Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

§ 15. Widerstand gegen Verdrehung.

Das kleinste Trägheitsmoment eines Winkels ist:

$$i = 86{,}2$$

folglich wird nach Gl. 93) S. 119 für $z = 4$:

$$l_1 = \sqrt{\frac{4 \,.\, 2 \,.\, 2\,000\,000 \,.\, 86{,}2}{30\,826}} = 212 \text{ cm}$$

Es sind daher zwei Verbindungen erforderlich.

d) Säulenfuß.

Nimmt man die zulässige Beanspruchung des Unterstützungsquaders zu $k = 18$ kg an, so ergibt sich die nötige Auflagerfläche der gußeisernen Säule zu:

$$F = \frac{30\,896 + 600}{18} = 1750 \text{ qcm}$$

Die Seite a des quadratischen Säulenfußes folgt dann aus:

$$F = a^2 - \frac{d^2 \pi}{4}$$

$$1750 = a^2 - \frac{17{,}6^2 \,.\, 3{,}14}{4}$$

$$a = \sqrt{1993} = \infty\, 45 \text{ cm}$$

Für die schmiedeeiserne Säule wird:

$$F = a^2 = \frac{30\,826 + 440}{18} = 1737 \text{ qcm}$$

$$a = \sqrt{1737} = 42 \text{ cm}$$

§ 15.

Widerstand gegen Verdrehung.

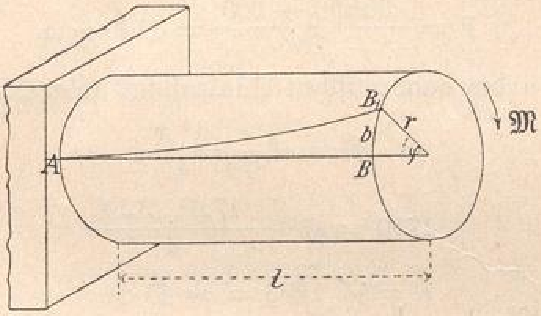
Ein an einem Ende fest eingespannter prismatischer Stab wird durch ein am anderen freien Ende wirkendes Kräftepaar, dessen Moment $\mathfrak{M}$ sei, auf Verdrehungsfestigkeit in Anspruch genommen, indem das Kräftepaar den Stab um seine Längsachse zu verdrehen oder zu verwinden strebt.

Der Stab soll hier als voller Kreiscylinder vorausgesetzt werden und es soll dabei angenommen werden, daß das Kräftepaar in einer Ebene wirkt, welche rechtwinklig zu der Achse des Cylinders steht.

Denkt man sich den Cylinder zusammengesetzt aus einer sehr großen Anzahl sehr dünner, unter sich gleicher Scheiben, so wird bei einer, durch das Kräftepaar bewirkten, eintretenden Verwindung jede einzelne Scheibe sich, durch eine geringe Drehung um ihren Mittelpunkt, gegen die nebenliegende Scheibe verschieben. Als innere Widerstände treten daher hier Schubspannungen auf, welche, solange die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird, dem äußeren Kräftepaare das Gleichgewicht halten und die einzelnen Scheiben in ihre ursprüngliche Lage zurückzudrehen streben.

Man kann sich auch hier wieder vorstellen, es bestehe der Cylinder aus einzelnen, der Achse parallelen Fasern. Diese kommen bei einer eintretenden Verdrehung in eine solche Lage, daß jede einzelne Faser die Gestalt einer Schraubenlinie annimmt. Die von der Achse am weitesten entfernten, also die in der Mantelfläche des Cylinders liegenden Fasern, erleiden die größte Ablenkung, während die eine, mit der Achse des Cylinders zusammenfallende Faser in ihrer ursprünglichen Lage bleibt und nur in sich selbst verwunden wird.

Fig. 109.



Es sei nun AB (Fig. 109) die ursprüngliche Lage einer in der Mantelfläche eines Cylinders von der Länge l liegenden Faser, welche nach eingetretener Verdrehung in die Lage AB_1 gekommen sein möge. Es stellt dann der Bogen

$$BB_1 = b$$

die Verschiebung des Endpunktes B dar. Der diesem Bogen entsprechende Winkel φ, d. i. derjenige Winkel, um welchen der durch B rechtwinklig zur Achse des Cylinders gelegte Querschnitt gegen den Querschnitt an der Einspannungsstelle A unter Einwirkung des Kraftmomentes M verdreht ist, heißt der **Verdrehungswinkel**. Die bei dieser Verdrehung in der Mantelfläche des Cylinders auftretende Schubspannung sei = t.

Die Verschiebung des Punktes B, also der Bogen BB_1, wird um so größer ausfallen, je größer das Kraftmoment wird. Man kann sich vorstellen, das Kraftmoment erreichte eine solche Größe, daß unter Einwirkung desselben der Verdrehungsbogen BB_1 gleich der Länge l des Cylinders würde, wenn das Material eine solche Verdrehung überhaupt zuließe und die Elastizitätsgrenze dabei nicht überschritten würde. Wird die dabei in der Mantelfläche des Cylinders auftretende Schubspannung mit E_1 bezeichnet, so kann man folgendermaßen schließen:

Bei der Spannung t entsteht die Verschiebung b
" " " E_1 " " " l

Da sich nun erfahrungsmäßig innerhalb der Elastizitätsgrenze die Verschiebungen wie die Spannungen verhalten, so erhält man die Proportion

$$\frac{b}{l} = \frac{t}{E_1}$$

oder:

$$b = \frac{t\,l}{E_1}$$

Bezeichnet man mit r den Halbmesser des kreisförmigen Querschnittes, so ist:

$$b = r \cdot \varphi$$

Danach erhält man für den Verdrehungswinkel die Größe:

$$\varphi = \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{E_1}} \frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}} \quad \text{. . . . . 95)}$$

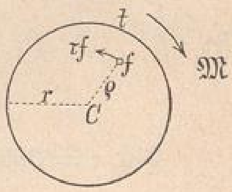
E_1 wird der Schub-Elastizitätsmodul genannt und ist durch Versuche bestimmt zu:

$$\mathbf{E_1 = 0{,}4 \cdot E} \quad \text{. . . . . 96)}$$

wobei E den Elastizitätsmodul für Zug oder Druck bedeutet (siehe § 1 S. 3).

Für den Zustand des Gleichgewichtes muß das Moment des verdrehenden Kräftepaares gleich sein dem Momente sämtlicher, in einem Querschnitte des Cylinders auftretenden Verdrehungswiderstände in Bezug auf den Mittelpunkt des Querschnitts.

Fig. 110.



Es sei Fig. 110 ein solcher Kreisquerschnitt mit dem Halbmesser r und f ein Flächenteilchen desselben im Abstande ϱ vom Mittelpunkte C. Ist τ die Schubspannung für ein Quadratcentimeter an dieser Stelle, so ist der auf das Flächenteilchen f kommende Verdrehungswiderstand $= \tau f$ und das Moment desselben in Bezug auf den Mittelpunkt $= \tau f \varrho$.

Danach ist:

$$\mathfrak{M} = \Sigma(\tau f \varrho)$$

Ist nun t die am äußeren Umfange, also in der Entfernung r vom Mittelpunkte auftretende Schubspannung, so besteht, da sich die Spannungen verhalten wie die Entfernungen vom Mittelpunkte, die Proportion:

$$\frac{\tau}{t} = \frac{\varrho}{r}$$

oder:

$$\tau = \frac{t}{r} \varrho$$

Nach Einsetzung dieses Wertes erhält man für das Moment:

$$\mathfrak{M} = \frac{t}{r} \Sigma(f \varrho^2)$$

Der Ausdruck $\Sigma(f\varrho^2)$ bedeutet die Summe aller Flächenteilchen, multipliziert mit dem Quadrate ihrer Abstände von der durch den Mittelpunkt des

Querschnitts gelegten Drehachse, ist also das zentrale oder polare Trägheitsmoment der Querschnittsfläche. Wird dasselbe mit J_c bezeichnet, so ist:

$$\mathfrak{M} = t \frac{J_c}{r} \qquad 97)$$

Ist d der Durchmesser des Kreisquerschnitts, so ist nach Gl. 22) S. 23:

$$J_c = \frac{d^4 \pi}{32}$$

Setzt man dann noch in Gl. 97) $r = \frac{d}{2}$, so erhält man:

$$\mathfrak{M} = \frac{d^3 \pi}{16} . t \qquad 98)$$

Hieraus ergibt sich der Durchmesser d einer Welle, welche durch das Moment:

$$\mathfrak{M} = P R$$

auf Verdrehung in Anspruch genommen wird, zu:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi t}} . \sqrt[3]{P R} \qquad 99)$$

oder da:

$$\frac{16}{\pi} = \frac{16}{3,14} = 5,093 = \backsim 5,1$$

ist:

$$d = \sqrt[3]{\frac{5,1 . P R}{t}} \qquad 100)$$

Für $t = 365$ (bei Schmiedeeisen) wird:

$$d = \sqrt[3]{\frac{5,1}{365} P R} = 0,24 \sqrt[3]{P R} \qquad 101)$$

Ist das verdrehende Moment nicht unmittelbar gegeben, sondern die Anzahl der zu übertragenden Pferdekräfte $= N$ und die Anzahl der Umdrehungen in der Minute $= n$, so ist zu setzen*):

$$N = \frac{P v}{75} = P \frac{2 R \pi n}{75 . 60 . 100}$$

woraus folgt:

$$P R = 71620 . \frac{N}{n} \qquad 102)$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in Gl. 100) entsteht leicht:

$$d = 10 \sqrt[3]{\frac{365}{t} \frac{N}{n}} \qquad 103)$$

und für $t = 365$ (bei Schmiedeeisen):

$$d = 10 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \qquad 104)$$

---

*) Vergl. Lauenstein, Mechanik, 5. Aufl., § 5 Gl. 18.

Lange dünne Wellen (Transmissionswellen) werden unter der Annahme berechnet, daß der Verdrehungswinkel φ für ein Meter Länge $^1/_4{}^0$ betragen soll.

Nach Gl. 95) S. 133 ist:

$$\varphi = \frac{t}{E_1}\frac{l}{r} = \frac{t}{E_1} \cdot \frac{2\,l}{d}$$

Setzt man hierin für t den sich aus Gl. 98) ergebenden Wert:

$$t = \frac{16\,\mathfrak{M}}{d^3\,\pi} = \frac{16\,P\,R}{d^3\,\pi}$$

so wird:

$$\varphi = \frac{16\,P\,R}{d^3\,\pi\,E_1}\,\frac{2\,l}{d}$$

Der Winkel φ ist hier in Winkeleinheiten ausgedrückt. Die Winkeleinheit ist bekanntlich ein Winkel, dessen Bogen gleich dem Halbmesser ist, und hat, in Graden angegeben, die Größe:

$$\sphericalangle\, 1 = \frac{360}{2\,\pi} = 57^0\,17'\,44{,}8''$$

Danach ist:

$$\varphi^0 = \widehat{\varphi}\,\frac{360}{2\,\pi}$$

Setzt man hierin für $\widehat{\varphi}$ den oben gefundenen Wert ein, so erhält man unter Berücksichtigung der Gl. 102):

$$\varphi^0 = \frac{360}{2\,\pi}\;\frac{16\,.\,71620\,\frac{N}{n}\,2\,l}{d^3\,\pi\,E_1\,d}$$

woraus sich für die Zahlenwerte:

$$\varphi = {}^1/_4{}^0$$
$$l = 100\text{ cm}$$
$$E_1 = 0{,}4\,E = 800\,000$$

durch Auflösung für d der Wert ergibt:

$$\mathbf{d = 12\sqrt[4]{\frac{N}{n}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 105)$$

Abgesehen von dieser obigen, schon von Redtenbacher gegebenen Ableitung der Gl. 105), die sich auf die Voraussetzung stützt, daß der Verdrehungswinkel für ein Meter Länge $^1/_4{}^0$ betragen soll, kann die Gleichung auch abgeleitet werden unter Zugrundelegung einer bei kleineren Wellen kleineren, bei größeren Wellen größeren zulässigen Schubspannung. Mit anderen Worten, man nimmt die Schubspannung verhältnisgleich dem Durchmesser der Welle und setzt:

$$t = C\,d$$

wobei C eine vom Materiale abhängige durch Erfahrung festgesetzte Zahlengröße bedeutet.

Für Schmiedeeisen nimmt man:

$$t = 17,6\,d$$

was z. B. bei einer Welle von 20 cm Durchmesser einer Beanspruchung von 352 kg für das Quadratcentimeter gleichkommen würde. (Stärkere Wellen werden nicht mehr nach Gl. 105), sondern nach Gl. 101) bezw. 104) unter Annahme eines bestimmten, unveränderlichen Wertes für t berechnet.)

Aus der Gleichung

$$\varphi^0 = \widehat{\varphi}\,\frac{360}{2\pi} = \frac{t}{E_1}\,\frac{2\,l}{d}\,\frac{360}{2\pi}$$

folgt nach der obigen Voraussetzung $(t = C\,d)$:

$$\varphi^0 = \frac{C}{E_1}\,\frac{360}{\pi}\,l$$

Der Verdrehungswinkel ist danach unabhängig vom Durchmesser der Welle, wächst aber in geradem Verhältnis mit der Länge derselben.

Aus den Gl. 98) und 102) S. 134 folgt:

$$71\,620\,\frac{N}{n} = \frac{d^3\,\pi}{16}\,t$$

Setzt man hierin: $t = 17,6\,d$, so ergibt sich durch Auflösung für d ebenfalls wieder der Wert Gl. 105).

Aufgabe 65. Auf eine schmiedeeiserne Welle wirke eine Kraft $P = 2400$ kg am Hebelarme $R = 50$ cm. Wie groß muß der Durchmesser der Welle genommen werden bei einer Inanspruchnahme von $t = 400$ kg?

Auflösung. Nach Gl. 100) S. 134 ist zu setzen:

$$d = \sqrt[3]{\frac{5,1}{400}}\,.\,\sqrt[3]{2400\,.\,50} = \infty\ 11,5\ \text{cm}$$

Aufgabe 66. Wie groß ist der Verdrehungswinkel der vorigen Welle, wenn diese eine Länge von 15 m hat?

Auflösung. In Gl. 95) S. 133 ist zu setzen:

$$t = 400$$
$$E_1 = 0,4\,.\,2000\,000 = 800\,000$$
$$l = 1500$$
$$r = \frac{d}{2} = 5,75$$

Es wird dann:

$$\varphi = \frac{400}{800\,000}\,\frac{1500}{5,75} = 0,13$$

oder in Graden:

$$\varphi^0 = 0,13\,.\,(57^0\,17'\,44,8'') = 7^0\,26'\,54,4''$$

Aufgabe 67. Es soll der Durchmesser einer schmiedeeisernen Welle berechnet werden, welche eine mechanische Arbeit von 36 Pferdekräften zu übertragen hat und 60 Umdrehungen in der Minute macht.

Nach Gl. 104) ist (bei $t = 365$ kg/qcm):

$$d = 10 \sqrt[3]{\frac{36}{60}} = 10 \sqrt[3]{0,6} = 8,4 \text{ cm}$$

Der Verdrehungswinkel dieser Welle beträgt für 1 m Länge nach Gl. 95) S. 133:

$$\varphi = \frac{365}{800000} \cdot \frac{100}{4,2} = \frac{1}{92}$$

oder in Graden:

$$\varphi^0 = \frac{57^0\,17'\,44,8''}{92} = 37'\,22''$$

Nach Gl. 105) S. 135 würde sich der Durchmesser der Welle ergeben zu:

$$d = 12 \sqrt[4]{\frac{36}{60}} = 10,6 \text{ cm}$$

§ 16.

Zusammengesetzte Widerstände.

1. Biegung und Zug oder Druck.

Wirken in der Längsrichtung eines prismatischen Stabes vom Querschnitt F zwei gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Zug- oder Druckkräfte P, so entsteht dadurch in dem Stabe eine Zug-, bezw. Druckspannung k_1, welche sich gleichförmig über den Querschnitt des Stabes verteilt und die Größe hat:

$$k_1 = \pm \frac{P}{F}$$

Wirken gleichzeitig, rechtwinklig zu der Längsrichtung des Stabes, Kräfte, welche denselben zu verbiegen streben, und ist W das Widerstandsmoment der Querschnittsfläche, $\mathfrak{M}$ das größte Biegungsmoment, so ist die dadurch bewirkte Biegungsspannung:

$$k_2 = \pm \frac{\mathfrak{M}}{W}$$

wobei das Zeichen + für Zugspannungen, das Zeichen — für Druckspannungen gelten soll. Die Summe der Spannungen k_1 und k_2 darf höchstens gleich der zulässigen Inanspruchnahme des Materials sein, daher:

$$\mathbf{k} = \pm \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{F}} \pm \frac{\mathfrak{M}}{\mathbf{W}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 106)$$

Ist z. B. der Stab mit seinen beiden Enden frei aufgelagert und durch Gewichte belastet, so bewirken letztere eine Durchbiegung des Stabes; dabei entstehen in den oberen Fasern Druckspannungen, in den unteren Fasern Zugspannungen. Durch Hinzutreten der in der Längsrichtung des Stabes wirkenden Zugkräfte P erleiden die unteren Fasern dann die Gesamt-Zugspannung:

$$k = + \frac{P}{F} + \frac{\mathfrak{M}}{W}$$