Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

§ 12. Die auf Doppelbiegung beanspruchten Träger.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78212

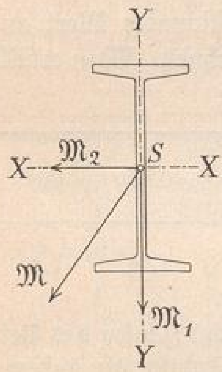
§ 12.

Die auf Doppelbiegung beanspruchten Träger.

Bisher wurde bei den belasteten Trägern stets vorausgesetzt, daß die Kraftebene, also auch die Momentenebene mit einer Hauptachse des Trägerquerschnittes übereinstimmt. Es kommen nun aber im Hochbau häufig Träger vor, bei denen diese Voraussetzung nicht zutrifft, bei denen vielmehr die Momentebene eine beliebige, von der Hauptachse des Querschnittes abweichende Richtung hat. Die Träger erfahren in diesem Falle eine Doppelbiegung.

Zerlegt man nämlich (Fig. 90) das Moment $\mathfrak{M}$ nach der Richtung der Hauptachsen YY und XX in die Seitenmomente $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, so wird durch $\mathfrak{M}_1$ eine Biegung des Trägers in der Y-Ebene und gleichzeitig durch $\mathfrak{M}_2$ eine Biegung in der X-Ebene hervorgerufen.

Fig. 90.



Das Moment $\mathfrak{M}_1$ für sich erzeugt die Randspannung:

$$k_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{W_x}$$

Das Moment $\mathfrak{M}_2$ für sich die Randspannung:

$$k_2 = \frac{\mathfrak{M}_2}{W_y}$$

Durch gleichzeitige Wirkung von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ entsteht als größte überhaupt auftretende Spannung:

$$k = k_1 + k_2 = \frac{\mathfrak{M}_1}{W_x} + \frac{\mathfrak{M}_2}{W_y}$$

k darf dabei nicht größer als die zulässige Inanspruchnahme werden.

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$k = \frac{1}{W_x}\left(\mathfrak{M}_1 + \frac{W_x}{W_y}\mathfrak{M}_2\right)$$

oder wenn man das Verhältnis $W_x : W_y$ kurz mit c bezeichnet:

$$\mathbf{W_x = \frac{\mathfrak{M}_1 + c\,\mathfrak{M}_2}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 79)$$

Man setze nach Prof. R. Land*) für ein schätzungsweise passendes Profil aus den Profiltabellen die zugehörige Verhältniszahl c ein, bestimme nach Gl. 79) den Wert W_x und setze die zum nächstpassenden Profil gehörige Verhältniszahl c von neuem in Gl. 79), um den genaueren, mindestens erforderlichen Wert W_x zu erhalten. Mittelwerte für die erste Schätzung sind:

c = 8 für I-Profile
c = 6 für ⊏-Profile

*) Siehe Zeitschr. d. V. d. I. 1895 S. 293.

Die genauen Werte von $c = W_x : W_y$ für die I-, ⊏- und Z-Profile sind in folgenden Tabellen aufgeführt:

1. I-Eisen.

Nr.	c =	Nr.	c =	Nr.	c =
8	6,50	19	8,20	30	9,07
9	6,80	20	8,26	32	9,23
10	7,01	21	8,31	34	9,40
11	7,23	22	8,34	36	9,53
12	7,38	23	8,50	38	9,67
13	7,57	24	8,50	40	9,76
14	7,65	25	8,54	42½	9,89
15	7,83	26	8,72	45	10,1
16	7,92	27	8,76	47½	10,1
17	8,02	28	8,91	50	10,3
18	8,10	29	8,99	55	10,3

2. ⊏-Eisen.

Nr.	c =	Nr.	c =	Nr.	c =
3	1,59	12	5,48	22	7,28
4	2,31	14	5,85	24	7,57
5	2,82	16	6,32	26	7,76
6½	3,50	18	6,73	28	7,88
8	4,16	20	7,09	30	7,90
10	4,84				

3. Z-Eisen.

Nr.	c =	Nr.	c =	Nr.	c =
3	1,05	8	2,7	16	4,3
4	1,45	10	3,2	18	4,6
5	1,76	12	3,6	20	4,8
6	2,10	14	4,0		

Für den rechteckigen Querschnitt*) mit der Breite b und der Höhe h ist:

$$c = \frac{W_x}{W_y} = \frac{\frac{1}{6}\, b\, h^2}{\frac{1}{6}\, h\, b^2} = \frac{h}{b}$$

Daraus: $b = \frac{h}{c}$ und folglich $W_x = \frac{h^3}{6\,c}$

*) Vergl. R. Land, „Profilbestimmung von rechteckigen Balkenquerschnitten bei schiefer Belastung“ in Zeitschr. d. V. d. I. 1899 S. 239.

Setzt man diesen Wert in Gl. 79) ein, so ergibt sich für die Seite h der Ausdruck:

$$h^3 = \frac{6\,c}{k}\,(\mathfrak{M}_1 + c\,\mathfrak{M}_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 80)$$

Wird, wie es vielfach geschieht, das Seitenverhältnis $c = h : b$ von vornherein angenommen, so ergibt sich h unmittelbar aus Gl. 80) und danach auch $b = h : c$.

Will man dagegen die bei staatlichen Bauten durch Erlaß des preußischen Ministeriums der öffentlichen Arbeiten vorgeschriebenen Normalprofile für Bauhölzer*) benutzen, so setze man für c einen vorläufigen Mittelwert ein. Dabei kann man bei den von der Quadratform am meisten abweichenden Querschnitten (beim Quadrat ist $c = 1$) etwa annehmen:

für starke Querschnitte (von $^{18}/_{24}$ cm ab): $c = 1{,}3$

für mittelstarke Querschnitte ($^{14}/_{20}$ und $^{16}/_{22}$ cm): $c = 1{,}4$.

Nötigenfalls wiederholt man die kurze Rechnung, wenn für den vorläufig ermittelten Querschnitt der angenommene c-Wert wesentlich von dem nunmehr genauer festzustellenden abweicht.

Die Abmessungen der Normalprofile in cm für Bauhölzer nebst den zugehörigen c-Werten sind in folgender Tabelle aufgeführt.

Höhe h =	Breite b =	c =	Höhe h =	Breite b =	c =	Höhe h =	Breite b =	c =
8	8	1,00	18	14 16 18	1,29 1,125 1,00	24	18 20 24	1,33 1,20 1,00
10	8 10	1,25 1,00	20	14 16 18 20	1,43 1,25 1,11 1,00	26	20 24 26	1,30 1,08 1,00
12	10 12	1,20 1,00	22	16 18 20	1,375 1,22 1,10	28	22 26 28	1,27 1,08 1,00
14	10 12 14	1,40 1,17 1,00				30	24 28	1,25 1,07
16	12 14 16	1,33 1,14 1,00						

Aufgabe 48. Eine Decke ist aus I-Eisen und zwischen gespannten ½ Stein (0,12 m) starken Backsteinkappen mit $^1/_{10}$ Stich ausgeführt.

Die Spannweite der Träger beträgt: $l = 3{,}7$ m

Die Entfernung der Träger beträgt: $b = 1{,}2$ m

Die Verkehrsbelastung ist angenommen zu: $p = 185$ kg/qm

*) Centralbl. d. Bauverw. 1898 S. 373.

Es sollen die Deckenträger berechnet werden unter der Annahme, daß ein anschließendes Feld die volle Verkehrsbelastung aufzunehmen hat, das andere nur durch das Eigengewicht belastet ist (Fig. 91).

Auflösung. Das Gewicht einer halben Kappe beträgt (bei $\gamma = 1600$ kg) für 1 m Tiefe angenähert:

$$G_1 = 0{,}6 \,.\, 0{,}12 \,.\, 1600 = 115 \text{ kg}$$

Dazu für Schlackenauffüllung und Fußboden ($\gamma_1 = 850$) bei 0,1 m mittlerer Stärke:

$$G_2 = 0{,}6 \,.\, 0{,}1 \,.\, 850 = 51 \text{ kg}$$

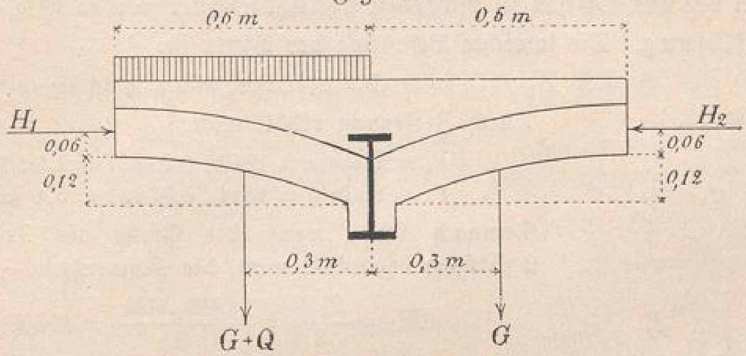
Zusammen:

$$G = 115 + 51 = 166 \text{ kg}$$

Verkehrsbelastung:

$$Q = 0{,}6 \,.\, 185 = 111 \text{ kg}$$

Fig. 91.



Nimmt man an, daß die Angriffspunkte der Lasten um 0,3 m von der Trägerachse entfernt sind, und daß die Horizontalschübe H_1 und H_2 der Gewölbekappen in der Mitte der Scheitelfuge angreifen (was streng genommen nicht ganz zutreffend ist), so erhält man:

$$H_1 = \frac{(G + Q)\, 0{,}3}{0{,}06 + 0{,}12} = \frac{(166 + 111)\, 0{,}3}{0{,}18} = 462 \text{ kg}$$

$$H_2 = \frac{G \,.\, 0{,}3}{0{,}06 + 0{,}12} = \frac{166 \,.\, 0{,}3}{0{,}18} = 277 \text{ kg}$$

Danach hat der Träger einen wagrechten Schub für 1 m Länge aufzunehmen von der Größe:

$$H = H_1 - H_2 = 462 - 277 = 185 \text{ kg}$$

Die lotrechte Belastung für 1 m Länge beträgt:

$$P = 2\,G + Q = 2 \,.\, 166 + 111 = 443 \text{ kg}$$

Hieraus ergeben sich die Momente:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{3{,}7\, P \,.\, l}{8} = \frac{3{,}7 \,.\, 443 \,.\, 370}{8} = 75808$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{3{,}7\, H \,.\, l}{8} = \frac{3{,}7 \,.\, 185 \,.\, 370}{8} = 31658$$

Nach Gl. 79) S. 108 ist dann (bei $k = 1000$), wenn vorläufig $c = 8$ angenommen wird:

$$W_x = \frac{75808 + 8 \,.\, 31658}{1000} = 329$$

Das nächstliegende Profil ist (nach der Tabelle S. 29) Nr. 24 mit $W_x = 353$. Für dieses ist genau:

$$c = \frac{W_x}{W_y} = 8{,}5$$

folglich wird:

$$W_x = \frac{75\,808 + 8{,}5 \,.\, 31\,658}{1000} = 345$$

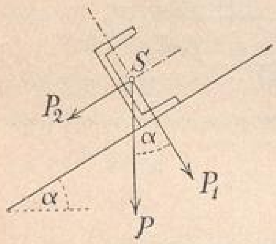
d. h. I-Eisen Nr. 24 genügt als Trägerquerschnitt.

Aufgabe 49. Bei einem eisernen Dache sei die wagerechte Entfernung der Pfetten = 2,4 m, die Binderentfernung b = 3,2 m. Der Neigungswinkel der Dachfläche ist angenommen zu $\alpha = 21^0\,50'$ entsprechend tg $\alpha = 0{,}4 = 1 : 2{,}5$). Die lotrechte Belastung für 1 qm Grundrißfläche betrage p = 175 kg. Es soll das erforderliche Profil der aus ⊏-Eisen zu bildenden Pfette berechnet werden (Fig. 92).

Auflösung. Die lotrechte Belastung der Pfette ist:

$$P = 2{,}4 \,.\, 3{,}2 \,.\, 175 = 1344 \text{ kg}$$

Fig. 92.



Durch Zerlegung erhält man:

$$P_1 = P \cos \alpha = 1344 \,.\, 0{,}92827 = 1248 \text{ kg}$$
$$P_2 = P \sin \alpha = 1344 \,.\, 0{,}37191 = 500 \text{ kg}$$

Demnach sind, wenn die Pfette als Träger auf 2 Stützen behandelt wird, die Momente:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{P_1\, b}{8} = \frac{1248 \,.\, 320}{8} = 49\,920$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{P_2\, b}{8} = \frac{500 \,.\, 320}{8} = 20\,000$$

Nach Gl. 79) S. 108 ist (bei k = 1000) und vorläufiger Annahme von c = 6:

$$W_x = \frac{49\,920 + 6 \,.\, 20\,000}{1000} = 170$$

Das nächstliegende Profil ist (nach Tabelle 1 S. 28) Nr. 20 mit W = 191. Für dieses ist genau c = 7,09, folglich würde bei Beibehaltung des Profiles Nr. 20 die Inanspruchnahme betragen:

$$k = \frac{49\,920 + 7{,}09 \,.\, 20\,000}{191} = 1004 \text{ kg|qcm}$$

§ 13.

Widerstand gegen Abscherung.

Der Widerstand gegen Abscherung tritt dann auf, wenn die äußeren Kräfte einen Teil des Körpers von dem anderen in einer Fläche abzuschieben oder abzuscheren streben. Dieser Widerstand ist verhältnisgleich der abzuscherenden Fläche.

Ist daher P die auf die Abscherung wirkende Kraft, F die abzuscherende