Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

§ 10. Die statisch unbestimmten Träger.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78212

§ 10.

Die statisch unbestimmten Träger.

Statisch unbestimmt nennt man solche Träger, bei denen es nicht möglich ist, die unbekannten Größen (d. i. die Momente und Stützenwiderstände) nur mit Hilfe der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (§ 4 S. 16) zu bestimmen. Zur Berechnung solcher Träger sind außer den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen noch die Elastizitätsgleichungen Gl. 31) bis 34) S. 43 und 44 zu benutzen.

Die einfachsten Fälle der statisch unbestimmten Träger sollen in folgendem kurz besprochen werden.

1. Der gleichmäßig belastete Träger auf drei Stützen.

Es soll vorausgesetzt werden, daß die Stützen alle in gleicher Höhe liegen und daß die Felder A C und B C die gleiche Spannweite l haben (Fig. 73).

Da die Durchbiegung des Punktes A gegen den Punkt C = Null ist, so erhält man, wenn die gleichmäßige Belastung wieder mit p bezeichnet wird, mit Anwendung der Gl. 36) S. 46 und Gl. 40) S. 49:

$$0 = \frac{A l^3}{3 E J} - \frac{p l^4}{8 E J}$$

Da wegen des symmetrischen Belastungszustandes A = B sein muß, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \frac{3}{8} \mathbf{p\,l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 64)$$

Die Summe aller drei Stützenwiderstände muß gleich der Gesamtbelastung = 2 p l sein, danach wird:

$$\mathbf{C} = \frac{10}{8} \mathbf{p\,l} = \frac{5}{8} \cdot \mathbf{2\,p\,l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 65)$$

Der Druck auf die Mittelstütze beträgt 5/8 der Gesamtbelastung.

Nachdem die Stützenwiderstände mit Hilfe der Elastizitätsgleichungen gefunden sind, erfolgt die weitere Behandlung des Trägers in gewohnter Weise.

Das Moment in der Entfernung x vom Auflager ist:

$$\mathfrak{M}_x = A x - \frac{p x^2}{2} = \frac{3}{8} p l \cdot x - \frac{p x^2}{2}$$

Fügt man das Glied $^1/_8\, p l x$ positiv und negativ hinzu, so erhält man:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p l x}{2} - \frac{p x^2}{2} - \frac{p l x}{8} = \frac{p}{2} x (l - x) - {}^1/_8\, p l x$$

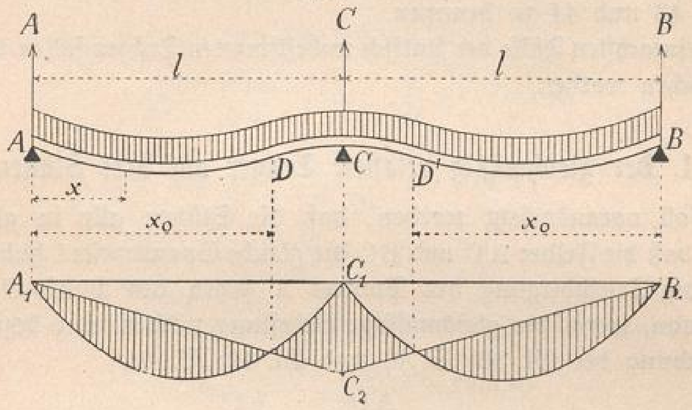
Das erste Glied der rechten Seite stimmt überein mit Gl. 52) S. 67, die graphische Darstellung desselben ist also eine Parabel mit der Pfeilhöhe $^1/_8\, p l^2$. Das zweite Glied ist proportional x, erreicht seinen größten

Wert $\frac{1}{8}$ p l^2 für $x = l$ und läßt sich darstellen durch die Gerade $A_1 C_2$ bezw. $B_1 C_2$ (Fig. 73), wenn $C_1 C_2 = \frac{1}{8} p l^2$ aufgetragen wird.

Man erhält daher nach der letzten Gleichung graphisch die Momente $\mathfrak{M}$, wenn man von den Ordinaten der Parabel diejenigen der Geraden abzieht. Dadurch entsteht die in Fig. 73 schraffierte Momentenfläche.

Der Träger ist so durchgebogen, daß über der Mittelstütze die oberen Fasern, in den Feldern zwischen den Punkten A und D bezw. B und D' dagegen die unteren Fasern gezogen werden. In den Punkten D und D'

Fig. 73.



geht die eine Krümmung in die andere über, folglich ist in diesen Punkten das Moment = Null.

Bezeichnet man den Abstand der Punkte D und D' von den Auflagern mit x_0, so ergibt sich, indem man $\mathfrak{M}_x = 0$ setzt:

$$x_0 = \frac{3}{4}\, l$$

Diese Trägerstücke A D und B D' können daher als an den Enden frei aufliegende Träger von der Länge $\frac{3}{4}\, l$ angesehen werden. Das größte Moment für diese Trägerstücke ist:

$$\mathfrak{M} = p \cdot \frac{3}{4}\, l \cdot \frac{\frac{3}{4}\, l}{8} = \frac{9}{128}\, p\, l^2$$

Das Moment über der Mittelstütze erhält man, wenn man in dem Ausdruck $\mathfrak{M}_x$ für x den Wert l einsetzt.

Man findet:

$$\mathfrak{M}_c = -\frac{p\, l^2}{8}$$

Der absolute Wert von $\mathfrak{M}_c$ ist größer als $\mathfrak{M}$, der gefährliche Querschnitt findet also über der Stütze C statt, und der Träger ist zu berechnen nach der Gleichung:

$$\frac{\mathbf{p\, l^2}}{\mathbf{8}} = \mathbf{k\, W} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 66)$$

Diese Gleichung stimmt überein mit der Gleichung 54) S. 68.

Danach ist das Moment über der Mittelstütze des symmetrischen gleichmäßig belasteten Trägers von der Länge 2 l auf drei in gleicher Höhe liegenden Stützen gleich dem größten Momente des gleichmäßig belasteten, an beiden Enden frei aufliegenden Trägers von der Länge l.

Für die Berechnung des Trägerquerschnittes kann man daher annehmen, daß die Felder A C und B C durch je einen besonderen Träger überspannt sind.

Zur Berechnung der Stütze C selbst, die z. B. aus einer Säule oder einem Unterzug bestehen kann, ist diese Annahme dagegen unzulässig, denn der Druck, welchen zwei Einzelträger A C und B C auf die Stütze C übertragen, würde nur $= p\,l$ sein, während in Wirklichkeit der durchlaufende Träger A C B nach Gl. 65) einen größeren Druck auf die Mittelstütze ausübt.

Durch eine Aenderung in der Höhenlage der Stützen werden die Momente stark beeinflußt, und zwar wird durch eine Senkung der Mittelstütze das Moment $\mathfrak{M}_c$ verkleinert, die Momente $\mathfrak{M}$ vergrößert. Durch eine geringe Senkung der Mittelstütze läßt sich daher die Tragfähigkeit des Balkens vergrößern, wogegen eine Ueberhöhung der Mittelstütze nachteilig auf die Tragfähigkeit einwirkt. Da durch Zufälligkeiten, z. B. nachträgliches ungleichförmiges Setzen der Auflager, die Höhenlage derselben sich gegeneinander leicht etwas verändern kann und eine genaue Ueberwachung häufig schwer durchzuführen ist, so bleibt hauptsächlich aus diesem Grunde die Anwendung der Träger auf mehreren Stützen mit Recht beschränkt, obgleich bei diesen an Material etwas gespart werden kann.

2. Der durch Einzelkräfte belastete Träger auf drei Stützen.

Es wird auch hier wieder vorausgesetzt, daß die Stützen in gleicher Höhe liegen, und daß die Feldweiten A C und B C (Fig. 74) einander gleich sind. Die Einzelkräfte P sollen in den Feldmitten angreifen.

Die Durchbiegung des Punktes A gegen den Punkt C ist im ganzen = Null. Sie setzt sich zusammen aus einem Teile, hervorgebracht durch den Stützenwiderstand A und aus einem andern Teile in entgegengesetzter Richtung, welcher durch die Einzelkraft P erzeugt wird.

Der Angriffspunkt E der Einzelkraft P erfährt nach Gl. 36) S. 46 durch P allein die Durchbiegung:

$$f_1 = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3\,E\,J} = \frac{P\,l^3}{24\,E\,J}$$

Der Punkt A liegt aber (Fig. 75) um das Maß:

$$f_2 = \frac{l}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

tiefer als der Punkt E, und da nach Gl. 38) S. 47:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2\,E\,J}$$

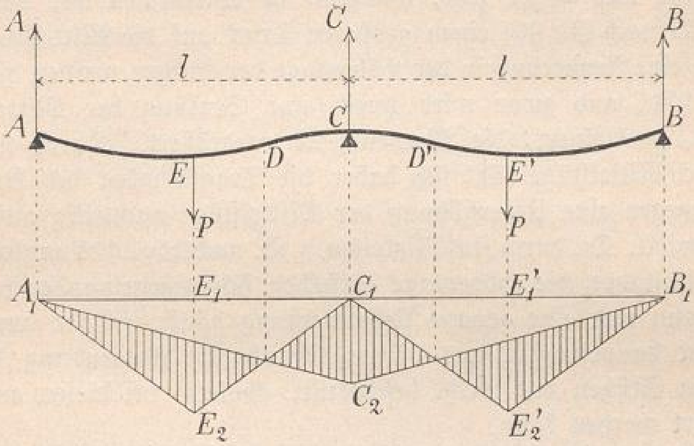
ist, so entsteht:

$$f_2 = \frac{l}{2} \cdot \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2\,E\,J} = \frac{P\,l^3}{16\,E\,J}$$

Die Gesamtdurchbiegung des Punktes A, hervorgebracht durch die Kraft P beträgt danach:

$$f_1 + f_2 = \frac{P\,l^3}{24\,E\,J} + \frac{P\,l^3}{16\,E\,J} = \frac{5}{48}\,\frac{P\,l^3}{E\,J}$$

Fig. 74.

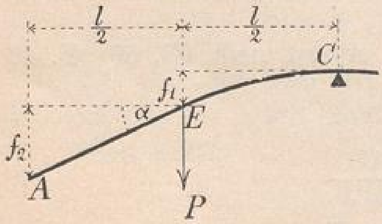


Diese wird gerade wieder aufgehoben durch die von dem Stützenwiderstande A allein bewirkte Durchbiegung nach oben, welche nach Gl. 36) S. 46 die Größe hat:

$$f = \frac{A\,l^3}{3\,E\,J}$$

Setzt man $f = f_1 + f_2$, so erhält man:

Fig. 75.



$$A = B = \frac{5}{16}\,P$$

$$C = \frac{22}{16}\,P$$

Das Moment im Angriffspunkte von P ist:

$$\mathfrak{M} = \frac{5}{16}\,P \cdot \frac{l}{2} = \frac{5}{32}\,P\,l$$

Das Moment über der Mittelstütze hat die Größe:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{5}{16}\,P \cdot l - P \cdot \frac{l}{2} = -\frac{3}{16}\,P\,l$$

Der Träger ist daher zu berechnen nach:

$$\mathbf{\frac{3}{16}\,P\,l = k\,W} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 67)$$

Für die Strecke von A bis E (Fig. 74) ist:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x = \frac{5}{16}\,P\,x$$

oder:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{P}{2}\,x - \frac{3}{16}\,P\,x$$

Für $x = 0$ wird:

$$\mathfrak{M} = 0$$

für $x = \frac{l}{2}$ wird:

$$\mathfrak{M} = \frac{P\,l}{4} - \frac{3}{32}\,P\,l$$

Für die Strecke von E bis C (Fig. 74) ist:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - P\left(x - \frac{l}{2}\right)$$

oder:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{P}{2}\,(l - x) - \frac{3}{16}\,P\,x$$

Für $x = \frac{l}{2}$ wird (wie oben):

$$\mathfrak{M} = \frac{P\,l}{4} - \frac{3}{32}\,P\,l$$

Für $x = l$ wird:

$$\mathfrak{M}_c = -\frac{3}{16}\,P\,l$$

hieraus ergibt sich die in Fig. 74 angedeutete graphische Darstellung der Momente. Darin ist:

$$E_1\,E_2 = E'_1\,E'_2 = \frac{P\,l}{4}$$

und:

$$C_1\,C_2 = \frac{3}{16}\,P\,l$$

Die Lage der Punkte D und D′ ist analytisch bestimmt durch die Bedingung:

$$\frac{P}{2}\,(l - x_0) - \frac{3}{16}\,P\,x_0 = 0$$

Man erhält:

$$x_0 = \frac{8}{11}\,l$$

3. Der an einem Ende wagerecht eingespannte, am anderen Ende frei aufliegende Träger.

a) Der Träger ist gleichmäßig auf seine ganze Länge belastet.

Liegt (Fig. 76) der Auflagerpunkt A mit der Einspannungsstelle C in gleicher Höhe, so ist dieser Träger anzusehen als die Hälfte des unter 1) besprochenen, gleichmäßig belasteten Trägers auf drei Stützen, welcher in der Mitte fest eingemauert gedacht ist.

Die Stützenwiderstände sind:

$$A = \frac{3}{8}\,p\,l \qquad C = \frac{5}{8}\,p\,l$$

Das größte Moment findet bei C statt und hat den Wert:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{p\,l^2}{8}$$

die Berechnung des Trägers geschieht nach Gl. 66) S. 92.

Fig. 76.

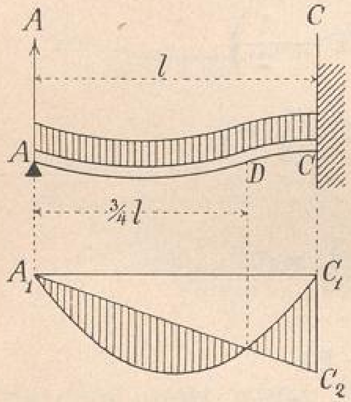
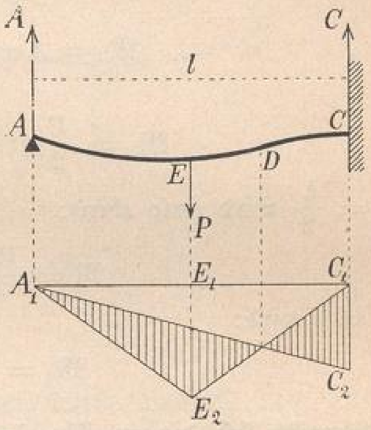


Fig. 77.



Die graphische Darstellung der in Fig. 76 schraffierten Momentfläche gibt ein deutliches Bild von der Veränderlichkeit des Momentes.

b) Der Träger ist in der Mitte durch die Einzelkraft P belastet.

Die Punkte A und C sollen auch hier wieder in gleicher Höhe liegen, so daß der Träger (Fig. 77) als die Hälfte des in Fig. 74 abgebildeten Trägers auf drei Stützen zu betrachten ist.

Die Stützenwiderstände sind:

$$A = \frac{5}{16}\,P \qquad C = \frac{11}{16}\,P$$

Das größte Moment bei C hat den Wert:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{3}{16}\,P\,l$$

Die Berechnung des Trägers geschieht nach Gl. 67) S. 94. In der graphischen Darstellung der Momente ist:

$$E_1\,E_2 = \frac{P\,l}{4} \text{ und } C_1\,C_2 = \frac{3}{16}\,P\,l$$

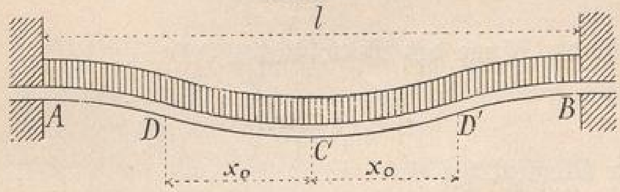
4. Der an beiden Enden wagerecht eingespannte, gleichmäßig belastete Träger.

Die Form der elastischen Linie bei diesem Träger (Fig. 78) zeigt, daß zwei Punkte D und D′ vorhanden sind, in denen das Moment = Null ist.

Die vorläufig noch unbekannte Entfernung dieser Punkte von der Mitte des Trägers sei x_0.

Das mittlere Trägerstück von der Länge $2\,x_0$ kann angesehen werden als ein an den Enden frei aufliegender Träger, welcher auf jeden Unter-

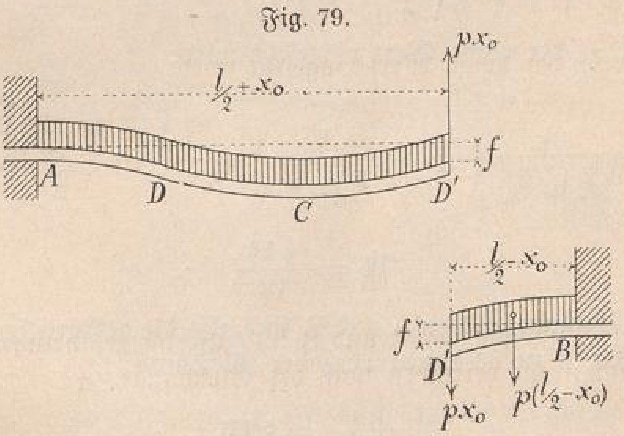
Fig. 78.



stützungspunkt den Auflagerdruck $p\,x_0$ überträgt. Die Seitenstücke A D und B D′ bilden daher gleichmäßig belastete Konsolträger, an deren freiem Ende die Einzelkraft $p\,x_0$ wirkt.

Der Gleichgewichtszustand wird nicht gestört, wenn man sich den Träger AB im Punkte D′ zerschnitten denkt und dafür für das linke Trägerstück A D′

Fig. 79.



die lotrecht aufwärts gerichtete Kraft $p\,x_0$, für das rechte Trägerstück die lotrecht abwärts gerichtete Kraft $p\,x_0$ als äußere Kraft hinzufügt (Fig. 79). Bezeichnet man die Durchbiegung des Punktes D′ gegen die Punkte A und B mit f, so ergibt sich nach Gl. 36) S. 46 und Gl. 40) S. 49 für das linke Trägerstück:

$$f = \frac{p\left(\frac{l}{2} + x_0\right)^4}{8\,E\,J} - \frac{p\,x_0\left(\frac{l}{2} + x_0\right)^3}{3\,E\,J}$$

und für das rechte Trägerstück:

$$f = \frac{p\left(\frac{l}{2} - x_0\right)^4}{8EJ} + \frac{p x_0 \left(\frac{l}{2} - x_0\right)^3}{3EJ}$$

Setzt man diese beiden Werte von f einander gleich, so folgt:

$$3\left[\left(\frac{l}{2} + x_0\right)^4 - \left(\frac{l}{2} - x_0\right)^4\right] = 8 x_0 \left[\left(\frac{l}{2} + x_0\right)^3 + \left(\frac{l}{2} - x_0\right)^3\right]$$

Durch Auflösung dieser Gleichung ergibt sich:

$$x_0 = \frac{l}{2\sqrt{3}}$$

Danach ist die Länge des Mittelstückes D D′

$$2 x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

und das größte Moment bei C:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{p \frac{l}{\sqrt{3}} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}}}{8} = \frac{p l^2}{24}$$

Für das Moment bei B ergibt sich:

$$\mathfrak{M} = p x_0 \left(\frac{l}{2} - x_0\right) + \frac{p\left(\frac{l}{2} - x_0\right)^2}{2}$$

und wenn für x_0 der obige Wert eingesetzt wird:

$$\mathfrak{M} = p \frac{l}{2\sqrt{3}} \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{p\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2\sqrt{3}}\right)^2}{2}$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{M} = \frac{p l^2}{12}$$

Die Einspannungsstellen A und B sind also die gefährlichen Querschnitte und der Träger ist zu berechnen nach der Gleichung:

$$\frac{\mathbf{p\,l^2}}{\mathbf{12}} = \mathbf{k\,W} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 68)$$

5. Der an beiden Enden wagerecht eingespannte, in der Mitte durch eine Einzelkraft P belastete Träger.

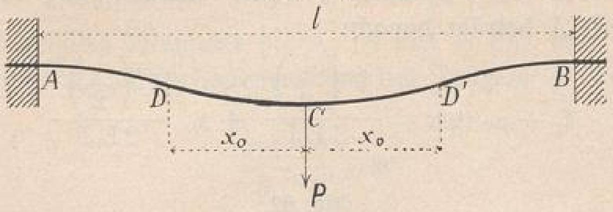
Die Entfernung x_0 der Punkte D und D′, in denen das Moment = Null ist, von der Mitte des Trägers erhält man in ähnlicher Weise wie unter 4).

Das mittlere Trägerstück D D′ von der Länge $2 x_0$ kann betrachtet werden als ein an den Enden frei aufliegender Träger, welcher auf jeden

Unterstützungspunkt den Auflagerdruck $^1/_2$ P überträgt. Die Seitenstücke AD und BD′ bilden daher Konsolträger, an deren freiem Ende die Kraft $^1/_2$ P wirkt.

Denkt man sich den Träger AB (Fig. 80) im Punkte D′ zerschnitten, so hat man für das linke Trägerstück AD′ die lotrecht aufwärts gerichtete

Fig. 80.

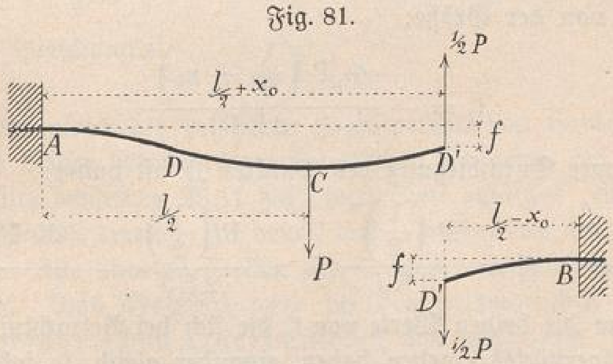


Kraft $^1/_2$ P, für das rechte Trägerstück BD′ die lotrecht abwärts gerichtete Kraft $^1/_2$ P als äußere Kraft hinzuzufügen (Fig. 81).

Die Durchbiegung f des Punktes D′ gegen die Punkte A und B ergibt sich dann für das rechte Trägerstück BD′ nach Gl. 36) S. 46 zu:

$$f = \frac{^1/_2\, P \left(\frac{l}{2} - x_0\right)^3}{3\,E\,J}$$

Fig. 81.



Für das linke Trägerstück AD′ setzt sich die Durchbiegung f aus mehreren Teilen zusammen.

Die in C angreifende Kraft P (Fig. 82) erzeugt im Punkte C die Durchbiegung:

$$f_1 = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3\,E\,J}$$

Die Tangente des Winkels, den die Trägerachse in C mit der Wagerechten bildet, hat nach Gl. 38) S. 47 die Größe:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2\,E\,J}$$

folglich liegt der Punkt D' um:

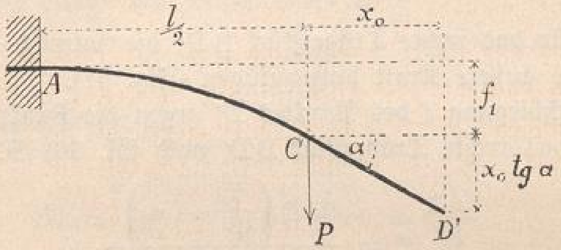
$$x_0 \operatorname{tg} \alpha = x_0 \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EJ}$$

tiefer als der Punkt C.

Die von der Kraft P allein bewirkte Durchbiegung des Punktes D' gegen den Punkt A beträgt danach:

$$f_1 + x_0 \operatorname{tg} \alpha = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EJ} + x_0 \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EJ}$$

Fig. 82.



Die in D' angreifende Kraft $\frac{1}{2}$ P erzeugt nun aber eine Durchbiegung nach aufwärts von der Größe:

$$f_2 = -\frac{\frac{1}{2} P\left(\frac{l}{2} + x_0\right)^3}{3EJ}$$

Die gesamte Durchbiegung des Punktes D' ist daher:

$$f = f_1 + x_0 \operatorname{tg} \alpha + f_2 = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EJ} + x_0 \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EJ} - \frac{\frac{1}{2} P\left(\frac{l}{2} + x_0\right)^3}{3EJ}$$

Setzt man die beiden Werte von f, die sich bei Betrachtung des rechten und linken Trägerstückes ergeben haben, einander gleich, so folgt:

$$\left(\frac{l}{2} - x_0\right)^3 + \left(\frac{l}{2} + x_0\right)^3 = 2\left(\frac{l}{2}\right)^3 + 3x_0\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

woraus man durch Auflösung der Gleichung für x_0 erhält:

$$x_0 = \frac{l}{4}$$

Das mittlere Trägerstück D D' hat daher die Länge

$$2x_0 = \frac{l}{2}$$

und das Moment bei C ist:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)}{4} = \frac{Pl}{8}$$

Die Konsolträger AD und BD′ haben die Länge $\frac{l}{4}$ und sind am freien Ende durch die Kraft $\frac{P}{2}$ belastet. Die Momente bei A und B haben danach die Größe:

$$\mathfrak{M} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Pl}{8}$$

Die drei größten Momente bei A, B und C sind also einander gleich und das erforderliche Widerstandsmoment des Trägers ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{\mathbf{P\,l}}{\mathbf{8}} = \mathbf{k\,W} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 69)$$

In Bezug auf die eingespannten Träger verdient schließlich noch bemerkt zu werden, daß in der Praxis auf eine vollkommene Einspannung nicht leicht zu rechnen ist, und daß man sicherer geht, keine Rücksicht darauf zu nehmen und den Träger immer als Träger auf zwei Stützen anzusehen und zu berechnen.

§ 11.

Die Träger von gleichem Biegungswiderstand.

In der Gleichung:

$$\mathfrak{M} = k\,W$$

darf k höchstens gleich der zulässigen Inanspruchnahme werden.

Bei den bisher betrachteten prismatischen Trägern, bei denen W für alle Querschnitte denselben Wert hat, wird diese zulässige Inanspruchnahme nur in den Punkten erreicht, in denen das Moment der äußeren Kräfte ein Maximum ist. Alle anderen Stellen des Trägers erleiden eine geringere Inanspruchnahme. Das Material wird bei den prismatischen Trägern daher nur in den gefährlichen Querschnitten voll ausgenutzt.

Soll die Tragfähigkeit des Materials in allen Querschnitten voll ausgenutzt werden, so darf der Träger nur in den Teilen eine prismatische Form haben, in denen das Moment unveränderlich ist, wie z. B. bei dem Träger Fig. 37 S. 47 zwischen den Punkten A und C, in Fig. 51 S. 62 zwischen C und C′ und in Fig. 52 S. 62 zwischen A und B. In allen übrigen Teilen muß sich der Querschnitt mit dem Momente ändern, und zwar muß der Träger eine solche Form erhalten, daß die Spannung der äußeren Faserschicht in allen Querschnitten gleich der zulässigen Inanspruchnahme wird.

Träger, welche dieser Bedingung entsprechen, nennt man Träger von gleichem Biegungswiderstand. Diese Träger besitzen außer dem Vorteil der Materialersparung vor den prismatischen Trägern auch noch den Vorteil, daß die Belastung durch das Eigengewicht geringer ausfällt.