Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

§ 11. Die Träger von gleichem Biegungswiderstand.

Die Konsolträger AD und BD′ haben die Länge $\frac{l}{4}$ und sind am freien Ende durch die Kraft $\frac{P}{2}$ belastet. Die Momente bei A und B haben danach die Größe:

$$\mathfrak{M} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Pl}{8}$$

Die drei größten Momente bei A, B und C sind also einander gleich und das erforderliche Widerstandsmoment des Trägers ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{\mathbf{Pl}}{\mathbf{8}} = \mathbf{kW} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 69)$$

In Bezug auf die eingespannten Träger verdient schließlich noch bemerkt zu werden, daß in der Praxis auf eine vollkommene Einspannung nicht leicht zu rechnen ist, und daß man sicherer geht, keine Rücksicht darauf zu nehmen und den Träger immer als Träger auf zwei Stützen anzusehen und zu berechnen.

§ 11.

Die Träger von gleichem Biegungswiderstand.

In der Gleichung:

$$\mathfrak{M} = kW$$

darf k höchstens gleich der zulässigen Inanspruchnahme werden.

Bei den bisher betrachteten prismatischen Trägern, bei denen W für alle Querschnitte denselben Wert hat, wird diese zulässige Inanspruchnahme nur in den Punkten erreicht, in denen das Moment der äußeren Kräfte ein Maximum ist. Alle anderen Stellen des Trägers erleiden eine geringere Inanspruchnahme. Das Material wird bei den prismatischen Trägern daher nur in den gefährlichen Querschnitten voll ausgenutzt.

Soll die Tragfähigkeit des Materials in allen Querschnitten voll ausgenutzt werden, so darf der Träger nur in den Teilen eine prismatische Form haben, in denen das Moment unveränderlich ist, wie z. B. bei dem Träger Fig. 37 S. 47 zwischen den Punkten A und C, in Fig. 51 S. 62 zwischen C und C′ und in Fig. 52 S. 62 zwischen A und B. In allen übrigen Teilen muß sich der Querschnitt mit dem Momente ändern, und zwar muß der Träger eine solche Form erhalten, daß die Spannung der äußeren Faserschicht in allen Querschnitten gleich der zulässigen Inanspruchnahme wird.

Träger, welche dieser Bedingung entsprechen, nennt man Träger von gleichem Biegungswiderstand. Diese Träger besitzen außer dem Vorteil der Materialersparung vor den prismatischen Trägern auch noch den Vorteil, daß die Belastung durch das Eigengewicht geringer ausfällt.

Nach der obigen Erklärung muß bei einem Träger von gleichem Biegungswiderstand der Quotient:

$$\frac{\mathfrak{M}}{W} = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Widerstandsmoment}}$$

für alle Querschnitte denselben unveränderlichen Wert haben. Bezeichnet man mit $\mathfrak{M}_x$ und W_x die Werte, welche die Größen $\mathfrak{M}$ und W für einen bestimmten Querschnitt des Trägers an einer Stelle in der Entfernung x vom Trägerende annehmen, so lautet die allgemeine Bedingungsgleichung für einen Träger von gleichem Biegungswiderstand:

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{W_x} = \frac{\mathfrak{M}}{W}$$

oder:

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}} = \frac{W_x}{W} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 70)$$

Die Kraftmomente verhalten sich wie die Widerstandsmomente.

Sind für den kreisförmigen Querschnitt y und d die Durchmesser, welche den Widerstandsmomenten W_x und W entsprechen, ist also:

$$W_x = \frac{y^3 \pi}{32} \qquad W = \frac{d^3 \pi}{32}$$

so erhält man aus Gl. 70):

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}} = \frac{y^3}{d^3}$$

oder:

$$\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 71)$$

Die Durchmesser verhalten sich wie die dritten Wurzeln aus den Momenten.

Bei einem an einem Ende fest eingespannten, am anderen Ende durch die Kraft P belasteten Träger (Fig. 83) kann man setzen:

$$\mathfrak{M}_x = P x \qquad \mathfrak{M} = P l$$

folglich wird:

$$\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 72)$$

Nach Gl. 72) kann der Durchmesser y für jede beliebige Stelle x des Trägers bestimmt werden, nachdem der Durchmesser d aus der Gleichung:

$$k \frac{d^3 \pi}{32} = P l$$

berechnet ist.

Für einen Freiträger mit rechteckigem Querschnitt und der unveränderlichen Höhe h ist nach Fig. 84 für eine Stelle in der Entfernung x vom Angriffspunkte der Kraft P:

$$\mathfrak{M}_x = P\,x \qquad W_x = \frac{y\,h^2}{6}$$

und für die Einspannungsstelle:

$$\mathfrak{M} = P\,l \qquad W = \frac{b\,h^2}{6}$$

Fig. 83.

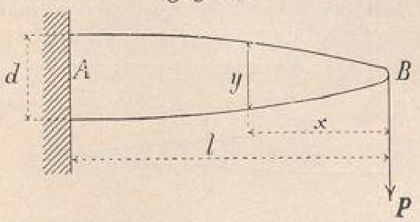
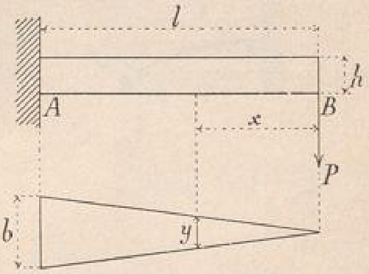


Fig. 84.



folglich nach Gl. 70):

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 73)$$

Der Grundriß des Trägers bildet daher ein Dreieck.

Die Breite b an der Einspannungsstelle ergibt sich aus der Gleichung:

$$k\,\frac{b\,h^2}{6} = P\,l$$

Wird der Krümmungshalbmesser dieses Trägers an der Einspannungsstelle mit ϱ, an der Stelle x mit ϱ_x bezeichnet, so ist nach Gl. 29) S. 42:

$$\varrho = \frac{E\,J}{\mathfrak{M}} = \frac{E\,b\,h^3}{12\,P\,l}$$

$$\varrho_x = \frac{E\,J_x}{\mathfrak{M}_x} = \frac{E\,y\,h^3}{12\,P\,x}$$

folglich:

$$\frac{\varrho}{\varrho_x} = \frac{b}{y} \cdot \frac{x}{l}$$

Nach Gl. 73) ist aber die rechte Seite dieser Gleichung = 1, woraus folgt:

$$\varrho = \varrho_x$$

d. h. der Krümmungshalbmesser hat für alle Stellen des Trägers dieselbe Größe, der Träger ist also nach einer Kreislinie gekrümmt.

Ist r der Halbmesser dieser Kreislinie, so läßt sich die Durchbiegung f des Endpunktes B aus Fig. 85 folgendermaßen berechnen.

Es ist:

$$l^2 = r^2 - (r - f)^2$$

$$l^2 = 2\,r\,f - f^2$$

Wegen Kleinheit von f kann man das Glied f^2 vernachlässigen und erhält dann aus letzter Gleichung:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{l^2}}{\mathbf{2\,r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 74)$$

Fig. 85.

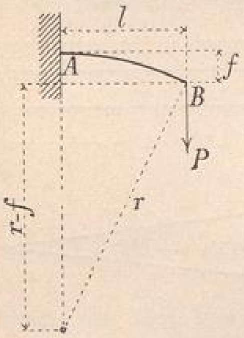
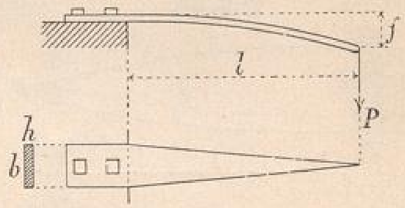


Fig. 86.



Nach Gl. 28) S. 42 ist aber:

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{E\,e}$$

Setzt man diesen Wert in Gl. 74), so ergibt sich:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{E}}\,\frac{\mathbf{l^2}}{\mathbf{e}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 75)$$

Die Durchbiegung ist hier also 1,5mal so groß als unter sonst gleichen Umständen bei einem prismatischen Träger (vergl. Gl. 37) S. 46).

Führt man die ganze Trägerhöhe h ein, setzt also:

$$2\,e = h$$

und löst Gl. 75) für h auf, so erhält man:

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{E}}\,\frac{\mathbf{l^2}}{\mathbf{f}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 76)$$

Nach dieser Gleichung kann z. B. die Stärke einer Dreiecksfeder berechnet werden, welche durch eine am Ende wirkende Kraft P die Durchbiegung f erfährt (Fig. 86).

Die erforderliche Breite b an der Befestigungsstelle ergibt sich dann aus der Gleichung:

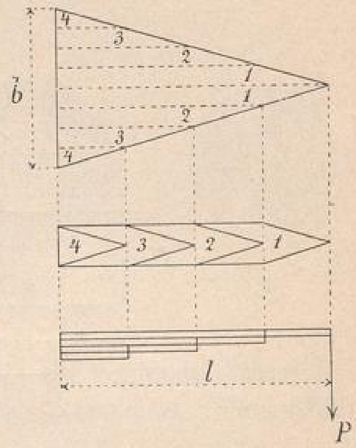
$$k\,.\,\frac{b\,h^2}{6} = P\,l$$

zu:

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{6\,P\,l}}{\mathbf{k\,h^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 77)$$

Fällt hiernach die Breite b größer aus als wünschenswert ist, so kann man die Feder, wie in Fig. 87 angedeutet ist, in einzelne Streifen von gleicher Breite zerlegen. Indem man sich dann je zwei mit gleichen Nummern versehene Streifen zu einem Stück wieder zusammengesetzt denkt, entsteht durch Uebereinanderlegen der einzelnen Stücke die sogen. Schichtfeder.

Fig. 87.



Aufgabe 46. Es sollen die Abmessungen h und b einer stählernen Feder von 50 cm Länge, welche sich unter Einwirkung einer Kraft P = 256 kg um 6 cm durchbiegt, berechnet werden. Die zulässige Inanspruchnahme für gehärteten Stahl sei dabei k = 4000 kg und der Elastizitätsmodul E = 2 000 000.

Auflösung. Nach Gl. 76) ist:

$$h = \frac{4000}{2\,000\,000} \cdot \frac{50^2}{6} = 0{,}8 \text{ cm}$$

Die Breite an der Einspannungsstelle ergibt sich aus Gl. 77) zu:

$$b = \frac{6 \cdot 256 \cdot 50}{4000 \cdot 0{,}8^2} = 30 \text{ cm}$$

Statt der einfachen Dreieckfeder kann hier eine Schichtfeder ausgeführt werden, welche z. B. aus:

4 Blättern von je $7^1/_2$ cm Breite
oder 3 Blättern von je 10 cm Breite

bestehen kann.

Aufgabe 47. Die in Fig. 88 skizzierte, aus Gußeisen vorausgesetzte ungleichschenklige Achse sei belastet mit Q = 16 000 kg. Die Schenkellängen (bis zu den Mitten der Zapfen gemessen) seien: $L_1 = 36$ cm; $L_2 = 60$ cm. Es sollen die Zapfendurchmesser d_1 und d_2 und der Durchmesser D der Achse an der Laststelle berechnet werden. Das Verhältnis von Zapfenlänge zu Zapfendurchmesser ist dabei zu 1,4 anzunehmen.

Auflösung.
Die Zapfendrücke werden nach Gl. 45) und 46) S. 59:

$$P_1 = \frac{Q \cdot L_2}{L_1 + L_2} = \frac{16000 \cdot 60}{36 + 60} = 10000 \text{ kg}$$

$$P_2 = \frac{Q \cdot L_1}{L_1 + L_2} = \frac{16000 \cdot 36}{36 + 60} = 6000 \text{ kg}$$

Der Zapfendurchmesser d_1 ergibt sich aus:

$$P_1 \cdot \frac{l_1}{2} = k\,\frac{d_1^3\,\pi}{32} = \infty\, 0{,}1 \cdot k\, d_1^3$$

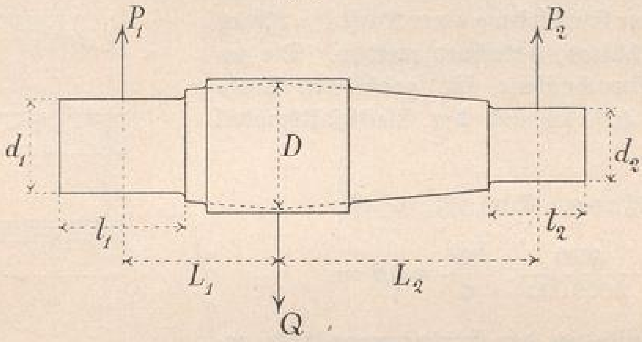
Wenn hierin $l_1 = 1{,}4\ d_1$ eingesetzt und die Gleichung für d_1 aufgelöst wird, erhält man:

$$d_1 = \sqrt{\frac{7}{k} P_1}$$

Ebenso wird:

$$d_2 = \sqrt{\frac{7}{k} P_2}$$

Fig. 88.



Für die zulässige Inanspruchnahme k, die beständig zwischen einem größten positiven und einem größten negativen Werte wechselt, ist die Tabelle III S. 5 (Biegung) maßgebend. Danach ist für Gußeisen k = 150 kg/qcm zu setzen, so daß man erhält:

$$d_1 = \sqrt{\frac{7 \,.\, P_1}{150}} = \sqrt{\frac{7 \,.\, 10000}{150}} = 21{,}6 \text{ cm}$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{7 \,.\, P_2}{150}} = \sqrt{\frac{7 \,.\, 6000}{150}} = 16{,}7 \text{ cm}$$

Die Zapfenlängen werden:

$$l_1 = 1{,}4 \,.\, 21{,}6 = \infty\ 30 \text{ cm}$$
$$l_2 = 1{,}4 \,.\, 16{,}7 = \infty\ 23 \text{ cm}$$

Der Durchmesser D ergibt sich nach Gl. 71) S. 102 aus:

$$\frac{D}{d_1} = \sqrt[3]{\frac{P_1 L_1}{P_1 \,.\, {}^1\!/\!_2\, l_1}} = \sqrt[3]{\frac{2 L_1}{l_1}}$$

zu:

$$D = d_1 \sqrt[3]{\frac{2 L_1}{l_1}} = 21{,}6 \sqrt[3]{\frac{2 \,.\, 36}{30}} = \infty\ 29 \text{ cm}$$

Ebenso nach derselben Gleichung aus:

$$\frac{D}{d_2} = \sqrt[3]{\frac{P_2 L_2}{P_2 \,.\, {}^1\!/\!_2\, l_2}} = \sqrt[3]{\frac{2 L_2}{l_2}}$$

zu:

$$D = d_2 \sqrt[3]{\frac{2 L_2}{l_2}} = 16{,}7 \sqrt[3]{\frac{2 \,.\, 60}{23}} = \infty\ 29 \text{ cm}$$

Wenn die Achse als Hohlguß mit ringförmigem Querschnitt ausgeführt wird, so muß dieser dasselbe Widerstandsmoment besitzen als der volle Querschnitt der massiven Achse an derselben Stelle.

Wird für den vollen Querschnitt der Durchmesser mit D_0 und werden für den Ringquerschnitt an derselben Stelle die Durchmesser außen und innen mit D und d bezeichnet (Fig. 89), so muß sein:

$$\frac{D_0^3 \pi}{32} = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{32\,D}$$

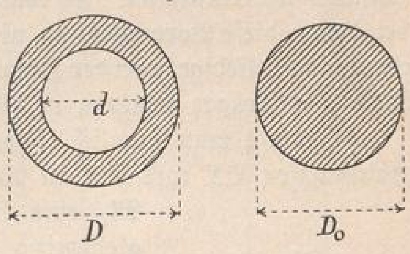
oder:

$$D_0^3 = \frac{D^4 - d^4}{D} = D^3\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]$$

daraus:

$$\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D_0}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{D}}\right)^4}} \quad . \quad 78)$$

Fig. 89.



Gewöhnlich wird für das Verhältnis d: D ein bestimmter Wert angenommen und für diesen nach der letzten Gleichung D berechnet. Man erhält folgende Tabelle:

für $\frac{d}{D}$ =	0,4	0,5	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8
wird $\frac{D}{D_0}$ =	1,01	1,03	1,05	1,07	1,1	1,14	1,2

Nimmt man z. B. bei der obigen Aufgabe für die (hohlen) Zapfen das Verhältnis der Durchmesser = 0,6 an, so werden nach der letzten Tabelle die äußeren Zapfendurchmesser:

$$d_1' = 1{,}05 \,.\, d_1 = 1{,}05 \,.\, 21{,}6 = 22{,}7 \text{ cm}$$
$$d_2' = 1{,}05 \,.\, d_2 = 1{,}05 \,.\, 16{,}7 = 17{,}5 \text{ cm}$$

Die inneren Zapfendurchmesser:

$$d_1'' = 0{,}6 \,.\, d_1' = 0{,}6 \,.\, 22{,}7 = 13{,}6 \text{ cm}$$
$$d_2'' = 0{,}6 \,.\, d_2' = 0{,}6 \,.\, 17{,}5 = 10{,}5 \text{ cm}$$

folglich die Wandstärken:

$$\delta_1 = \frac{d_1' - d_1''}{2} = \frac{22{,}7 - 13{,}6}{2} = \infty\ 4{,}6 \text{ cm}$$

$$\delta_2 = \frac{d_2' - d_2''}{2} = \frac{17{,}5 - 10{,}5}{2} = 3{,}5 \text{ cm}$$

Nimmt man ferner für die (hohle) Achse an der Laststelle das Verhältnis der Durchmesser = 0,7 an, so wird nach der Tabelle der äußere Durchmesser:

$$D' = 1{,}1 \,.\, D = 1{,}1 \,.\, 29 = 32 \text{ cm}$$

folglich der innere Durchmesser:

$$D'' = 0{,}7 \,.\, D' = 0{,}7 \,.\, 32 = 22{,}4 \text{ cm}$$

und die Wandstärke:

$$\delta = \frac{D' - D''}{2} = \frac{32 - 22{,}4}{2} = 4{,}8 \text{ cm}$$