} + P(a + l)}{l} = P\left(\frac{3}{2} + \frac{a}{l}\right)$$

$$\mathfrak{M}_b = P a$$

$$\mathfrak{M}_c = \frac{P l}{4} - \frac{P a}{2}$$

Sollen die Momente einander gleich werden, so folgt aus:

$$P a = \frac{P l}{4} - \frac{P a}{2}$$

$$a = \frac{l}{6}$$

Danach wird:

$$\mathfrak{M} = \frac{P l}{6}$$

und:

$$x_0 = \frac{P a}{P\left(\frac{3}{2} + \frac{a}{l}\right) - P} = \frac{a}{\frac{1}{2} + \frac{a}{l}} = \frac{3}{2} a = \frac{l}{4}$$

2. Streckenbelastung.

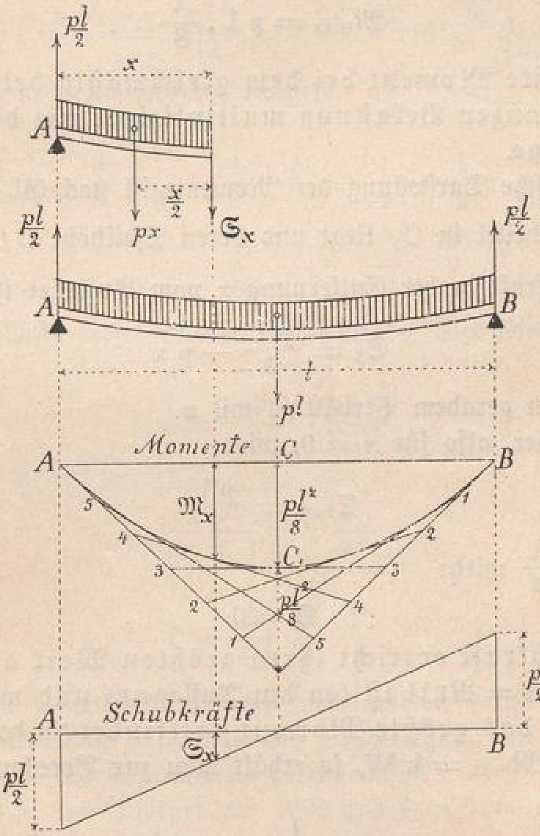
Ist ein an den Endpunkten unterstützter Träger A B von der Länge l (Fig. 55) gleichmäßig belastet und bezeichnet man die Belastung für die Längeneinheit mit p, so ist die Gesamtbelastung = p l. Der Angriffspunkt derselben liegt im Schwerpunkte der Belastungsfläche, also in der Mitte des Trägers.

Die Belastung wird zur Hälfte auf jedes Auflager übertragen, folglich sind die Stützenwiderstände:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \frac{\mathbf{p\,l}}{\mathbf{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 51)$$

Denkt man sich den Träger in der Entfernung x vom Auflager A zerschnitten und betrachtet das linke Stück desselben, so sind der Stützenwiderstand $\frac{p\,l}{2}$ und die Belastung $p\,x$ die auf das Trägerstück wirkenden äußeren Kräfte.

Fig. 55.



Die Belastung $p\,x$ greift im Schwerpunkte der Belastungsfläche, also in der Entfernung $\frac{x}{2}$ von der Schnittstelle an. Stellt man in Bezug auf die Schnittstelle die Momentengleichung auf, so ergibt sich:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p\,l}{2}\,x - p\,x \cdot \frac{x}{2}$$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{x}\,(\mathbf{l} - \mathbf{x}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 52)$$

Für $x = 0$ und $x = l$ wird $\mathfrak{M}_x = 0$, d. h. das Moment an den Stützpunkten ist = Null.

Das größte Moment findet in der Mitte des Trägers statt. Es ist nämlich für $x = \frac{1}{2} l$:

$$x (l - x) = \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^2}{4}$$

Dagegen ergibt sich für $x = \frac{1}{2} l + \lambda$ oder $x = \frac{1}{2} l - \lambda$ der kleinere Wert:

$$x (l - x) = \left(\frac{l}{2} + \lambda\right)\left(\frac{l}{2} - \lambda\right) = \frac{l^2}{4} - \lambda^2$$

Aus Gl. 52) folgt danach für $x = \frac{1}{2} l$:

$$\mathfrak{M}_{max} = \mathbf{p\,l} \cdot \frac{\mathbf{l}}{\mathbf{8}} \quad \text{. . . . .} \quad 53)$$

Das größte Moment bei dem gleichmäßig belasteten Träger ist gleich der ganzen Belastung multipliziert mit dem achten Teil der Trägerlänge.

Die graphische Darstellung der Momente ist nach Gl. 52) eine Parabel $A\,C_1\,B$, deren Scheitel in C_1 liegt und deren Pfeilhöhe $C\,C_1 = p\,l \cdot \frac{l}{8}$ ist.

Die Schubkraft in der Entfernung x vom Auflager ist:

$$\mathfrak{S}_x = \frac{p\,l}{2} - p\,x$$

ändert sich also in geradem Verhältnis mit x.

Im Auflager, also für $x = 0$, wird:

$$\mathfrak{S}_{max} = \frac{p\,l}{2}$$

Für $x = \frac{l}{2}$ wird:

$$\mathfrak{S} = 0$$

Die Schubkraft erreicht ihren größten Wert an den Stellen, wo das Moment = Null ist (an den Auflagern) **und wird = Null an der Stelle, wo das größte Moment stattfindet** (in der Trägermitte)*).

Setzt man $\mathfrak{M}_{max} = k\,W$, so erhält man zur Berechnung des Trägers die Gleichung:

$$\mathbf{p\,l} \cdot \frac{\mathbf{l}}{\mathbf{8}} = \mathbf{k\,W} \quad \text{. . . . .} \quad 54)$$

Aus Gl. 48) S. 60 und aus Gl. 54) erkennt man, daß ein gleichmäßig belasteter Balken doppelt so viel trägt, als wenn dieselbe Belastung $p\,l = P$ als Einzelkraft in der Mitte des Balkens wirkt.

Besteht die gleichmäßige Belastung aus dem Eigengewichte G des Trägers, so erhält man die Gleichung:

$$G \cdot \frac{l}{8} = k\,W$$

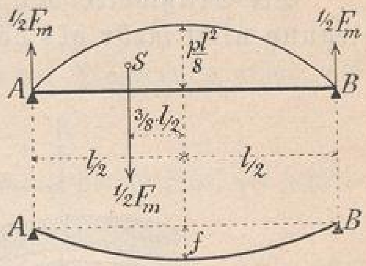
*) Der allgemeine Beweis dieses Satzes für einen beliebig belasteten Träger ist S. 75 gegeben.

welche in der Form:

$$l = \frac{8\,k\,W}{G}$$

zur Bestimmung der Länge l dienen kann, welche ein prismatischer Balken höchstens haben darf, um sein eigenes Gewicht noch mit Sicherheit tragen zu können.

Fig. 56.



Zur Berechnung der Durchbiegung f denke man sich den Träger durch die M-Fläche belastet (Fig. 56). Der Inhalt derselben ist:

$$F_m = {}^2/_3\, l \,.\, \frac{p\,l^2}{8} = \frac{p\,l^3}{12}$$

und das Moment in Bezug auf die Trägermitte:

$$^1/_2\, F_m \,.\, \frac{l}{2} - {}^1/_2\, F_m \,.\, \frac{3}{8} \,.\, \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \,.\, \frac{p\,l^3}{12} \,.\, \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \,.\, \frac{p\,l^3}{12} \,.\, \frac{3}{8} \,.\, \frac{l}{2} =$$

$$\frac{5}{384}\, p\, l^4$$

Nach Einsetzung dieses Wertes ergibt sich die Durchbiegung nach Gl. 34) S. 44 zu:

$$f = \frac{5}{384}\, \frac{p\, l^4}{E\, J}$$

Setzt man hierin:

$$\frac{p\,l^2}{8} = k\, \frac{J}{e}$$

so folgt:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{48}}\, \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{E}}\, \frac{\mathbf{l^2}}{\mathbf{e}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 55)$$

Bei den zu Deckenkonstruktionen verwendeten Trägern hält man gewöhnlich die Bestimmung ein, daß die Durchbiegung bei voller Belastung nicht mehr als $^1/_{600}$ der Spannweite betragen soll.

Setzt man $f = {}^1/_{600}\, l$, ferner $k = 1000$ und $E = 2\,000\,000$ (für Schmiedeeisen) in Gl. 55) ein, so erhält man:

$$\frac{l}{600} = \frac{5}{48}\, \frac{1000}{2\,000\,000}\, \frac{l^2}{0{,}5\, h}$$

woraus folgt:

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}\, \mathbf{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 56)$$

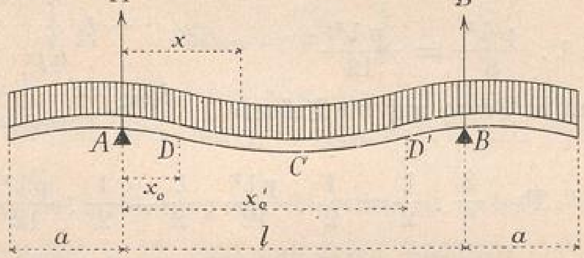
Diese theoretisch erforderliche Trägerhöhe hält man praktisch häufig nicht ein. Da nämlich in Wirklichkeit die Deckenträger an den Enden immer eingemauert sind und infolgedessen wenigstens als teilweise eingespannte Träger (vergl. 4, § 10) betrachtet werden können, bei denen die Durchbiegung unter denselben Umständen wesentlich geringer ist, als bei den frei auf zwei Endstützen ruhenden Trägern, so genügt es zu setzen:

$$h = \frac{1}{25} l \qquad 57)$$

Man stellt danach praktisch die Forderung:

Die Stützweite der Träger soll mit Rücksicht auf die Durchbiegung nicht mehr als das 25fache der Trägerhöhe betragen.

Fig. 57.



Ragt ein auf zwei Stützen ruhender, gleichmäßig mit p für die Längeneinheit belasteter Träger um ein Stück a über die Stützpunkte hinaus (Fig. 57) und bezeichnet man die Stützweite wieder mit l, so sind die Stützenwiderstände:

$$A = B = p\left(\frac{l}{2} + a\right)$$

Das Moment in der Entfernung x vom Auflager ist:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - \frac{p\,(a + x)^2}{2}$$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p}{2}\,x\,(l - x) - \frac{p\,a^2}{2}$$

Die größten Momente finden über den Stützen und in der Mitte des Trägers statt.

Für $x = 0$ und $x = l$ werden die Stützenmomente

$$\mathfrak{M} = -\frac{p\,a^2}{2}$$

Für $x = \frac{l}{2}$ wird das Moment in der Trägermitte:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{p\,l^2}{8} - \frac{p\,a^2}{2}$$

Um diejenige Größe von a zu ermitteln, bei welcher alle drei Momente einander gleich werden, der Balken also die größte Tragfähigkeit besitzt, hat man den absoluten Wert von $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c$ zu setzen:

$$\frac{p\,a^2}{2} = \frac{p\,l^2}{8} - \frac{p\,a^2}{2}$$

Daraus folgt:

$$a = \frac{l}{\sqrt{8}}$$

Nach Einsetzung dieses Wertes ergibt sich dann für die Momente die Größe:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c = p\,l \cdot \frac{l}{16}$$

Ist $a < \frac{l}{\sqrt{8}}$, so wird das Moment in der Trägermitte größer als die Stützenmomente.

Ist $a > \frac{l}{\sqrt{8}}$, so werden die Stützenmomente am größten, die gefährlichen Querschnitte des Trägers liegen dann über den Stützen.

Der Balken erhält durch die Stützenmomente eine Biegung, bei welcher die erhabene Seite nach oben gerichtet ist, durch das Moment in der Mitte aber eine entgegengesetzte Biegung. Man erhält die Lage der zwischen den Stützen liegenden Punkte D und D′, in denen eine Krümmung in die andere übergeht, indem man $\mathfrak{M}_x$ = Null setzt.

$$\frac{p}{2}\,x\,(l - x) - \frac{p\,a^2}{2} = 0$$

$$x^2 - l\,x = -a^2$$

Bezeichnet man die Wurzeln dieser Gleichung mit x_0 und x_0', so ergibt sich:

$$x_0 = \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - a^2}$$

$$x_0' = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - a^2}$$

Für den besonderen Fall, daß $a = \frac{l}{\sqrt{8}}$ angenommen wird, erhält man:

$$x_0 = \frac{l}{2} - \frac{l}{\sqrt{8}} = \frac{l}{2} - a$$

$$x_0' = \frac{l}{2} + \frac{l}{\sqrt{8}} = \frac{l}{2} + a$$

Wird nicht die Stützweite, sondern die ganze Trägerlänge mit l bezeichnet (Fig. 58), so sind die Stützenwiderstände:

$$A = B = \frac{p\,l}{2}$$

Das Moment für die Trägermitte C ist:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{p\,l}{2}\left(\frac{l}{2} - a\right) - \frac{p\,l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{p\,l}{2}\left(\frac{l}{4} - a\right)$$

Die Stützenmomente haben den absoluten Wert:

$$\mathfrak{M} = \frac{p\,a^2}{2}$$

Der Balken besitzt die größte Tragfähigkeit, wenn $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c$ wird.

Aus:

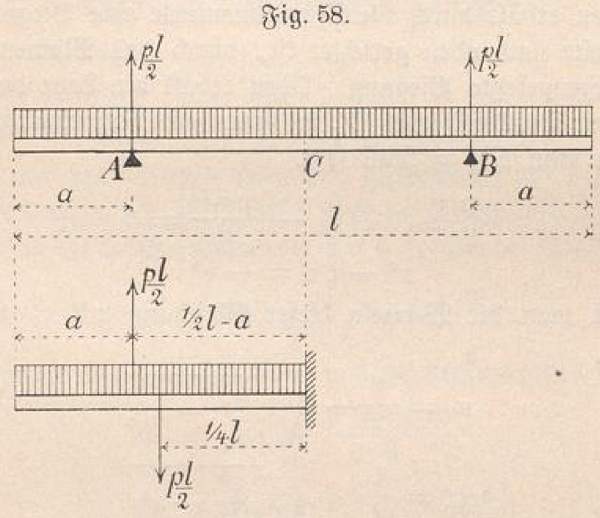
$$\frac{p\,a^2}{2} = \frac{p\,l}{2}\left(\frac{l}{4} - a\right)$$

folgt dann:

$$a^2 + l\,a = \frac{l^2}{4}$$

$$a = \frac{l}{2}(\sqrt{2} - 1) = 0{,}2071\,.\,l$$

Fig. 58.



Nach Einsetzung dieses Wertes ergibt sich dann für die Momente die Größe:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c = \frac{p\,l^2}{8}(3 - 2\sqrt{2}) = 0{,}02145\,p\,l^2$$

Für eine Stelle in der Entfernung x vom Balkenende ist:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p\,l}{2}(x - a) - \frac{p\,x^2}{2}$$

Setzt man $\mathfrak{M}_x = 0$, so folgt:

$$x^2 - l\,x = -\,l\,a$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$x_0 = \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - l\,a}$$

$$x_0' = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - l\,a}$$

und für den speziellen Fall, daß $a = \frac{l}{2}(\sqrt{2} - 1)$ ist:

$$x_0 = \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

$$x_0' = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{l}{2} + \frac{l}{2}\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

Der Ausdruck $a = \frac{l}{2}(\sqrt{2} - 1)$ läßt sich noch auf eine andere Form bringen. Es ist nämlich:

$$a^2 = \frac{l^2}{4}(2 - 2\sqrt{2} + 1) = \frac{l^2}{4}(3 - 2\sqrt{2})$$

folglich:

$$a = \frac{l}{2}\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

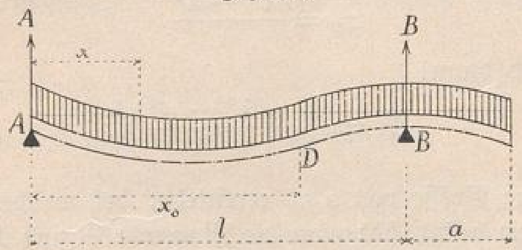
Danach ergeben sich die Abstände der Stellen, wo das Moment = Null ist, von den Balkenenden zu:

$$x_0 = \frac{l}{2} - a$$

$$x_0' = \frac{l}{2} + a$$

Ragt ein auf zwei Stützen ruhender, gleichmäßig mit p für die Längeneinheit belasteter Träger von der Stützweite l um ein Stück a über den einen

Fig. 59.



Stützpunkt hinaus (Fig. 59), und stellt man die Gleichungen der statischen Momente auf, so ist in Bezug auf den Drehpunkt B:

$$A\,l - \frac{p\,l^2}{2} + \frac{p\,a^2}{2} = 0$$

und in Bezug auf den Drehpunkt A:

$$-B\,l + \frac{p\,l^2}{2} + p\,a\left(l + \frac{a}{2}\right) = 0$$

Daraus ergeben sich die Stützenwiderstände:

$$A = \frac{p}{2\,l}\,(l^2 - a^2)$$

$$B = \frac{p}{2\,l}\,(l + a)^2$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, daß für $a > l$ der Stützenwiderstand A negativ wird. Für $a = l$ wird $A =$ Null.

In beiden Fällen entsteht bei B das Maximalmoment:

$$\mathfrak{M}_B = \frac{p\,a^2}{2}$$

Ist $a < l$, so wird A positiv. Es entsteht dann zwischen den Stützpunkten A und B ein zweites Maximalmoment von der Größe:

$$\mathfrak{M} = \frac{p\,x_0^2}{8}$$

wobei x_0 die Entfernung des Punktes D (d. i. desjenigen Punktes, in welchem das Moment = Null wird) von dem Stützpunkt A bedeutet.

Das Moment in der Entfernung x vom Auflager A ist:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - \frac{p\,x^2}{2}$$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p}{2\,l}\,(l^2 - a^2)\,x - \frac{p\,x^2}{2}$$

Dieses Moment wird = Null am Auflager A, d. h. für $x = 0$ und außerdem für:

$$x_0 = \frac{l^2 - a^2}{l}$$

Danach wird dann:

$$\mathfrak{M} = \frac{p}{8}\left(\frac{l^2 - a^2}{l}\right)^2$$

Um diejenige Größe von a zu ermitteln, bei welcher der Balken die größte Tragfähigkeit besitzt, hat man die Momente $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_B$ einander gleich zu setzen.

$$\frac{p}{8}\left(\frac{l^2 - a^2}{l}\right)^2 = \frac{p\,a^2}{2}$$

Daraus folgt:

$$a = l\,(\sqrt{2} - 1) = 0{,}4142\,.\,l$$

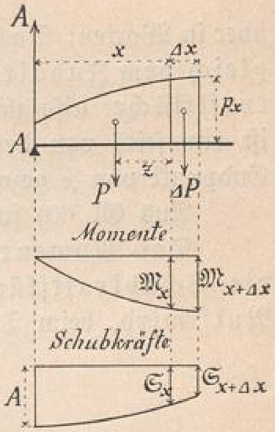
Nach Einsetzung dieses Wertes ergibt sich:

$$x_0 = 0{,}8284\,.\,l = 2\,a$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_B = 0{,}0858\,p\,l^2$$

Ist die Belastung eines Trägers unsymmetrisch, so läßt sich die Lage des gefährlichen Querschnittes am einfachsten dadurch bestimmen, daß man die Stelle aufsucht, wo die Schubkraft = Null ist. An derselben Stelle erreicht das Moment seinen größten Wert.

Fig. 60.



Ein einfacher Beweis dieses Satzes, welcher für den besonderen Fall des gleichmäßig auf seine ganze Länge belasteten Trägers schon S. 68 angeführt war, ist folgendermaßen:

Bei dem beliebig belasteten Träger (Fig. 60) hat für eine Stelle in der Entfernung x vom Auflager A die Schubkraft die Größe:

$$\mathfrak{S}_x = A - P$$

Wächst x um das sehr kleine Stück Δ x an, so entsteht:

$$\mathfrak{S}_{x + \Delta x} = A - (P + \Delta P)$$

Danach beträgt die Aenderung der Schubkraft, während x um Δ x anwächst:

$$\Delta \mathfrak{S}_x = \mathfrak{S}_{x + \Delta x} - \mathfrak{S}_x = - \Delta P = - p_x \cdot \Delta x \quad . \quad . \quad . \quad 58)$$

Für die Momente an den Stellen in den Entfernungen x und x + Δ x von A erhält man die Ausdrücke:

$$\mathfrak{M}_x = A\, x - P\, z$$

$$\mathfrak{M}_{x + \Delta x} = A\,(x + \Delta x) - P\,(z + \Delta x) - \Delta P \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

oder da das letzte Glied $\Delta P \cdot \frac{\Delta x}{2}$ wegen Kleinheit vernachlässigt werden kann:

$$\mathfrak{M}_{x + \Delta x} = A\,(x + \Delta x) - P\,(z + \Delta x)$$

Die Zunahme des Moments beträgt danach:

$$\Delta \mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_{x + \Delta x} - \mathfrak{M}_x = A\, \Delta x - P\, \Delta x = (A - P)\, \Delta x$$

und wenn für (A — P) der obige Wert $\mathfrak{S}_x$ eingesetzt wird:

$$\Delta \mathfrak{M}_x = \mathfrak{S}_x \cdot \Delta x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 59)$$

d. h. die Zunahme des Moments von einer Stelle in der Entfernung x bis zu der nächstfolgenden Stelle in der Entfernung x + Δ x vom Auflagerpunkte A ist gleich dem Flächeninhalt des lotrecht darunter liegenden Streifens der Schubkraftfläche.

Aus Gl. 59) folgt bei der zeichnerischen Darstellung der Momente:

Wird $\mathfrak{S}_x$ = Null, so wird auch $\Delta \mathfrak{M}_x$ = Null, d. h. das Moment $\mathfrak{M}$ erreicht seinen größten Wert an der Stelle, wo die Schubkraft $\mathfrak{S}$ = Null ist (oder bei einer Einzellast von + in — übergeht).

Durch Summierung vom Auflagerpunkte A ab, also von $x =$ Null ab gerechnet, entsteht aus Gl. 59)

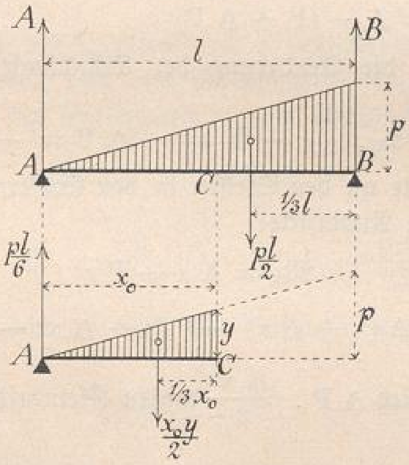
$$\mathfrak{M}_x = \Sigma\,(\mathfrak{S}_x \,.\, \Delta\, x) = [\mathfrak{S}\text{-Fläche}]_0^x \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 60)$$

oder in Worten: Das Moment in der Entfernung x vom Auflager ist gleich dem Inhalt der lotrecht unter der Strecke x liegenden Schubkraftfläche: also gleich demjenigen Teil der Schubkraftfläche, welcher begrenzt ist einerseits von der Auflager-Lotrechten, andererseits von der durch den Endpunkt von x gezogenen Lotrechten.

Aus Gl. 60) folgt:

Das Moment $\mathfrak{M}$ wird = Null bei dem Querschnitt, für welchen die Schubkraftfläche (bestehend aus positiven und negativen Teilen) = Null wird, beim Träger auf zwei Endstützen also an den Auflagern.

Fig. 61.



Die Belastungsfläche des Trägers A B (Fig. 61) bilde ein Dreieck mit der Höhe p bei dem Auflager B. Es ist dann:

$$A = \left(\frac{p\,l}{2} \,.\, \frac{l}{3}\right) : l = \frac{p\,l}{6}$$

Wird die Entfernung der Stelle, wo die Schubkraft = Null ist, vom Auflager A mit x_0 und die Belastungshöhe an dieser Stelle mit y bezeichnet, so erhält man zunächst:

$$y = \frac{p\,x_0}{l}$$

und danach die Belastung des Stückes A C:

$$\frac{x_0\,y}{2} = \frac{p\,x_0^{\,2}}{2\,l}$$

Aus der Bedingung: $\frac{x_0\, y}{2} = A$ oder:

$$\frac{p\, x_0^{\,2}}{2\, l} = \frac{p\, l}{6}$$

folgt dann:

$$x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

Das an dieser Stelle entstehende größte Moment ergibt sich zu:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\, l}{6}\, x_0 - \frac{p\, x_0^{\,2}}{2\, l} \cdot \frac{x_0}{3}$$

und wenn für x_0 der obige Wert eingesetzt wird:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\, l^2}{9\sqrt{3}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 61)$$

Fig. 62.

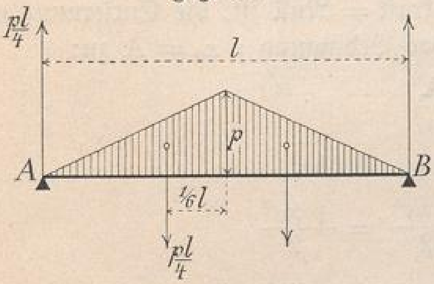
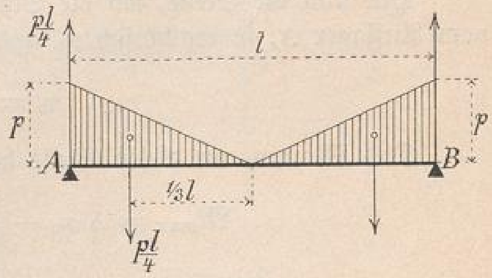


Fig. 63.



Für den symmetrischen Belastungsfall (Fig. 62) (Belastungshöhe in der Trägermitte = p, an den Auflagern = Null) ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\, l}{4}\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{6}\right) = \frac{p\, l^2}{12} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 62)$$

Ist umgekehrt die Belastungshöhe an den Auflagern = p und in der Trägermitte = Null (Fig. 63), so wird:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\, l}{4}\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3}\right) = \frac{p\, l^2}{24} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 63)$$

Die Addition der Gleichungen 62) und 63) ergibt wieder das Maximalmoment des gleichmäßig mit p auf die ganze Länge l belasteten Trägers (vergl. Gl. 53) S. 68) zu:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\, l^2}{8}$$

Der Träger A B (Fig. 64) sei von A bis C gleichmäßig mit p für die Längeneinheit belastet. Man erhält die Stützenwiderstände A und B, indem man sich die gleichmäßig verteilte Belastung im Schwerpunkte der Belastungsfläche vereinigt denkt, aus den Momentengleichungen:

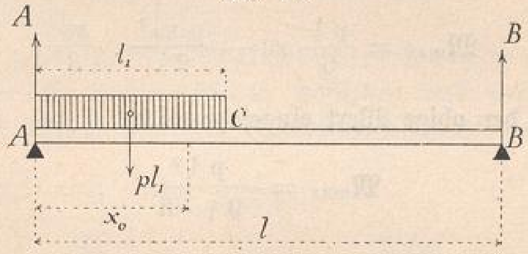
$$A\,l - p\,l_1\,(l - {}^1/_2\,l_1) = 0$$

$$B\,l - p\,l_1 \,.\, {}^1/_2\,l_1 = 0$$

zu:

$$A = \frac{p\,l_1\,(l - {}^1/_2\,l_1)}{l} \qquad B = \frac{p\,l_1^2}{2\,l}$$

Fig. 64.



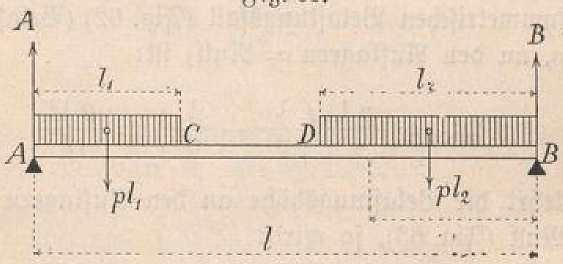
Hat nun die Stelle, wo die Schubkraft = Null ist, die Entfernung x_0 vom Auflager A, so ergibt sich x_0 aus der Bedingung $p\,x_0 = A$ zu:

$$x_0 = \frac{A}{p}$$

Das Moment an dieser Stelle hat die Größe:

$$\mathfrak{M}_{max} = A\,x_0 - \frac{p\,x_0^2}{2} = \frac{p\,x_0^2}{2}$$

Fig. 65.



Für den Belastungsfall (Fig. 65), bei welchem man sich die gleichmäßig verteilten Belastungen wieder in den Schwerpunkten der Belastungsflächen vereinigt zu denken hat, erhält man:

$$A = \frac{p\,l_1\,(l - {}^1/_2\,l_1) + p\,l_2 \,.\, {}^1/_2\,l_2}{l}$$

$$B = \frac{p\,l_1 \,.\, {}^1/_2\,l_1 + p\,l_2\,(l - {}^1/_2\,l_2)}{l}$$

Ist $l_2 > l_1$, so ergibt sich die Größe x_0, das ist die Entfernung der Stelle, wo die Schubkraft = Null ist, wo also zugleich das Biegungsmoment seinen größten Wert erreicht, vom Auflager B aus der Bedingung $p\,x_0 = B$ zu:

$$x_0 = \frac{B}{p}$$

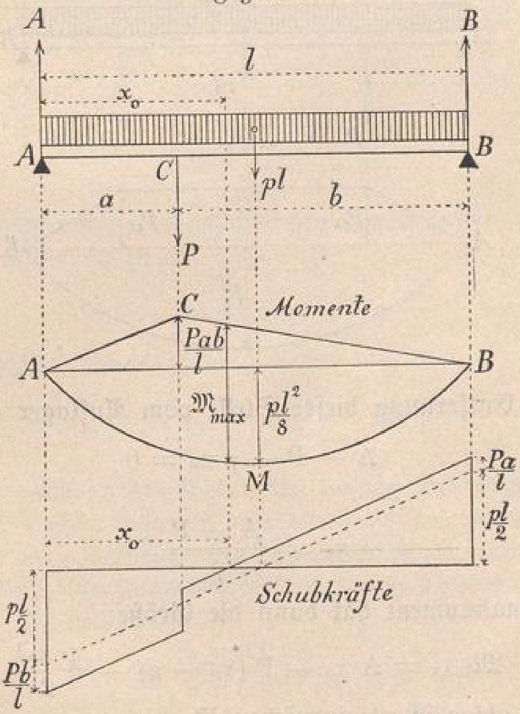
folglich wird:

$$\mathfrak{M}_{max} = B\,x_0 - \frac{p\,x_0^2}{2} = \frac{p\,x_0^2}{2}$$

3. Zusammengesetzte Belastung.

Wirkt auf einen an den Enden unterstützten, gleichmäßig durch p für die Längeneinheit belasteten Balken noch eine Einzelkraft P (Fig. 66), so setzt sich das Moment für eine beliebige Stelle des Balkens zusammen aus zwei Teilen,

Fig. 66.



nämlich aus einem Beitrage, herrührend von der gleichmäßig über die Länge verteilten Belastung und aus dem Beitrage, den die Einzelkraft P liefert. Diese Beiträge sind einzeln für sich zu berechnen und zu addieren.

Die Stützenwiderstände sind:

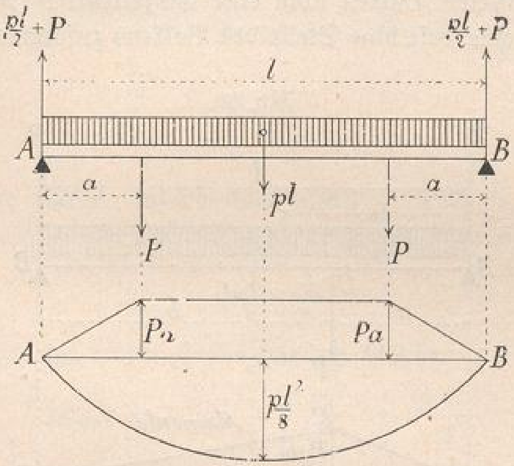
$$A = \frac{p\,l}{2} + \frac{P\,b}{l}$$

$$B = \frac{p\,l}{2} + \frac{P\,a}{l}$$

Das größte Moment findet entweder im Lastpunkt C statt oder es liegt zwischen der Trägermitte und dem Lastpunkte C und kann dann abgegriffen werden aus der graphischen Darstellung der Momente, welche sich zusammensetzt aus dem Dreiecke A B C mit der Höhe $P \frac{a\,b}{l}$ als Beitrag der Einzellast P, und aus der Parabel A M B mit der Pfeilhöhe $\frac{p\,l^2}{8}$ als Beitrag der gleichmäßigen Belastung.

Genauer erhält man die Lage des gefährlichen Querschnitts, indem man die Stelle aufsucht, wo die Schubkraft = Null ist.

Fig. 67.



Ist x_0 die Entfernung dieser Stelle vom Auflager A, so ist:

$$A - P - p\,x_0 = 0$$

also:

$$x_0 = \frac{A - P}{p}$$

Das Maximalmoment hat dann die Größe:

$$\mathfrak{M}_{max} = A\,x_0 - P\,(x_0 - a) - \frac{p\,x_0^{\,2}}{2}$$

worin für x_0 der obige Wert einzusetzen ist.

Für den Fall daß:

$$a = b = \frac{l}{2}$$

ist, liegt das Maximalmoment in der Mitte des Trägers und hat die Größe:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{P\,l}{4} + p\,l \cdot \frac{l}{8}$$

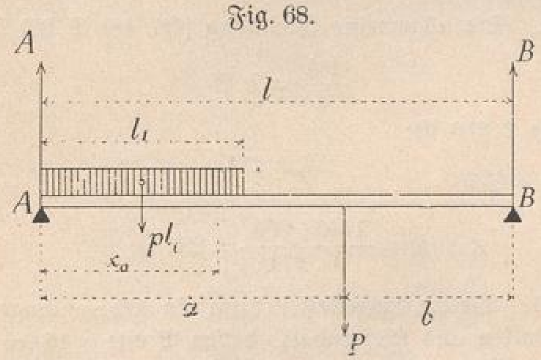
Für den symmetrischen Belastungsfall Fig. 67 liegt der gefährliche Querschnitt ebenfalls in der Trägermitte und der Träger ist zu berechnen aus der Gleichung:

$$\mathrm{P\,a} + \mathrm{p\,l} \cdot \frac{\mathrm{l}}{8} = \mathrm{k\,W}$$

Erstreckt sich die gleichmäßig verteilte Belastung nur über einen Teil l_1 des Trägers und wirkt außerdem die Einzellast P auf denselben, so ist nach Fig. 68:

$$A = \frac{\mathrm{P\,b}}{\mathrm{l}} + \mathrm{p}\,l_1 \frac{(l - {}^1/_2\, l_1)}{l}$$

Fig. 68.



Wird die Entfernung des gefährlichen Querschnittes vom Auflager A wieder mit x_0 bezeichnet, so ist:

$$A - p\,x_0 = 0 \text{ oder } x_0 = \frac{A}{p}$$

und danach das größte Moment:

$$\mathfrak{M}_{max} = A\,x_0 - \frac{p\,x_0^{\,2}}{2} = \frac{p\,x_0^{\,2}}{2}$$

Aufgabe 29. Ein an den Enden frei aufliegender Balken aus Eichenholz von 420 cm Länge ist 150 cm vom Auflager durch ein Gewicht von 900 kg belastet. Welchen Querschnitt muß derselbe erhalten, wenn sich die Breite zur Höhe wie 5 : 7 verhalten soll und eine Inanspruchnahme k = 80 kg/qcm gestattet ist?

Auflösung. Da hier:

$$a = 150 \text{ cm}$$

$$b = 420 - 150 = 270 \text{ cm}$$

in Gl. 47) S. 59 einzusetzen ist, so ist das größte Moment:

$$\mathfrak{M}_{max} = 900 \cdot \frac{150 \cdot 270}{420} = 86\,786$$

und das erforderliche Widerstandsmoment:

$$W = \frac{86\,786}{80} = 1085$$

Da nun für $b = {}^5/_7\, h$

$$W = \frac{{}^5/_7\, h \cdot h^2}{6} = \frac{5}{42} \cdot h^3$$

ist, so erhält man:

$$\frac{5}{42} h^3 = 1085$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{42}{5} \cdot 1085} = \sim 21 \text{ cm}$$

$$b = \frac{5}{7} h = 15 \text{ cm}$$

Aufgabe 30. Ein mit den Enden frei aufliegender I-Träger Nr. 20 von 600 cm Länge ist in der Mitte durch ein Gewicht von 1400 kg belastet: wie groß ist die Inanspruchnahme k?

Auflösung. Die allgemeine Gleichung (Gl. 48) S. 60) lautet:

$$\frac{P\,l}{4} = k\,W$$

Nach Tabelle 2 § 6 ist:

$$W = 214$$

daher:

$$k = \frac{1400 \cdot 600}{4 \cdot 214} = 981 \text{ kg}$$

Aufgabe 31. Welche Einzellast P kann ein 400 cm langer, mit den Enden frei aufliegender Balken aus Kiefernholz, dessen Breite = 18 cm und dessen Höhe = 24 cm ist, in der Mitte tragen (k = 60 kg vorausgesetzt) und wie groß ist die Durchbiegung f?

Auflösung. Da nach Tabelle 15 § 6 S. 40:

$$W = 1728$$

ist, so wird nach Gl. 48) S. 60:

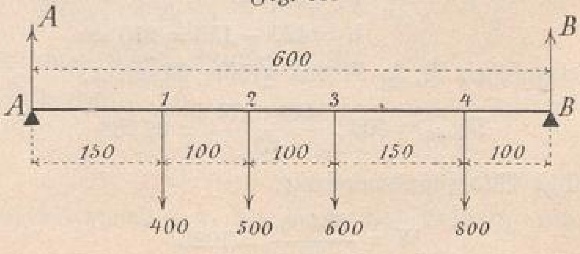
$$P = \frac{4\,k\,W}{l} = \frac{4 \cdot 60 \cdot 1728}{400} = 1037 \text{ kg}$$

und nach Gl. 49) S. 61:

$$f = \frac{1}{12} \frac{60}{120000} \cdot \frac{400^2}{12} = 0{,}56 \text{ cm}$$

Aufgabe 32. Ein I-Träger von 600 cm Länge ist nach Fig. 69 belastet. Es soll das Profil des Trägers ohne Berücksichtigung des Eigengewichts berechnet werden (k = 1000 kg).

Fig. 69.



Auflösung. Der Stützenwiderstand A hat die Größe:

$$A = \frac{400 \cdot 450 + 500 \cdot 350 + 600 \cdot 250 + 800 \cdot 100}{600} = 975$$

Die Gesamtbelastung beträgt:

$$400 + 500 + 600 + 800 = 2300 \text{ kg}$$

folglich ist:

$$B = 2300 - 975 = 1325 \text{ kg}$$

Für die Momente in den Lastpunkten 1, 2, 3, 4 ergeben sich die Größen:

$$\mathfrak{M}_1 = 975 \,.\, 150 = 146250$$
$$\mathfrak{M}_2 = 975 \,.\, 250 - 400 \,.\, 100 = 203750$$
$$\mathfrak{M}_3 = 1325 \,.\, 250 - 800 \,.\, 150 = 211250$$
$$\mathfrak{M}_4 = 1325 \,.\, 100 = 132500$$

Das Moment $\mathfrak{M}_3$ ist das größte, daher das erforderliche Widerstandsmoment:

$$W = \frac{211250}{1000} = 211$$

Es genügt Profil Nr. 20 mit $W = 214$.

Aufgabe 33. Es soll ein nach Fig. 53 S. 63 belasteter I-Träger berechnet werden unter Annahme folgender Größen:

$$P = 800 \text{ kg} \qquad a = 120 \text{ cm}$$
$$P_1 = 1200 \text{ kg} \qquad a_1 = 200 \text{ cm}$$
$$b_1 = 300 \text{ cm}$$
$$l = a_1 + b_1 = 500 \text{ cm}$$

Auflösung. Die Stützenwiderstände sind:

$$A = 800 + \frac{1200 \,.\, 300}{500} = 1520$$

$$B = 800 + \frac{1200 \,.\, 200}{500} = 1280$$

Das Moment über den Stützen hat die Größe:

$$\mathfrak{M} = P\,a = 800 \,.\, 120 = 96000$$

Das Moment im Lastpunkte C ist:

$$\mathfrak{M}_c = P_1 \frac{a_1\, b_1}{l} - P\,a$$

$$\mathfrak{M}_c = 1200 \,.\, \frac{200 \,.\, 300}{500} - 96000 = 48000$$

Der gefährliche Querschnitt liegt also über den Stützen und das erforderliche Widerstandsmoment ist:

$$W = \frac{96000}{1000} = 96$$

Gewählt Profil Nr. 15 mit $W = 97{,}9$.

Aufgabe 34. Es soll unter Beibehaltung aller anderen Größen in Aufg. 33 die Länge a so gewählt werden, daß die Momente einander gleich sind.

Auflösung. Nach S. 63 (unten) ist:

$$a = \frac{P_1}{P}\,\frac{a_1\, b_1}{2\,l} = \frac{1200}{800} \,.\, \frac{200 \,.\, 300}{2 \,.\, 500} = 90 \text{ cm}$$

Danach wird:

$$\mathfrak{M} = \frac{P_1}{2} \cdot \frac{a_1 b_1}{l} = \frac{1200}{2} \cdot \frac{200 \cdot 300}{500} = 72000$$

$$W = \frac{72000}{1000} = 72$$

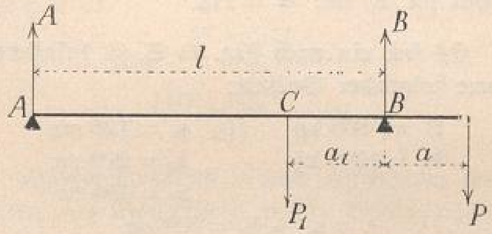
Gewählt Profil Nr. 14 mit $W = 81,7$.

Aufgabe 35. Ein Balken aus Eichenholz sei nach Fig. 70 belastet und es sei:

$$P = 800 \text{ kg} \qquad a = 96 \text{ cm}$$
$$P_1 = 3000 \text{ kg} \qquad a_1 = 100 \text{ cm}$$
$$l = 360 \text{ cm}$$

Wie stark muß der Balken genommen werden bei $k = 80$ kg?

Fig. 70.



Auflösung. In Bezug auf den Drehpunkt B ist:

$$A\, l = P_1\, a_1 - P\, a$$

folglich:

$$A = \frac{P_1 a_1 - P a}{l} = \frac{3000 \cdot 100 - 800 \cdot 96}{390} = 620 \text{ kg}$$

Das Moment im Punkte C ist danach:

$$\mathfrak{M}_c = 620\,(360 - 100) = 161200$$

Das Moment über der Stütze B hat die Größe:

$$\mathfrak{M} = P\, a = 800 \cdot 96 = 76800$$

Der Balken ist daher nach $\mathfrak{M}_c$ zu berechnen und erfordert das Widerstandsmoment:

$$W = \frac{161200}{80} = 2015$$

Nach Tabelle 15 § 6 S. 40 genügt $b = 18$ cm, $h = 26$ cm.

Aufgabe 36. Eine $1^1/_2$ Stein (0,38 m) starke, 4 m breite und 12,5 m hohe Mauer soll durch zwei I-Eisen unterstützt werden. Welches Profil ist zu nehmen?

Auflösung. Der Rauminhalt der Mauer beträgt:

$$0,38 \cdot 4 \cdot 12,5 = 19 \text{ cbm}$$

Rechnet man das Kubikmeter Mauerwerk zu 1600 kg, so ist das Gewicht der ganzen Mauer:

$$1600 \cdot 19 = 30400 \text{ kg}$$

Die Gesamtbelastung eines Trägers beträgt daher:

$$p\, l = \frac{30400}{2} = 15200 \text{ kg}$$

Danach ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = 15200 \frac{400}{8} = 760000$$

$$W = \frac{760000}{1000} = 760$$

Gewählt Profil Nr. 32 mit W = 781.

Der Auflagerdruck eines Trägers hat die Größe:

$$A = \frac{p\,l}{2} = 7600 \text{ kg}$$

Legt man den Träger auf gewöhnliches Ziegelmauerwerk und nimmt an, daß sich der Druck gleichförmig auf die Unterstützungsmauer verteilt (was streng genommen nicht ganz zutreffend ist), rechnet man dabei als zulässige Inanspruchnahme k = 7 kg, so ergibt sich die erforderliche Auflagerfläche zu:

$$F = \frac{7600}{7} = 1086 \text{ qcm}$$

Setzt man:

$$F = a\,b$$

wo a die Auflagerlänge und b die Breite des Trägers bedeutet, so wird, da nach Tabelle 2 § 6:

$$b = 13{,}1 \text{ cm}$$

beträgt, die Auflagerlänge:

$$a = \frac{1086}{13{,}1} = \backsim 83 \text{ cm}$$

Bei Holzbalken ist es Regel und im allgemeinen auch genügend, die Auflagerlänge gleich der Balkenhöhe zu nehmen. Bei Eisenträgern ist dies, wie schon aus obigem Beispiel hervorgeht, in vielen Fällen ganz ungenügend. Man sollte die I-Träger durch Werksteine unterstützen oder besser noch auf eisernen Unterstützungsplatten lagern, um den Druck auf eine größere Fläche der Mauer zu verteilen. Besonders gilt dies für kurze gleichmäßig belastete Träger.

Bei Anwendung von eisernen Trägern achte man auf die Auflager!

Aufgabe 37. Bei einem Dache mit Wellblecheindeckung sei die wagerechte Entfernung der Pfetten = 2,5 m; als gesamte Dachbelastung (Eigengewicht, Schnee und Wind) soll 180 kg für das Quadratmeter der Grundrißfläche angenommen werden. Welches Wellblech ist zu wählen?

Auflösung. Die Belastung des Wellbleches für 1 m Breite beträgt:

$$p\,l = 180 \,.\, 2{,}5 = 450 \text{ kg}$$

folglich ist das größte Moment:

$$\mathfrak{M}_{max} = p\,l \,.\, \frac{l}{8} = 450 \,.\, \frac{250}{8} = 14063$$

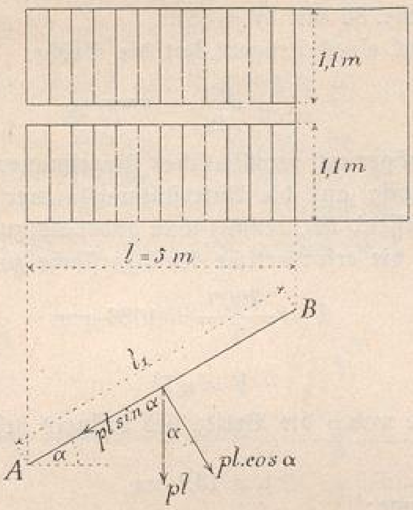
und das Widerstandsmoment (bei k = 500 kg):

$$W = \frac{14063}{500} = \backsim 28$$

Wählt man die Wellenhöhe gleich der halben Wellenbreite, und die Dicke $\delta = 0{,}1$ cm, so genügt nach Tabelle 11 § 6 S. 36 eine Wellenhöhe von 8 cm, eine Wellenbreite von 16 cm.

Aufgabe 38. Für einen Treppenarm (Fig. 71), bei welchem als Belastung 450 kg für 1 qm der Grundrißfläche angenommen wird, soll die äußere Wange, bestehend aus einem ⊏-Eisen, berechnet werden (k = 750).

Fig. 71.



Auflösung. Die Gesamtbelastung des Treppenarmes beträgt:

$$1{,}1 \,.\, 5 \,.\, 450 = 2475 \text{ kg}$$

Davon kommt auf die Wange die Hälfte:

$$p\,l = 1238 \text{ kg}$$

Durch Zerlegung von $p\,l$ erhält man die rechtwinklig zum Träger A B wirkende Seitenkraft $p\,l \cos \alpha$, welche das größte Moment erzeugt:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\,l \cos \alpha \,.\, l_1}{8} = \frac{p\,l \cos \alpha}{8} \, \frac{l}{\cos \alpha}$$

$$\mathfrak{M}_{max} = p\,l \,.\, \frac{l}{8}$$

Hieraus geht hervor, daß die Neigung des Trägers auf die Größe des Moments ganz ohne Einfluß ist, und daß die Wange von der Grundrißlänge l genau so zu berechnen ist, wie ein wagerechter, gleichmäßig belasteter Träger von der gleichen Länge l.

Das erforderliche Widerstandsmoment des Wangenträgers ist (bei k = 750) danach:

$$W = 1238 \, \frac{500}{8 \,.\, 750} = 103$$

Nach Tabelle 1 S. 28 genügt ⊏-Eisen Nr. 16 mit W = 116.

Die in der Richtung A B wirkende Kraft $p\,l \sin \alpha$ kann bei der geringen Beanspruchung k = 750 für den Träger selbst vernachlässigt werden.

Aufgabe 39. Eine Deckenkonstruktion soll mit Hilfe von eisernen Trägern ausgeführt werden, die in solchen Entfernungen voneinander anzuordnen sind, daß bei voller Belastung die Durchbiegung derselben $\frac{1}{600}$ der Stützweite beträgt.

Stützweite $l = 520$ cm

Belastung $= 700$ kg für 1 qm

Die Höhe der Träger muß mit Rücksicht auf die Durchbiegung nach Gl. 57) S. 70 mindestens sein:

$$h = \frac{520}{25} = 20{,}8 \text{ cm}$$

Es sind daher I-Eisen Nr. 21 mit $W = 244$ zu verwenden. Der diesem Widerstandsmomente entsprechende Trägerabstand b ergibt sich aus der Bedingungsgleichung:

$$\mathfrak{M} = k\,W$$

Die Gesamtbelastung eines Trägers ist:

$$p\,l\,b = 700 \,.\, 5{,}2 \,.\, b = 3640\,b$$

Für $k = 1000$ wird dann:

$$3640\,b\,\frac{520}{8} = 1000 \,.\, 244$$

folglich:

$$b = \frac{8 \,.\, 1000 \,.\, 244}{3640 \,.\, 520} = 1{,}03 \text{ m}$$

Aufgabe 40. Es soll ein nach Fig. 65 S. 78 belasteter I-Träger berechnet werden unter Annahme folgender Größen:

$$p = 10 \text{ kg} \qquad l_1 = 120 \text{ cm}$$
$$l = 600 \text{ cm} \qquad l_2 = 300 \text{ cm}$$

Auflösung. Die Stützenwiderstände sind:

$$A = \frac{10 \,.\, 120\,(600 - 60) + 10 \,.\, 300 \,.\, 150}{600} = 1830 \text{ kg}$$

$$B = \frac{10 \,.\, 120 \,.\, 60 + 10 \,.\, 300\,(600 - 150)}{600} = 2370 \text{ kg}$$

Die Größe x_0, d. i. die Entfernung des gefährlichen Querschnittes vom Auflager B ergibt sich zu:

$$x_0 = \frac{B}{p} = \frac{2370}{10} = 237 \text{ cm}$$

folglich wird:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{10 \,.\, 237^2}{2} = 280845$$

$$W = \frac{280845}{1000} = 281$$

Nach Tabelle 2 § 6 ist erforderlich ein I-Eisen Nr. 23.

Aufgabe 41. Es soll die Profilnummer eines I-Eisens von 720 cm Länge bestimmt werden, welches gleichmäßig mit $p = 8$ kg für 1 cm Länge belastet ist. Dasselbe ist an seinem einen Endpunkte unterstützt und soll so weit über die zweite Stütze hinausragen, daß die Tragkraft voll ausgenutzt wird. (Vergl. Fig. 59 S. 73.)

Auflösung. Aus:

$$l + a = l + 0{,}4142 \,.\, l = 720$$

folgt:

$$l = 509 \text{ cm}$$
$$a = 0{,}4142 \,.\, 509 = 211 \text{ cm}$$
$$\mathfrak{M}_{max} = 0{,}0858 \,.\, 8 \,.\, 509^2 = 177\,833$$
$$W = \frac{177\,833}{1000} = 178$$

Es genügt ein I-Eisen Nr. 19.

Aufgabe 42. Ein nach Fig. 68 S. 81 belasteter Träger ist für folgende Angaben zu berechnen:

$$P = 600 \text{ kg} \qquad l = 600 \text{ cm}$$
$$p = 12 \text{ kg} \qquad l_1 = 400 \text{ cm}$$
$$a = 500 \text{ cm};\ b = 100 \text{ cm}$$

Auflösung:

$$A = \frac{600 \,.\, 100}{600} + 12 \,.\, 400 \,\frac{(600 - 200)}{600} = 3300$$
$$x_0 = \frac{3300}{12} = 275 \text{ cm}$$
$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{12 \,.\, 275^2}{2} = 453\,750$$
$$W = \frac{453\,750}{1000} = 454$$

Gewählt I-Eisen Nr. 27.

Aufgabe 43. Ein auf zwei Stützen ruhender Balken aus Eichenholz von 800 cm Länge soll gleichmäßig mit $p = 5$ kg für 1 cm Länge belastet und so unterstützt werden, daß die Tragkraft des Balkens voll ausgenutzt wird. Es soll der erforderliche Querschnitt des Balkens und die Lage der Stützen bestimmt werden (Fig. 57 S. 70).

Auflösung. Da nach S. 71:

$$a = \frac{l}{\sqrt{8}}$$

ist, so hat man:

$$800 = l + 2 \,.\, \frac{l}{\sqrt{8}}$$

Danach:

$$l = \frac{800}{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{8}}\right)} = \infty\ 470 \text{ cm}$$
$$a = \frac{800 - 470}{2} = 165 \text{ cm}$$

Die Gesamtbelastung des Mittelteiles beträgt:

$$p\,l = 5 \,.\, 470 = 2350 \text{ kg}$$

folglich:

$$\mathfrak{M} = p\,l \,.\, \frac{l}{16} = 2350 \,.\, \frac{470}{16} = 69\,031$$

und bei k = 80 kg:

$$W = \frac{b\,h^2}{6} = \frac{69\,031}{80} = 863$$

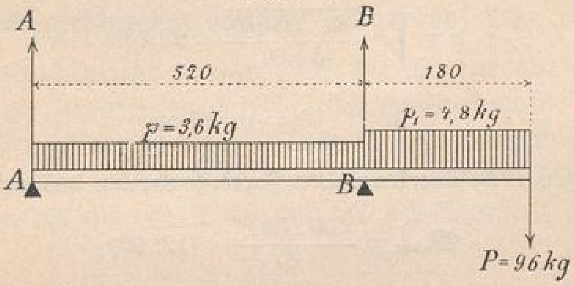
Wählt man b = 14 cm, so wird:

$$h = \sqrt{\frac{6}{14} \,.\, 863} = 19{,}2 \text{ cm}$$

Aufgabe 44. Zur Unterstützung eines Balkons von 1,8 m Ausladung sollen die über die Gebäudemauer hinausragenden Fußbodenbalken aus Kiefernholz benutzt werden, welche 0,8 m auseinander liegen und 5,2 m Spannweite haben. Die Fußbodenbelastung beträgt 450 kg/qm, die Balkonbelastung 600 kg/qm; das Gewicht der Brüstung ist = 120 kg für das laufende Meter.

Wie stark sind die mittleren Balken auszuführen?

Fig. 72.



Auflösung. Die Belastung eines Balkens zwischen den Stützen beträgt für 1 cm Länge:

$$p = 0{,}8 \,.\, 4{,}5 = 3{,}6 \text{ kg}$$

Die gleichförmig verteilte Belastung des überkragenden Balkenendes ist für 1 cm Länge:

$$p_1 = 0{,}8 \,.\, 6 = 4{,}8 \text{ kg}$$

Auf das freie Balkenende wirkt außerdem die Einzelkraft:

$$P = 0{,}8 \,.\, 120 = 96 \text{ kg}$$

In Fig. 72 sind diese Belastungen zusammengestellt.

Der Stützenwiderstand A ergibt sich aus:

$$A \,.\, 520 - \frac{3{,}6 \,.\, 520^2}{2} + \frac{4{,}8 \,.\, 180^2}{2} + 96 \,.\, 180 = 0$$

zu:

$$A = 753 \text{ kg}$$

Das Moment in der Entfernung x vom Auflager A ist:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - \frac{p\,x^2}{2} = 753 \,.\, x - \frac{3{,}6 \,.\, x^2}{2}$$

Dasselbe wird = Null für:

$$x_0 = \frac{753}{1{,}8} = 418 \text{ cm}$$

folglich hat das Maximalmoment zwischen den Stützen die Größe:

$$\mathfrak{M} = \frac{3{,}6 \,.\, 418^2}{8} = 78626$$

Das Moment über der Stütze B ist:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{4{,}8 \,.\, 180^2}{2} + 96 \,.\, 180 = 95040$$

Das Stützenmoment ist mithin das größte und der Balken zu berechnen nach:

$$k \,.\, \frac{b\,h^2}{6} = 95040$$

Nimmt man $b : h = 5 : 7$, so wird für $k = 60$

$$60 \frac{{}^5/_7\, h \,.\, h^2}{6} = 60 \,.\, \frac{5}{42}\, h^3 = 95040$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{42 \,.\, 95040}{5 \,.\, 60}} = 23{,}4 \text{ cm}$$

$$b = \frac{5}{7}\, h = \backsim 17 \text{ cm}$$

Da für die übrigen nicht überkragenden Fußbodenbalken das größte Moment:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{3{,}6 \,.\, 520^2}{8} = 121680$$

also größer als $\mathfrak{M}_1$ ist, so folgt, daß des Balkons wegen die Balken nicht verstärkt zu werden brauchen, sondern eher etwas schwächer gehalten werden könnten, was aus praktischen Rücksichten indessen wohl nicht geschehen würde.

Aufgabe 45. Welche Länge kann ein an den Enden unterstütztes I-Eisen Nr. 20 haben, um sich selbst noch mit Sicherheit tragen zu können?

Auflösung. Nach Tabelle 2 § 6 ist das Widerstandsmoment:

$$W = 214$$

und das Gewicht für 1 cm Länge:

$$g = 0{,}261 \text{ kg}$$

folglich das Gesamtgewicht:

$$G = 0{,}261 \,.\, l$$

Die Trägerlänge ergibt sich dann aus der Gleichung:

$$l = \frac{8\,k\,W}{0{,}261 \,.\, l}$$

$$0{,}261 \,.\, l^2 = 8 \,.\, 1000 \,.\, 214$$

$$l = \sqrt{\frac{8 \,.\, 1000 \,.\, 214}{0{,}261}} = 2561 \text{ cm} = 25{,}61 \text{ m}$$