Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

§ 16. Zusammengesetzte Widerstände.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78212

Nach Gl. 104) ist (bei $t = 365$ kg/qcm):

$$d = 10 \sqrt[3]{\frac{36}{60}} = 10 \sqrt[3]{0{,}6} = 8{,}4 \text{ cm}$$

Der Verdrehungswinkel dieser Welle beträgt für 1 m Länge nach Gl. 95) S. 133:

$$\varphi = \frac{365}{800\,000} \cdot \frac{100}{4{,}2} = \frac{1}{92}$$

oder in Graden:

$$\varphi^0 = \frac{57^0\ 17'\ 44{,}8''}{92} = 37'\ 22''$$

Nach Gl. 105) S. 135 würde sich der Durchmesser der Welle ergeben zu:

$$d = 12 \sqrt[4]{\frac{36}{60}} = 10{,}6 \text{ cm}$$

§ 16.

Zusammengesetzte Widerstände.

1. Biegung und Zug oder Druck.

Wirken in der Längsrichtung eines prismatischen Stabes vom Querschnitt F zwei gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Zug- oder Druckkräfte P, so entsteht dadurch in dem Stabe eine Zug-, bezw. Druckspannung k_1, welche sich gleichförmig über den Querschnitt des Stabes verteilt und die Größe hat:

$$k_1 = \pm \frac{P}{F}$$

Wirken gleichzeitig, rechtwinklig zu der Längsrichtung des Stabes, Kräfte, welche denselben zu verbiegen streben, und ist W das Widerstandsmoment der Querschnittsfläche, $\mathfrak{M}$ das größte Biegungsmoment, so ist die dadurch bewirkte Biegungsspannung:

$$k_2 = \pm \frac{\mathfrak{M}}{W}$$

wobei das Zeichen + für Zugspannungen, das Zeichen — für Druckspannungen gelten soll. Die Summe der Spannungen k_1 und k_2 darf höchstens gleich der zulässigen Inanspruchnahme des Materials sein, daher:

$$\mathbf{k = \pm \frac{P}{F} \pm \frac{\mathfrak{M}}{W}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 106)$$

Ist z. B. der Stab mit seinen beiden Enden frei aufgelagert und durch Gewichte belastet, so bewirken letztere eine Durchbiegung des Stabes; dabei entstehen in den oberen Fasern Druckspannungen, in den unteren Fasern Zugspannungen. Durch Hinzutreten der in der Längsrichtung des Stabes wirkenden Zugkräfte P erleiden die unteren Fasern dann die Gesamt-Zugspannung:

$$k = + \frac{P}{F} + \frac{\mathfrak{M}}{W}$$

die oberen Fasern die Gesamtspannung:

$$k = + \frac{P}{F} - \frac{\mathfrak{M}}{W}$$

welche entweder positiv oder negativ, d. h. entweder Zug- oder Druckspannung sein kann, je nachdem das erste oder das zweite Glied der rechten Seite letzter Gleichung das absolut größte ist.

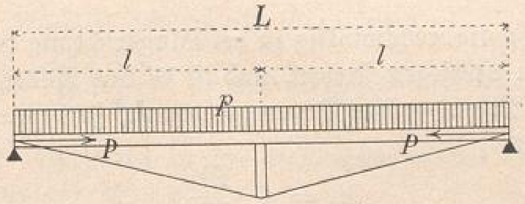
Wirken dagegen in der Richtung der Stabachse die Druckkräfte P, wie z. B. bei dem Balken eines versteiften Trägers (Fig. 111), so sind die oberen Fasern die am schärfsten beanspruchten; sie erleiden die Gesamt-Druckspannung:

$$k = - \frac{P}{F} - \frac{\mathfrak{M}}{W}$$

Es könnte bei einem solchen Träger, wenn nicht wenigstens zwei derselben in gewisser Entfernung nebeneinander angeordnet und fest miteinander verbunden sind, aber auch eine seitliche Ausbiegung eintreten, und es muß daher bei einem einzelnen versteiften Träger stets noch eine Untersuchung auf Knickfestigkeit durchgeführt werden.

Aufgabe 68. Der Holzbalken eines einfach versteiften Trägers von der Gesamtlänge $L = 2\,l = 6$ m (Fig. 111) sei gleichmäßig belastet mit $p = 5$ kg für 1 cm Länge. Die in seiner Achsenrichtung wirkende Druckkraft sei $P = 2800$ kg. Wie stark muß der Balken ausgeführt werden?

Fig. 111.



Auflösung. Die Gesamtbelastung einer Balkenhälfte ist:

$$p\,l = 5 \,.\, 300 = 1500 \text{ kg}$$

folglich das größte Biegungsmoment:

$$\mathfrak{M} = p\,l \,.\, \frac{l}{8} = 1500 \,.\, \frac{300}{8} = 56250$$

Wählt man den Balken 20 cm hoch, 16 cm breit, so ist der Querschnitt:

$$F = 20 \,.\, 16 = 320 \text{ qcm}$$

und das Widerstandsmoment:

$$W = \frac{b\,h^2}{6} = \frac{16 \,.\, 20^2}{6} = 1067$$

Nach Gl. 106) wird dann die größte Druckspannung in der oberen Faserschicht:

$$k = - \frac{2800}{320} - \frac{56250}{1067} = - 61{,}5 \text{ kg}$$

Damit der Balken gegen Zerknicken genügend stark ist, muß, wenn die Höhe $h = 20$ cm beibehalten wird, die Breite b etwas verstärkt werden, wie folgende Rechnung ergibt:

Nach Gl. 92) S. 119 ist das erforderliche Trägheitsmoment:

$$J = \frac{5}{4} \frac{P L^2}{E} = \frac{5 \,.\, 2800 \,.\, 600^2}{4 \,.\, 120000} = 10500$$

daher:

$$\frac{h b^3}{12} = \frac{20 \,.\, b^3}{12} = 10500$$

woraus folgt:

$$b = 18{,}5 \text{ cm}$$

Es wird dann:

$$F = 20 \,.\, 18{,}5 = 370 \text{ qcm}$$

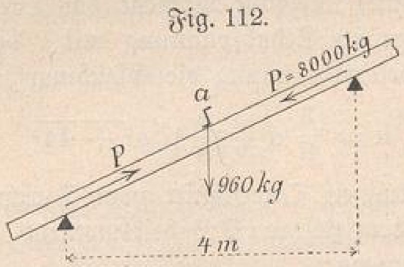
$$W = \frac{18{,}5 \,.\, 20^2}{6} = 1233$$

folglich die größte Druckspannung:

$$k = -\frac{2800}{370} - \frac{56250}{1233} = -53 \text{ kg}$$

Aufgabe 69. Auf die obere aus zwei ⊏-Eisen bestehende Gurtung eines Dachbinders wirke in der Achsenrichtung die Druckkraft $P = 8000$ kg. Außerdem soll die Gurtung, deren Grundrißlänge 4 m sei, durch die in der Mitte befindliche Pfette a (Fig. 112) eine lotrechte Belastung von 960 kg erhalten. Welche Eisen sind zu wählen, wenn die Gesamtbeanspruchung k höchstens 800 kg betragen soll?

Fig. 112.



Auflösung. Das größte Biegungsmoment ist:

$$\mathfrak{M} = \frac{960 \,.\, 400}{4} = 96000$$

Ist F die Querschnittsfläche, W das Widerstandsmoment eines ⊏-Eisens, so ist, da die Gurtung aus zwei ⊏-Eisen besteht, die größte Druckbeanspruchung nach Gl. 106) S. 137:

$$k = -\frac{8000}{2 F} - \frac{96000}{2 W}$$

Man verfährt nun zweckmäßig so, daß man aus den Profiltabellen probeweise ein Profil heraussucht, die Größen F und W dieses Profils in die letzte Gleichung einsetzt, und k danach berechnet. Erhält man danach für k einen zu großen Wert, so hat man ein stärkeres Profil zu wählen.

Nach Tabelle 1 § 6 S. 28 ist für Profil Nr. 14:

$$F = 20{,}4$$
$$W = 86{,}4$$

folglich:

$$k = \frac{8000}{2 \,.\, 20{,}4} + \frac{96\,000}{2 \,.\, 86{,}4} = 751 \text{ kg}$$

Das nächst kleinere Profil Nr. 12 würde eine Beanspruchung von über 1000 kg ergeben; das ⊏-Eisen Nr. 14 ist daher beizubehalten.

2. Biegung und Verdrehung.

Wirken auf einen prismatischen geraden Stab Kräfte, welche denselben um seine Längsachse zu verdrehen streben, und zugleich Kräfte, welche rechtwinklig zur Stabachse gerichtet sind, also eine Biegung hervorrufen, so treten in dem Stabe infolge der Verdrehung Schubspannungen und zugleich infolge der Biegung Zug- oder Druckspannungen auf, welche sich in jedem einzelnen Punkte zu einer Gesamtspannung vereinigen lassen.

Die Abmessungen des Stabes sind so zu bestimmen, daß die größte Gesamtspannung höchstens gleich der zulässigen Inanspruchnahme des Materiales wird.

Wird für irgend einen Querschnitt des Stabes das durch die rechtwinklig zur Stabachse gerichteten Kräfte hervorgerufene Biegungsmoment mit $\mathfrak{M}_B$, die dabei auftretende größte Zug- bezw. Druckspannung mit s, ferner das auf Verdrehung wirkende Moment (das Torsionsmoment) mit $\mathfrak{M}_T$, die dabei auftretende größte Schubspannung mit t bezeichnet, so hat man zur Bestimmung der Gesamtspannung die Gleichung*):

$$\mathbf{k} = \frac{3}{8}\,\mathbf{s} + \frac{5}{8}\sqrt{\mathbf{s}^2 + 4\,\mathbf{t}^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 107)$$

Für den kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser d, dem Widerstandsmoment W und dem polaren Trägheitsmoment J_c bestehen für s bezw. t die Bedingungsgleichungen:

$$s = \frac{\mathfrak{M}_B}{W} = \frac{32\,\mathfrak{M}_B}{d^3\,\pi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 108)$$

$$t = \frac{\mathfrak{M}_T \,.\, d}{2\,J_c} = \frac{16\,\mathfrak{M}_T}{d^3\,\pi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 109)$$

Durch Einsetzung dieser Werte in Gl. 107) folgt:

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{d}^3\,\boldsymbol{\pi}}\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}\,\mathfrak{M}_B + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}\sqrt{\mathfrak{M}_B{}^2 + \mathfrak{M}_T{}^2}\right) \quad . \; . \; . \quad 110)$$

oder:

$$\mathbf{d}^3 = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{k}\,\boldsymbol{\pi}}\left(\mathbf{3}\,\mathfrak{M}_B + \mathbf{5}\sqrt{\mathfrak{M}_B{}^2 + \mathfrak{M}_T{}^2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 111)$$

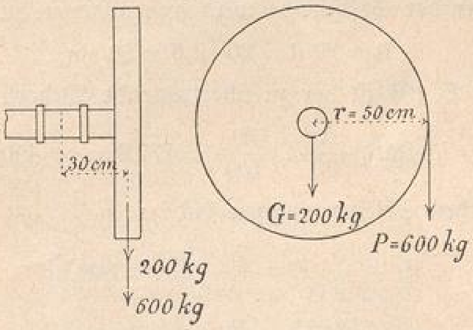
---

*) Vergl. Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit, 2. Aufl. S. 215 und 216.

Nach Gl. 111) läßt sich z. B. der Durchmesser d einer durch Zahnräder, Riemenscheiben u. s. w. belasteten und auf Verdrehung beanspruchten Welle berechnen.

Aufgabe 70. Es soll der Durchmesser d einer schmiedeeisernen Welle berechnet werden, welche nach Fig. 113 durch ein Zahnrad, dessen Eigengewicht G = 200 kg ist und welches einen Zahndruck von P = 600 kg überträgt, belastet ist.

Fig. 113.



Auflösung. Für den durch die Mitte des Lagers gelegten Querschnitt ist das Biegungsmoment:

$$\mathfrak{M}_B = (600 + 200)\ 30 = 24000$$

Das Verdrehungsmoment hat die Größe:

$$\mathfrak{M}_T = 600\ .\ 50 = 30000$$

Bei k = 500 erhält man dann nach Gl. 111):

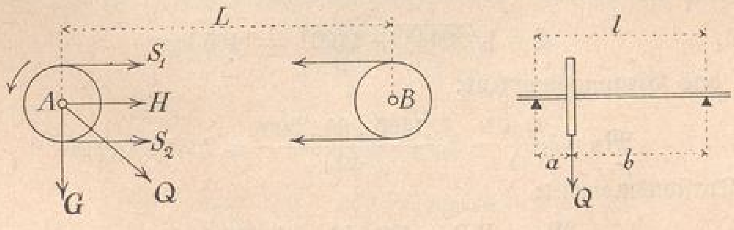
$$d^3 = \frac{4}{500\ .\ 3{,}14}\left(3\ .\ 24000 + 5\sqrt{24000^2 + 30000^2}\right)$$

woraus folgt:

$$d = 8{,}8 \text{ cm}$$

Aufgabe 71. Von einer Welle A, die n = 100 Umdrehungen in der Minute macht, sollen auf eine andere in L = 16 m Entfernung und in gleicher Höhe befindliche parallele Welle B mittels Hanfseilbetrieb N = 60 Pferdekräfte übertragen werden. Länge der Welle A zwischen den Lagern: l = 4 m; Abstand der Seilscheibe vom linken Lager: a = 0,8 m; vom rechten Lager: b = 3,2 m (Fig. 114).

Fig. 114.



Die Welle A, welche zugleich auf Biegung und auf Verdrehung in Anspruch genommen wird, ist zu berechnen.

Auflösung. Der bei Hanfseilbetrieb übliche Seildurchmesser ist:

$$d = 4{,}5 \text{ cm}$$

Diesem entspricht der Seilquerschnitt:

$$\frac{d^2 \pi}{4} = 15{,}9 = \infty\ 16 \text{ qcm}$$

Gewicht des Seiles für 1 m Länge:

$$q = 1{,}5 \text{ kg}$$

Der Halbmesser der Seilscheibe wird angenommen zu:

$$R = 20\, d = 20 \,.\, 4{,}5 = 90 \text{ cm}$$

Nach Gl. 102) S. 134 ist der zu übertragende Widerstand:

$$P = 71\,620 \,.\, \frac{1}{90} \,.\, \frac{60}{100} = 477{,}5 = \infty\ 480 \text{ kg}$$

Die erforderlichen Seilspannungen sind*):

$$S_1 = \frac{5}{3} P = \frac{5}{3} \,.\, 480 = 800 \text{ kg}$$

$$S_2 = \frac{2}{3} P = \frac{2}{3} \,.\, 480 = 320 \text{ kg}$$

Rechnet man für die zulässige Inanspruchnahme der Seile rund $k = 8$ kg/qcm, so ergibt sich die Anzahl der anzuordnenden Seile zu:

$$z = \frac{S_1}{k \,.\, \frac{d^2 \pi}{4}} = \frac{800}{8 \,.\, 16} = \infty\ 6$$

Das auf die Scheibe kommende Seilgewicht ist:

$$G_1 = z\, L\, q = 6 \,.\, 16 \,.\, 1{,}5 = 144 \text{ kg}$$

Das Eigengewicht der Scheibe beträgt (nach praktischen Ausführungen des Eisenwerkes Wülfel vor Hannover):

$$G_2 = 800 \text{ kg}$$

zusammen:

$$G = G_1 + G_2 = 944 \text{ kg}$$

Die auf die Welle A wirkende Horizontalkraft besteht aus der Summe der Seilspannungen und ist danach:

$$H = 800 + 320 = 1120 \text{ kg}$$

Aus G und H ergibt sich die Mittelkraft:

$$Q = \sqrt{944^2 + 1120^2} = 1465 \text{ kg}$$

mithin ist das Biegungsmoment:

$$\mathfrak{M}_B = \frac{Q\, a\, b}{l} = \frac{1465 \,.\, 80 \,.\, 320}{400} = 93\,760 \text{ kg/cm}$$

und das Torsionsmoment:

$$\mathfrak{M}_T = P\, R = 480 \,.\, 90 = 43\,200 \text{ kg/cm}$$

---

*) Vergl. Lauenstein, Mechanik, 5. Aufl. Gl. 164) S. 118.

Für $k = 400$ kg/qcm und $\frac{32}{\pi} = \infty 10$ wird dann nach Gl. 110) S. 140 der auszuführende Wellendurchmesser:

$$d^3 = \frac{10}{400}\left(\frac{3}{8} \,.\, 93\,760 + \frac{5}{8}\sqrt{93\,760^2 + 43\,200^2}\right) = 2492$$

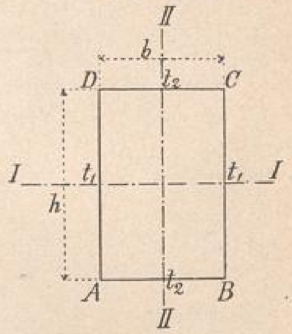
$$d = \sqrt[3]{2492} = 13{,}6 \text{ cm}$$

Bei dem rechteckigen Querschnitt (Fig. 115) ist die Schubspannung in den vier Ecken = Null. Die größten Schubspannungen treten auf in den Mitten der Umfangsseiten und sind*):

$$t_1 = \frac{3}{8}\,\frac{\mathfrak{M}_T \,.\, b}{J_{II}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 112)$$

$$t_2 = \frac{3}{8}\,\frac{\mathfrak{M}_T \,.\, h}{J_{I}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 113)$$

Fig. 115.



Ist $h > b$, so wird $J_{II} < J_I$, folglich $t_1 > t_2$, d. h. die stärkste überhaupt vorkommende Schubspannung erleiden diejenigen Punkte des Umfangs, deren Entfernung von der Stabachse am geringsten ist.

Für die Drehungsfestigkeit des rechteckigen Querschnittes ist daher stets das kleinste Trägheitsmoment maßgebend.

Setzt man $J_I = \frac{b\,h^3}{12}$ und $J_{II} = \frac{h\,b^3}{12}$ in die letzten Gleichungen ein, so entsteht:

$$\mathbf{t_1} = \frac{9}{2}\,\frac{\mathfrak{M}_T}{\mathbf{h\,b^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 114)$$

$$\mathbf{t_2} = \frac{9}{2}\,\frac{\mathfrak{M}_T}{\mathbf{b\,h^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 115)$$

Aufgabe 72. Es sollen die Abmessungen h und b der in Fig. 116 abgebildeten, mit $P = 4000$ kg belasteten Kurbel von rechteckigem Querschnitt berechnet werden, unter der Annahme, daß $b = \frac{1}{2}\,h$ ist.

Da hier die Biegungsebene ($\mathfrak{M}_B$-Ebene) parallel zu den Kanten A B bezw. C D gerichtet ist, so bildet E E′ die neutrale Achse, und die größte Biegungsspannung s entsteht in den Kanten A D und B C. Die größten Schubspannungen t_1 und t_2 treten auf in den Punkten E und E′ bezw. F und F′, die größte Gesamtspannung überhaupt in den Mitten der Seiten A D und B C, für welche:

$$s = \frac{\mathfrak{M}_B}{W} = \frac{6\,\mathfrak{M}_B}{b\,h^2}$$

und:

$$t_2 = \frac{9}{2}\,\frac{\mathfrak{M}_T}{b\,h^2}$$

Nun ist:

$$\mathfrak{M}_B = 4000 \,.\, 50 = 200\,000 \text{ kg/cm} = 200 \text{ t cm}$$

$$\mathfrak{M}_T = 4000 \,.\, 14 = 56\,000 \text{ kg/cm} = 56 \text{ t cm}$$

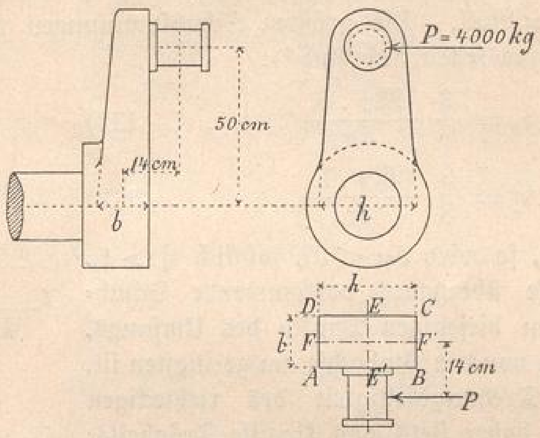
*) Vergl. Keck, Vorträge über Mechanik, T. II S. 69.

folglich für b = ½ h:

$$s = \frac{6 \cdot 200}{\frac{1}{2} h^3} = \frac{2400}{h^3}$$

$$t_2 = \frac{9}{2} \cdot \frac{56}{\frac{1}{2} h^3} = \frac{504}{h^3}$$

Fig. 116.



für k = 500 kg/qcm = 0,5 t/qcm wird somit nach Gl. 107):

$$0{,}5 = \frac{3}{8} \cdot \frac{2400}{h^3} + \frac{5}{8} \sqrt{\left(\frac{2400}{h^3}\right)^2 + 4\left(\frac{504}{h^3}\right)^2}$$

$$0{,}5 = \frac{1}{8\, h^3}\left(7200 + 5\sqrt{2400^2 + 4 \cdot 504^2}\right) = \frac{20215}{8\, h^3}$$

oder:

$$h = \sqrt[3]{5054} = 17{,}2 \text{ cm}$$

folglich:

$$b = \tfrac{1}{2} h = 8{,}6 \text{ cm}$$

Die Schubspannung in der Mitte der Seiten A B bezw. C D wird nach Gl. 114):

$$t_1 = \frac{9}{2} \frac{\mathfrak{M}_T}{h\, b^2} = \frac{9}{2} \frac{56}{17{,}2 \cdot 8{,}6^2} = 0{,}2 \text{ t/qcm} = 200 \text{ kg/qcm}$$

§ 17.

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.

Widerstand gegen Zug oder Druck.

$$\mathbf{P = F k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1) \text{ S. } 6$$

$$\lambda = \frac{\mathbf{P\, l}}{\mathbf{F\, E}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3) \text{ S. } 6$$