Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

§ 14. Widerstand gegen Zerknicken.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78212

$$10000 \cdot \frac{3,6}{12} = k \cdot \frac{d_o^3 \pi}{32}$$

für k = 1200 wird dann:

$$d_o = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 10000 \cdot 3,6}{12 \cdot 1200 \cdot 3,14}} = \infty\ 3,0 \text{ cm}$$

Wollte man den Bolzen auf Abscherung berechnen, so würde man zu geringe Abmessungen erhalten, wie sich aus folgender Rechnung ergibt.

Da der Bolzen zweischnittig ist, d. h. da hier zwei Querschnitte abzuscheren sind, so ist:

$$2 \frac{d_o^2 \pi}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 1200 = 10000$$

$$\frac{d_o^2 \pi}{4} = \frac{10000}{2 \cdot {}^4/_5 \cdot 1200} = 5,2 \text{ qcm}$$

$$d_o = 2,6 \text{ cm}$$

Das Beispiel zeigt, daß bei Bolzenverbindungen wie in Fig. 96 die Beanspruchung auf Biegung häufig größer ausfallen kann als auf Abscherung. In zweifelhaften Fällen thut man gut, beide Rechnungen, auf Biegung und auf Abscherung durchzuführen.

§ 14.

Widerstand gegen Zerknicken.

Ist ein gerader prismatischer Stab vom Querschnitt F mit seinen Enden A und B gelenkartig befestigt und wirkt, während der untere Endpunkt unterstützt ist, an dem oberen Endpunkte und in der Achsenrichtung des Stabes eine Kraft P, so erzeugt diese nach § 2 eine Druckspannung:

$$k = \frac{P}{F}$$

Je länger der Stab im Verhältnis zu seinem Querschnitt ist, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit, daß er unter Einwirkung der Kraft P seine ursprünglich gerade Lage beibehält: es wird vielmehr, wenn die Kraft P groß genug und der Stab lang genug ist, eine seitliche Ausbiegung eintreten und infolgedessen entsteht dann außer der Druckspannung k in dem Stabe noch eine Biegungsspannung, hervorgebracht durch das Moment der Kraft P.

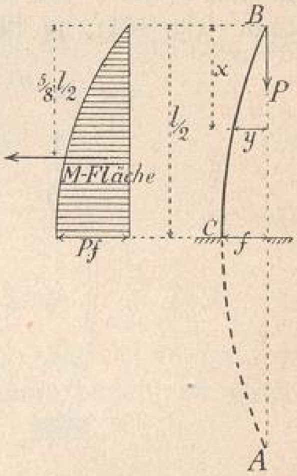
Bei allmählichem Anwachsen der Kraft P wird schließlich durch gleichzeitige Wirkung der Druckspannung k und der Biegungsspannung eine Zerstörung eintreten, der Stab wird zerknickt werden.

Lange dünne Stäbe werden daher eher zerknickt als zerdrückt und müssen außer auf Druck auch noch auf Zerknicken berechnet werden.

Der Stab AB (Fig. 97) erfahre durch die Kraft P in der Mitte die Durchbiegung f und befinde sich im Gleichgewicht. Wir denken uns den unteren Teil desselben bis zu der Mitte C fest eingespannt.

Es läßt sich nachweisen, daß die Biegungskurve CB eine Sinuslinie ist; statt derselben soll hier annäherungsweise die Parabel angenommen werden. Die Durchbiegung y der Stabachse in der Entfernung x vom Punkte B ist zugleich der Hebelarm der Kraft P, so daß das Moment an dieser Stelle = Py ist. Das Moment bei C, wo die Durchbiegung f auftritt, ist = Pf. Die Momente sind also P-mal so groß als die Durchbiegungen, und die Momentenfläche wird danach begrenzt durch eine Parabel mit der Scheitelordinate Pf.

Fig. 97.



Da der Abstand des Schwerpunktes der Parabelfläche vom oberen Ende $= \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{5\,l}{16}$ beträgt*), so ist nach Gl. 34) S. 44:

$$f = \frac{1}{EJ}\left(\frac{2}{3}\,Pf \cdot \frac{l}{2}\right) \cdot \frac{5\,l}{16} = \frac{5}{48}\,\frac{Pfl^2}{EJ}$$

Daraus ergibt sich für die Kraft P der Ausdruck**):

$$\mathbf{P} = \frac{48}{5}\,\frac{\mathbf{EJ}}{l^2} = \mathbf{9{,}6}\,\frac{\mathbf{EJ}}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 83)$$

Wird als Biegungskurve die Sinuslinie zu Grunde gelegt (wie es streng genommen sein sollte), so erhält man die genaue Eulersche Formel:

$$\mathbf{P} = \frac{\pi^2}{l^2}\,\mathbf{EJ} = \mathbf{9{,}87}\,\frac{\mathbf{EJ}}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 84)$$

Von dieser Kraft P, welche gerade hinreichen würde, ein Zerknicken des Stabes herbeizuführen, ist, um Sicherheit zu haben, daß ein Zerknicken nicht stattfindet, für auszuführende Konstruktionen nur ein gewisser Teil, allgemein $^1/_n$ P zu nehmen.

Danach ist die praktische Tragkraft gegen Zerknicken eines an beiden Enden gelenkartig befestigten Stabes von der Länge l (Fig. 98):

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\,\frac{\pi^2}{l^2}\,\mathbf{EJ} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 85)$$

Ist das untere Ende des Stabes fest eingespannt, das obere Ende gelenkartig befestigt (Fig. 99), so ist die Tragkraft:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{n}}\,\frac{\pi^2}{l^2}\,\mathbf{EJ} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 86)$$

---

*) Siehe Lauenstein, Mechanik. 5. Aufl. S. 51, Gl. 45).

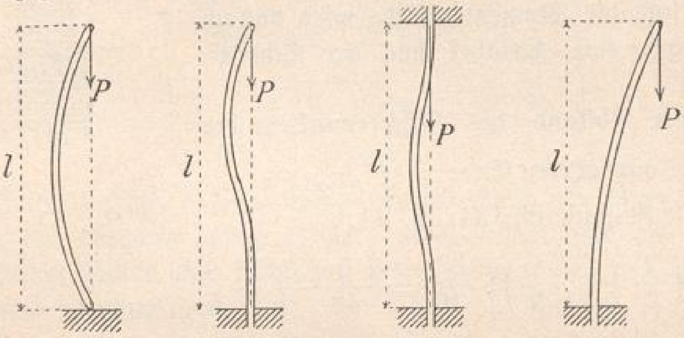
**) Vergl. R. Land in Zeitschr. d. V. d. J. 1896 S. 99 und Könen im Centralblatt der Bauverw. 1884 S. 545.

Sind beide Enden des Stabes fest eingespannt (Fig. 100), so wird:

$$P = \frac{4}{n} \frac{\pi^2}{l^2} EJ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 87)$$

Ist ein Stab von der Länge l mit seinem unteren Ende fest eingespannt, während das obere Ende vollständig frei ist, also seitlich ausweichen kann (Fig. 101), so ist derselbe anzusehen als die Hälfte eines an beiden

Fig. 98. Fig. 99. Fig. 100. Fig. 101.



Enden gelenkartig befestigten Stabes (Fig. 97) von der Länge 2 l. Man erhält daher für diesen Fall die Tragkraft P, indem man in Gl. 85): 2 l für l einsetzt, zu:

$$P = \frac{1/4}{n} \frac{\pi^2}{l^2} EJ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 88)$$

Die Formeln 85) bis 88) lassen sich zusammenfassen in die allgemeine Zerknickungsformel:

$$P = \frac{c}{n} \frac{\pi^2}{l^2} EJ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 89)$$

worin für c die in Fig. 102 Fall I bis IV angegebenen, durch die Art der Einspannung bedingten Werte einzusetzen sind.

Der Zahlenwert n ist abhängig vom Materiale, und zwar kann man annehmen:

für Schmiedeeisen . . n = 5*)
für Gußeisen . . . . n = 7,5
für Holz und Stein . n = 12,5

Der Einspannungsfall IV kommt bei Säulen nur sehr selten vor, da diese an ihrem oberen Ende mit den übrigen Konstruktionsteilen meist so verbunden sind, daß ein Ausweichen aus der ursprünglichen Stabachse ausgeschlossen ist.

*) Im Maschinenbau pflegt man bei solchen beweglichen Teilen, die auf Zerknicken zu berechnen sind (wie z. B. Kolbenstangen und Schubstangen), die Sicherheit größer zu nehmen und geht wohl bei Schmiedeeisen bis zu n = 20 und sogar weiter. Man nimmt dabei n um so größer an, je langsamer die Maschine geht.

Der Fall II liegt vor, wenn die Säule einen fest angegossenen oder angeschraubten, mit Verstärkungsrippen versehenen, genügend großen Fuß besitzt.

Am meisten kommt wohl der Fall I vor, nach welchem auch dann zu rechnen ist, wenn die Säule auf einen für sich hergestellten, breiteren Fuß aufgesetzt ist. Es genügt dann aber, die freie Länge der Säule von Oberkante Fuß aus zu bemessen.

Für den Einspannungsfall I erhält man aus Gl. 89), wenn man, wie es bei praktischen Berechnungen üblich ist, $\pi^2 = 10$ setzt:

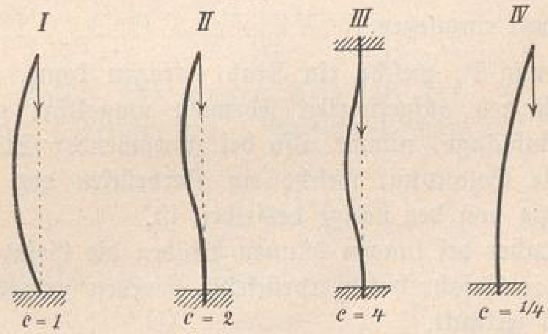
$$P = 2 \frac{EJ}{l^2} \text{ für Schmiedeeisen} \quad \ldots\ldots \quad 90)$$

$$P = \frac{4}{3} \frac{EJ}{l^2} \text{ für Gußeisen} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 91)$$

$$P = \frac{4}{5} \frac{EJ}{l^2} \text{ für Holz und Stein} \quad \ldots\ldots \quad 92)$$

Ist, was meistens der Fall, die Belastung P gegeben, so sind die Gleichungen 89) bezw. 90) bis 92) für J aufzulösen und danach die Quer-

Fig. 102.



schnittsabmessungen der Säule zu berechnen, wobei zu beachten ist, daß bei freistehenden Säulen J immer das kleinste Trägheitsmoment der Querschnittsfläche bedeutet.

Bei den aus mehreren Teilen zusammengesetzten Querschnitten der schmiedeeisernen Stützen ist es erforderlich, dieselben in solchen Entfernungen l_1 miteinander zu verbinden, daß gegen ein Einknicken der einzelnen Teile zwischen den Stützpunkten genügende Sicherheit vorhanden ist.

Bedeutet z die Anzahl der den Gesamtquerschnitt bildenden Eisen, i das kleinste Trägheitsmoment eines solchen Eisens, so wird nach Gl. 90):

$$\frac{P}{z} = 2 \frac{Ei}{l_1^2}$$

woraus sich für die größte zulässige Entfernung l_1 der Verbindungspunkte voneinander der Wert ergibt:

$$l_1 = \sqrt{\frac{z}{P} 2 Ei} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 93)$$

Zur Berechnung der Tragfähigkeit der Säulen wird außer der Gleichung 89) (von Euler) häufig auch noch die folgende für den Einspannungsfall I geltende Erfahrungsformel von Schwarz benutzt:

$$P = k F \frac{J}{J + \alpha F l^2}$$

worin k die zulässige Druckbeanspruchung des Materials und F die Querschnittsfläche der Säule bedeutet, die Größen P J l aber die bereits oben angegebene Bedeutung haben.

Der Zahlenwert α ist vom Materiale abhängig; man kann als Mittelwerte annehmen:

$$\alpha = \frac{1}{10000} \text{ für Schmiedeeisen}$$

$$\alpha = \frac{1}{5000} \text{ „ Gußeisen}$$

$$\alpha = \frac{1}{6000} \text{ „ Holz}$$

Für den Einspannungsfall II ist: 0,7 l
„ „ „ III „ 0,5 l
„ „ „ IV „ 2 l

statt l in die Formel einzusetzen.

Die Belastung P, welche ein Stab ertragen kann, ohne zerknickt zu werden, ist nach den aufgeführten Formeln umgekehrt proportional dem Quadrate der Stablänge, nimmt also bei zunehmender Stablänge rasch ab, wogegen diejenige Belastung, welche ein Zerdrücken des Stabes bewirken würde, unabhängig von der Länge desselben ist.

Während daher bei langen dünnen Stäben die Gefahr des Zerknickens größer ist als die Gefahr des Zerdrückens, werden umgekehrt kurze Stäbe eher zerdrückt als zerknickt.

Bei einer gewissen Länge wird der Stab ebenso leicht zerdrückt als zerknickt. Diese Länge ergibt sich, wenn in die allgemeine Zerknickungsformel (Gl. 89) S. 118

$$P = k \,.\, F$$

eingesetzt wird, zu:

$$l = \sqrt{\pi^2 \frac{c}{n} \frac{E J}{k F}}$$

So z. B. wird für den Belastungsfall I und für Schmiedeeisen ($\pi^2 = 10$ gesetzt):

$$l = \sqrt{2 \frac{E J}{k F}}$$

Für den vollen kreisförmigen Querschnitt mit dem Durchmesser d ist:

$$J = \frac{d^4 \pi}{64} \qquad F = \frac{d^2 \pi}{4}$$

also:

$$\frac{J}{F} = \frac{d^2}{16}$$

Nimmt man dann noch an:

$$E = 2000000$$
$$k = 1000$$

so erhält man:

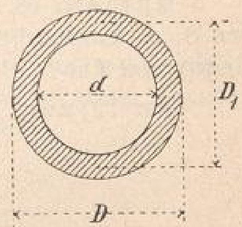
$$l = \sqrt{2 \frac{2000000}{1000} \cdot \frac{d^2}{16}} = 15,8 \cdot d$$

Für $l < 15,8 \cdot d$ braucht der Stab nur auf Druck berechnet zu werden, für $l > 15,8 \cdot d$ ist die Berechnung auf Zerknicken maßgebend.

In derselben Weise kann die Untersuchung auch für andere Querschnitte durchgeführt werden.

Bei der ersten vorläufigen Berechnung der Säulen von ringförmigem Querschnitt ist es, wenn keine Tabellen der Trägheitsmomente zur Hand sind, genügend, statt des genauen Trägheitsmomentes einen bequemeren Annäherungsausdruck zu benutzen, der sich folgendermaßen ableiten läßt (Fig. 103):

Fig. 103.



$$J = \frac{(D^4 - d^4)\,\pi}{64}$$

$$J = \frac{(D^2 - d^2)\,\pi}{4} \cdot \frac{(D^2 + d^2)}{16}$$

Der erste Faktor der rechten Seite ist der Flächeninhalt des Querschnittes. Bezeichnet man mit D_1 den mittleren Durchmesser:

$$D_1 = \frac{D + d}{2}$$

und mit δ die Wandstärke der Säule, so wird:

$$\frac{(D^2 - d^2)\,\pi}{4} = D_1\,\pi\,\delta$$

Für den zweiten Faktor der rechten Seite kann man annähernd setzen:

$$\frac{D^2 + d^2}{16} = \frac{D_1{}^2}{8}$$

woraus dann folgt:

$$J = \frac{\pi}{8} D_1{}^3 \delta$$

dafür genügend genau:

$$\mathbf{J = 0,4\, D_1{}^3 \delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 94)$$

Nach dieser Gleichung kann der Durchmesser D_1 berechnet werden, wenn für δ ein bestimmter Wert angenommen wird. Für mittlere Verhältnisse kann man etwa annehmen:

$$\delta = 2 \text{ cm bis } 2,5 \text{ cm}$$

Aufgabe 57. Welche Belastung kann ein 3 m langer rechteckiger Pfosten aus Eichenholz ertragen, dessen Querschnittsseiten $b = 16$ cm und $h = 18$ cm sind, unter Annahme des Einspannungsfalles I (Fig. 102 S. 119)?

Auflösung. In Gl. 92) S. 119 ist einzusetzen:

$$E = 120000$$

$$l = 300$$

$$J = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{18 \cdot 16^3}{12} = 6144$$

Es wird dann:

$$P = \frac{4}{5} \frac{120000 \cdot 6144}{300^2} = 6554 \text{ kg}$$

Da der Querschnitt der Säule:

$$F = 16 \cdot 18 = 288 \text{ qcm}$$

ist, so beträgt die Inanspruchnahme auf Druck:

$$k = \frac{P}{F} = \frac{6554}{288} = \infty\ 28 \text{ kg}$$

Aufgabe 58. Welche Belastung kann eine runde schmiedeeiserne Säule von 8 cm Durchmesser und 3,6 m Länge tragen, wenn beide Enden derselben fest eingespannt sind?

Auflösung. In Gl. 89) S. 118 ist zu setzen:

$$c = 4$$

$$n = 5$$

$$l = 360$$

$$E = 2000000$$

$$J = \frac{d^4 \pi}{64} = \frac{8^4 \cdot 3{,}14}{64} = 201$$

folglich wird ($\pi^2 = 10$ gesetzt):

$$P = \frac{4}{5} \cdot \frac{10 \cdot 2000000 \cdot 201}{360^2} = 24815 \text{ kg}$$

Die Tragfähigkeit auf Druck bei $k = 1000$ kg würde sein:

$$\frac{d^2 \pi}{4} \cdot k = 50{,}2655 \cdot 1000 = 50266 \text{ kg}$$

Aufgabe 59. Eine gußeiserne Säule von ringförmigem Querschnitt und 4,5 m Länge sei mit 30000 kg belastet. Wie groß muß der äußere Durchmesser D der Säule genommen werden, wenn der Fuß derselben als fest eingespannt, der Kopf als geführt betrachtet werden kann, und die Wandstärke $\delta = 2$ cm gewählt wird?

Auflösung. Aus Gl. 89) folgt:

$$J = \frac{P l^2}{E} \frac{n}{c \pi^2} = \infty \frac{P l^2 n}{10 E c}$$

Hierin ist zu setzen:

$$n = 7{,}5$$

$$c = 2$$

$$P = 30000$$

$$l = 450$$

$$E = 1000000$$

Es wird dann:

$$J = \frac{30000 \cdot 450^2 \cdot 7{,}5}{10 \cdot 1000000 \cdot 2} = 2278$$

Der mittlere Durchmesser D_1 (siehe Fig. 103) ist aus Gl. 94) S. 121 zu bestimmen:

$$2278 = 0{,}4\, D_1^3 \,.\, 2$$

$$D_1 = \sqrt[3]{\frac{2278}{2\,.\,0{,}4}} = 14{,}2 \text{ cm}$$

Danach wird der äußere Durchmesser:

$$D = D_1 + \delta = 16{,}2 \text{ cm}$$

und der innere Durchmesser:

$$d = D_1 - \delta = 12{,}2 \text{ cm}$$

Die Querschnittsfläche der Säule ist:

$$F = \frac{(D^2 - d^2)\,\pi}{4} = 89{,}22 \text{ qcm}$$

folglich beträgt die Inanspruchnahme auf Druck:

$$k = \frac{30\,000}{89{,}22} = 336 \text{ kg}$$

Aufgabe 60. Eine hölzerne Strebe von 3,2 m Länge und quadratischem Querschnitt, welche einen Druck von 16000 kg aufzunehmen hat, soll unter Annahme des Einspannungsfalles I (Fig. 102 S. 119) berechnet werden.

Auflösung. Aus Gl. 92) S. 119 folgt:

$$J = \frac{5}{4} \cdot \frac{P\,l^2}{E} = \frac{5}{4} \cdot \frac{16000\,.\,320^2}{120\,000}$$

$$J = 17\,067$$

Wird die Seite des quadratischen Querschnittes mit a bezeichnet, so ist:

$$J = \frac{a^4}{12}$$

folglich:

$$17\,067 = \frac{a^4}{12}$$

$$a = \sqrt[4]{12\,.\,17\,067} = 21{,}3 \text{ cm}$$

$$\text{Querschnitt: } a^2 = 453{,}7$$

$$\text{Inanspruchnahme auf Druck: } k = \frac{16\,000}{453{,}7} = 35 \text{ kg}$$

Aufgabe 61. Eine hohle gußeiserne runde Säule, 4,55 m lang, erfährt eine Belastung von 40000 kg. Welche Querschnittsabmessungen muß die Säule erhalten, wenn dieselbe am oberen und unteren Ende frei und in der ursprünglichen Achse geführt ist?

Auflösung. Nach Gl. 91) S. 119 ist:

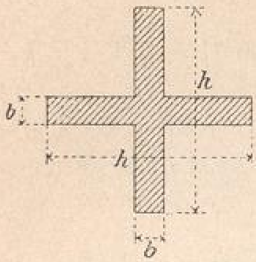
$$J = \frac{3}{4}\,\frac{P\,l^2}{E}$$

$$J = \frac{3}{4} \cdot \frac{40000\,.\,455^2}{1\,000\,000} = 6211$$

Bei einer Wandstärke von 2 cm wird nach Tabelle 14 S. 38 der äußere Durchmesser

$$D = \backsim 22 \text{ cm}$$

Fig. 104.



Innerer Durchmesser: d = 18 cm

$$\text{Querschnitt:}\ \frac{(D^2 - d^2)\,\pi}{4} = 125{,}7\ \text{qcm}$$

$$\text{Inanspruchnahme auf Druck:}\ k = \frac{40000}{125{,}7} = 318\ \text{kg}$$

Aufgabe 62. Eine gußeiserne Strebe von kreuzförmigem Querschnitt (Fig. 104) und 2,5 m Länge sei mit P = 15000 kg belastet. Sie sei mittels Bolzenverbindung an die übrigen Konstruktionsteile angeschlossen, so daß der Einspannungsfall I (Fig. 102 S. 119) vorliegt. Welche Querschnittsabmessungen sind der Strebe zu geben?

Auflösung. Nimmt man an, daß die eine Rippe nur zur Aussteifung der andern dient, was zulässig ist, so ist zu setzen:

$$J = \frac{b\,h^3}{12}$$

Nach Gl. 91) S. 119 ist aber:

$$J = \frac{3}{4}\,\frac{P\,l^2}{E} = \frac{3}{4}\,\frac{15000\,.\,250^2}{1000000} = 703$$

folglich:

$$\frac{b\,h^3}{12} = 703$$

Wählt man:

$$b = 2\ \text{cm}$$

so wird:

$$h = \sqrt[3]{\frac{12\,.\,703}{2}} = \sim 16\ \text{cm}$$

Die Querschnittsfläche ist dann:

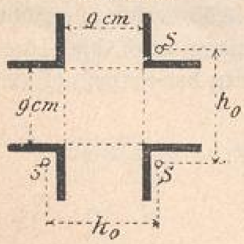
$$F = 16\,.\,2 + (16 - 2)\,2 = 60\ \text{qcm}$$

folglich die Inanspruchnahme auf Druck:

$$k = \frac{15000}{60} = 250\ \text{kg}$$

Aufgabe 63. Eine schmiedeeiserne Stütze von 5 m Länge sei mit 30000 kg belastet. Der Querschnitt soll aus 4 Winkeleisen zusammengesetzt sein und es sollen dabei die in Fig. 105 eingeschriebenen Maße eingehalten werden. Die Stütze sei am unteren Ende fest eingespannt, am oberen in der ursprünglichen Achse geführt. Welche Winkeleisen sind zu verwenden?

Fig. 105.



Auflösung. Setzt man in Gl. 89) S. 118:

$$n = 5$$
$$c = 2$$

so ergibt sich das erforderliche Trägheitsmoment zu:

$$J = \frac{5}{2}\,\frac{P\,l^2}{\pi^2\,E} = \sim \frac{5}{2}\,.\,\frac{30000\,.\,500^2}{10\,.\,2000000} = 937{,}5$$

Wird mit F die Querschnittsfläche eines Winkeleisens und mit h_0 der Abstand der Schwerpunkte bezeichnet, so ist:

$$J = 4\,F\,.\left(\frac{h_0}{2}\right)^2 = F\,.\,h_0^2$$

folglich:

$$F = \frac{J}{h_o^2} = \frac{937{,}5}{h_o^2}$$

Die Größe h_o wird abgeschätzt zu:

$$h_o = 12{,}2 \text{ cm}$$
$$h_o^2 = 149 \text{ qcm}$$

Danach:

$$F = \frac{937{,}5}{149} = 6{,}3 \text{ qcm}$$

Gewählt wird nach Tabelle 4 § 6 S. 31 das Winkeleisen:

$$5{,}5 \times 5{,}5 \times 0{,}6$$

mit:

$$F = 6{,}31 \text{ qcm}$$

Der Gesamtquerschnitt der Stütze beträgt dann:

$$4\,F = 25{,}24 \text{ qcm}$$

und die Inanspruchnahme auf Druck würde sein:

$$k = \frac{30\,000}{25{,}24} = 1188 \text{ kg}$$

Der Querschnitt würde bei einer zulässigen Inanspruchnahme von $k = 1000$ daher zu schwach sein und die Stütze ist in diesem Falle nicht auf Zerknicken, sondern auf Zerdrücken zu berechnen. Die erforderliche Querschnittsfläche ergibt sich aus:

$$4\,F = \frac{30\,000}{1000} = 30$$

zu:

$$F = 7{,}5 \text{ qcm}$$

Gewählt wird das Winkeleisen:

$$5{,}5 \times 5{,}5 \times 0{,}8$$

mit:

$$F = 8{,}23 \text{ qcm}$$

Das kleinste Trägheitsmoment dieses Winkels ist:

$$i = 9{,}35$$

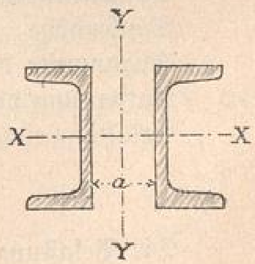
folglich sind nach Gl. 93) S. 119 die Winkel untereinander zu verbinden in Abständen von höchstens der Größe:

$$l_1 = \sqrt{\frac{4\,.\,2\,.\,2000000\,.\,9{,}35}{30000}} = 71 \text{ cm}$$

d. h. es sind mindestens 6, besser 7 Verbindungen auszuführen.

Eine recht zweckmäßige Querschnittsform für schmiedeeiserne Säulen bilden zwei miteinander verbundene ⊏-Eisen, bei denen der Zwischenraum a so groß genommen wird, daß die Trägheitsmomente in Bezug auf die Achsen X X und Y Y einander gleich sind. (Fig. 106.)

Fig. 106.



Es ergeben sich dann folgende Werte für a:

Nr. des ⊏-Eisens	$6^1/_2$	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
a =	1,54	2,72	4,14	5,50	6,82	8,16	9,48	10,78	12,22	13,34	14,60	15,94	17,24

Aufgabe 64. Eine Säule aus zwei ⊏-Eisen von 5,5 m Höhe ist belastet mit P = 36000 kg. Welches Profil ist zu wählen unter Voraussetzung des Einspannungsfalles I Fig. 102 S. 119?

Auflösung. Nach Gl. 90) S. 119 ist:

$$J = \frac{P\,l^2}{2\,E} = \frac{36000\,.\,550^2}{2\,.\,2000000} = 2722{,}5$$

Für jedes der beiden ⊏-Eisen ist danach erforderlich:

$$J_x = \frac{J}{2} = 1361{,}25$$

Nach Tabelle 1 § 6 S. 28 genügt Nr. 18 mit:

$$J_x = 1354 \text{ und } F = 28 \text{ qcm}$$

Die Beanspruchung auf Druck beträgt:

$$k = \frac{36000}{2\,.\,28} = 643 \text{ kg}$$

Das kleinste Trägheitsmoment eines ⊏-Eisens ist:

$$J_{min} = 114$$

Die beiden ⊏-Eisen sind daher miteinander zu verbinden in Abständen von:

$$l_1 = \sqrt{\frac{2\,.\,2\,.\,2000000\,.\,114}{36000}} = 159 \text{ cm}$$

Danach sind erforderlich mindestens 3 Verbindungen.

Beispiel der Berechnung von Balken, Unterzügen und Säulen für ein einfaches zweistöckiges Gebäude. (Fig. 107.)

1. Oberer Stock. (Holzbalken und eiserner Unterzug.)

Es sollen folgende Angaben zu Grunde gelegt werden:

Säulenentfernung . . . . . . L = 480 cm
Säulenhöhe . . . . H = 500 cm
Spannweite der Balken . . . . l = 400 cm
Entfernung der Balken voneinander B = 60 cm
Belastung einschließlich Eigengewicht p = 500 kg für ein Quadratmeter.

a) Holzbalken.

Die Belastung eines Trägers ist:

$$P = 4\,.\,0{,}6\,.\,500 = 1200 \text{ kg}$$

folglich das größte Moment:

$$\mathfrak{M} = \frac{1200 \,.\, 400}{8} = 60000$$

Bei k = 60 kg wird:

$$W = \frac{60000}{60} = 1000 = \frac{b\,h^2}{6}$$

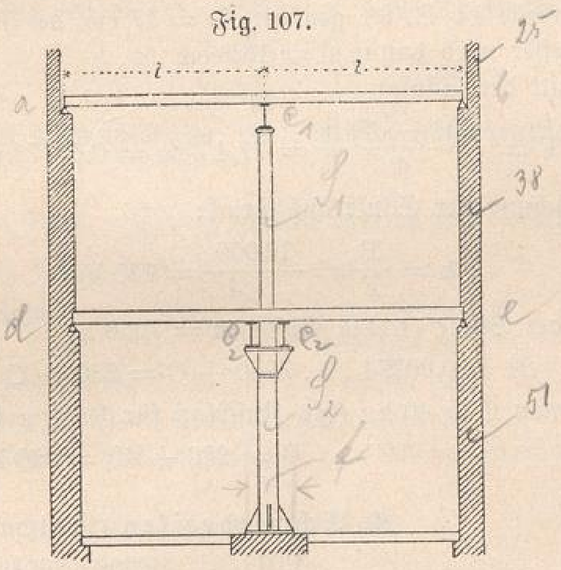
Nimmt man $b = \frac{3}{4}\,h$, so folgt:

$$\frac{3\,h^3}{4 \,.\, 6} = 1000$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{4 \,.\, 6 \,.\, 1000}{3}} = \sqrt[3]{8000} = 20 \text{ cm}$$

$$b = \frac{3}{4}\,h = \frac{3}{4} \,.\, 20 = 15 \text{ cm}$$

Fig. 107.



b) Eiserner Unterzug.

Die Belastung ist, da die Balken als Träger auf drei Stützen $\frac{5}{8}$ ihrer Belastung auf den Unterzug übertragen:

$$P = \frac{5}{8} \,.\, L \,.\, 2\,l \,.\, p = \frac{5}{8} \,.\, 4{,}8 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 500 = 12000 \text{ kg}$$

Es genügt vollkommen, diese Belastung als gleichförmig verteilt anzunehmen; es wird dann:

$$\mathfrak{M} = \frac{12000 \,.\, 480}{8} = 720000$$

und für k = 1000 kg:

$$W = \frac{720000}{1000} = 720$$

Nach Tabelle 2 § 6 S. 29 ist erforderlich ein I-Eisen Nr. 32 mit $W_x = 781$.

Die Beanspruchung wird dann genau:

$$k = \frac{720\,000}{781} = 922 \text{ kg/qcm}$$

c) Säule.

Die Belastung der Säule ist gleich der des Unterzuges, also:

$$P = 12\,000 \text{ kg}$$

α) Gußeisen (ringförmiger Querschnitt).

$$J = \frac{3}{4}\,\frac{P\,H^2}{E} = \frac{3\,.\,12\,000\,.\,500^2}{4\,.\,1\,000\,000} = 2250$$

Nach Tabelle 14 S. 38 genügt: $D = 17$ cm bei $\delta = 1{,}6$ cm. Der innere Durchmesser wird dann: $d = 13{,}8$ cm.

Querschnitt der Säule:

$$F = \frac{(D^2 - d^2)\,\pi}{4} = 77{,}4 \text{ qcm} = 0{,}00774 \text{ qm}$$

Beanspruchung der Säule auf Druck:

$$k = \frac{P}{F} = \frac{12\,000}{77{,}4} = 155 \text{ kg}$$

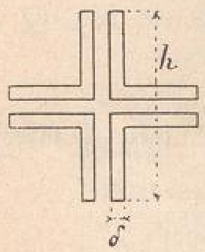
Gewicht der Säule (1 cbm Gußeisen = 7250 kg):

$$G = 0{,}00774\,.\,5\,.\,7250 + C = 280 + C$$

Rechnet man $C = 40$ kg (als Zuschlag für Kopf u. s. w.), so wird:

$$G = 280 + 40 = 320 \text{ kg}$$

Fig. 108.



β) Schmiedeeisen (Kreuzquerschnitt).

$$J = \frac{P\,H^2}{2\,E} = \frac{12\,000\,.\,500^2}{2\,.\,2\,000\,000} = 750$$

Zur vorläufigen Bestimmung der Abmessungen der erforderlichen Winkeleisen kann man statt des genauen Trägheitsmoments des Kreuzquerschnittes genügend genau setzen (Fig. 108):

$$J = \frac{2\,\delta\,h^3}{12}$$

Für $\delta = 1$ cm wird dann:

$$\frac{2\,.\,1\,.\,h^3}{12} = 750$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{12\,.\,750}{2}} = 16{,}5 \text{ cm}$$

Danach genügen Winkel $7,5 \times 7,5 \times 1$ mit 1,5 cm Zwischenraum. Die Querschnittsfläche eines Winkels ist $f = 14,1$ qcm, folglich ist die Beanspruchung auf Druck:

$$k = \frac{P}{4f} = \frac{12\,000}{4\,.\,14,1} = 213 \text{ kg}$$

Das Gewicht eines Winkels beträgt $g = 11$ kg für ein Meter Länge; danach berechnet sich das Gewicht der Säule zu:

$$G = 4\,.\,H\,.\,g + C$$

$$G = 4\,.\,5\,.\,11 + C = 220 + C$$

$C = 30$ geschätzt gibt:

$$G = 220 + 30 = 250 \text{ kg}$$

Das kleinste Trägheitsmoment eines Winkels ist:

$$i = 29,8$$

folglich wird nach Gl. 93) S. 119, worin $z = 4$ einzusetzen ist:

$$l_1 = \sqrt{\frac{4\,.\,2\,.\,2\,000\,000\,.\,29,8}{12\,000}} = 199 \text{ cm}$$

Es sind daher 2 Verbindungen der 4 Winkel untereinander erforderlich.

2. Unterer Stock. (Eiserne Balken und eiserner Unterzug.)

Die gegebenen Werte seien:

Säulenentfernung	$L = 480$ cm
Säulenhöhe	$H = 540$ cm
Spannweite der Balken	$l = 387$ cm
Entfernung der Balken voneinander	$B = 96$ cm
Belastung einschließlich Eigengewicht	$p = 800$ kg für ein Quadratmeter.

a) Eiserne Balken.

Belastung eines Balkens:

$$P = 3,87\,.\,0,96\,.\,800 = 2972 = \sim 3000 \text{ kg}$$

Erforderliches Widerstandsmoment:

$$W = \frac{3000\,.\,387}{8\,.\,1000} = 145$$

Gewählt: I-Eisen Nr. 18.

b) Eiserner Unterzug.

Belastung:

$$P = {}^5/_8\,.\,4,8\,.\,2\,.\,3,87\,.\,800 = 18\,576$$

Erforderliches Widerstandsmoment:

$$W = \frac{18\,576\,.\,480}{8\,.\,1000} = 1115$$

Gewählt: Zwei I-Eisen Nr. 29.

c) Säule.

Die Säule wird belastet durch den Unterzug mit 18576 kg; außerdem hat dieselbe die Belastung und das Eigengewicht der Säule des oberen Stockes aufzunehmen.

α) Gußeisen (ringförmiger Querschnitt).

$$P = 18576 + 12000 + 320 = 30896 \text{ kg}$$

Das erforderliche Trägheitsmoment ist:

$$J = \frac{3}{4}\,\frac{P H^2}{E} = \frac{3}{4}\,\frac{30896 \,.\, 540^2}{1000000} = 6757$$

Nach Tabelle 14 S. 38 genügt: $D = 22$ cm bei $\delta = 2{,}2$ cm
$d = 17{,}6$ cm

Querschnitt:

$$F = \frac{(D^2 - d^2)\,\pi}{4} = 137 \text{ qcm}$$

Beanspruchung auf Druck:

$$k = \frac{30896}{137} = 226 \text{ kg}$$

Gewicht:

$$G = 0{,}0137 \,.\, 5{,}4 \,.\, 7250 + C = 536 + C$$

$C = 64$ kg geschätzt gibt: $G = 600$ kg

β) Schmiedeeisen (Kreuzquerschnitt).

$$P = 18576 + 12000 + 250 = 30826 \text{ kg}$$

$$J = \frac{P H^2}{2 E} = \frac{30826 \,.\, 540^2}{2 \,.\, 2000000} = 2247$$

Für den Querschnitt Fig. 108 ist dann annähernd:

$$\frac{2\,\delta\, h^3}{12} = 2247$$

und für $\delta = 1{,}2$ cm:

$$h = \sqrt[3]{\frac{12 \,.\, 2247}{2 \,.\, 1{,}2}} = 22{,}4 \text{ cm}$$

Danach sind erforderlich Winkel $10 \times 10 \times 1{,}2$ mit 2,4 cm Zwischenraum Querschnitt eines Winkels:

$$f = 22{,}7 \text{ qcm}$$

Beanspruchung auf Druck:

$$k = \frac{P}{4 f} = \frac{30826}{4 \,.\, 22{,}7} = 339 \text{ kg}$$

Gewicht eines Winkels:

$g = 17{,}7$ kg für ein Meter Länge

Gewicht der Säule:

$$G = 4 \,.\, 5{,}4 \,.\, 17{,}7 + C = 382 + C$$

$C = 58$ kg geschätzt gibt: $G = 382 + 58 = 440$ kg

Das kleinste Trägheitsmoment eines Winkels ist:

$$i = 86{,}2$$

folglich wird nach Gl. 93) S. 119 für $z = 4$:

$$l_1 = \sqrt{\frac{4 \,.\, 2 \,.\, 2\,000\,000 \,.\, 86{,}2}{30\,826}} = 212 \text{ cm}$$

Es sind daher zwei Verbindungen erforderlich.

d) Säulenfuß.

Nimmt man die zulässige Beanspruchung des Unterstützungsquaders zu $k = 18$ kg an, so ergibt sich die nötige Auflagerfläche der gußeisernen Säule zu:

$$F = \frac{30\,896 + 600}{18} = 1750 \text{ qcm}$$

Die Seite a des quadratischen Säulenfußes folgt dann aus:

$$F = a^2 - \frac{d^2 \pi}{4}$$

$$1750 = a^2 - \frac{17{,}6^2 \,.\, 3{,}14}{4}$$

$$a = \sqrt{1993} = \sim 45 \text{ cm}$$

Für die schmiedeeiserne Säule wird:

$$F = a^2 = \frac{30\,826 + 440}{18} = 1737 \text{ qcm}$$

$$a = \sqrt{1737} = 42 \text{ cm}$$

§ 15.

Widerstand gegen Verdrehung.

Ein an einem Ende fest eingespannter prismatischer Stab wird durch ein am anderen freien Ende wirkendes Kräftepaar, dessen Moment $\mathfrak{M}$ sei, auf Verdrehungsfestigkeit in Anspruch genommen, indem das Kräftepaar den Stab um seine Längsachse zu verdrehen oder zu verwinden strebt.

Der Stab soll hier als voller Kreiscylinder vorausgesetzt werden und es soll dabei angenommen werden, daß das Kräftepaar in einer Ebene wirkt, welche rechtwinklig zu der Achse des Cylinders steht.

Denkt man sich den Cylinder zusammengesetzt aus einer sehr großen Anzahl sehr dünner, unter sich gleicher Scheiben, so wird bei einer, durch das Kräftepaar bewirkten, eintretenden Verwindung jede einzelne Scheibe sich, durch eine geringe Drehung um ihren Mittelpunkt, gegen die nebenliegende Scheibe verschieben. Als innere Widerstände treten daher hier Schubspannungen auf,