Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

1. Belastung durch Einzelkräfte.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78212

Die Durchbiegung f des Trägerendpunktes B gegen den Punkt M hat demnach die Größe:

$$f = \Sigma(\Delta f) = \frac{1}{EJ} \Sigma(\mathfrak{M} . \Delta x) x$$

Der Ausdruck $\Sigma(\mathfrak{M} . \Delta x) x$ bedeutet die Summe der statischen Momente sämtlicher Flächenstreifen der M-Fläche in Bezug auf den Punkt B. Wird daher der Schwerpunktsabstand dieser Fläche ($= F_m$) mit x_0 bezeichnet (Fig. 33), so ist nach S. 13:

$$\Sigma(\mathfrak{M} . \Delta x) x = F_m . x_0$$

folglich:

$$\mathbf{f = \frac{1}{EJ} F_m x_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 33)$$

oder allgemein:

$$\mathbf{f = \frac{1}{EJ} . (\text{Moment der M-Fläche})} \quad \ldots\ldots \quad 34)$$

§ 8.

Der an einem Ende eingespannte Träger.

1. Belastung durch Einzelkräfte.

Nach Gl. 17) S. 18 ist für einen prismatischen Balken, bei welchem das Widerstandsmoment W für alle Querschnitte denselben Wert hat, die Spannung k um so größer, je größer das Moment $\mathfrak{M}$ ist. Da k an der stärkst gespannten Stelle des Balkens nicht größer als die zulässige Inanspruchnahme werden darf, so ist ein prismatischer Balken immer nach dem größten Momente zu berechnen, wobei k = der zulässigen Inanspruchnahme gesetzt wird.

Ist ein an einem Ende eingespannter Balken am anderen freien Ende durch die Kraft P belastet (Fig. 35), so hat für eine Stelle in der Entfernung x vom Endpunkte des Balkens das Moment der Kraft P den Wert:

$$\mathfrak{M}_x = P x$$

Das Moment wächst mit x und wird am größten da, wo der Hebelarm x am größten ist, also an der Einspannungsstelle, für welche $x = l$ zu setzen ist. Danach ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = P l$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}_{max}} = \frac{x}{l}$$

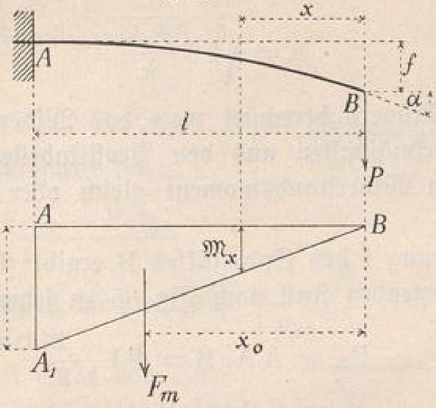
Die Momente verhalten sich wie die Entfernungen von der Belastungsstelle. Da für $x = 0$ auch $\mathfrak{M} = 0$ wird, so lassen sich die Momente darstellen durch die Ordinaten des Dreiecks $A A_1 B$ (Fig. 35), dessen Endordinate $A A_1 = P l$ ist.

Setzt man in Gl. 17) S. 18 für 𝔐 den größten Wert Pl ein, so folgt:

$$\mathbf{Pl = kW} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 35)$$

wo k die Spannung an der Einspannungsstelle, also die größte überhaupt im Balken auftretende Spannung ist, folglich gleich der zulässigen Inanspruch-

Fig. 35.



nahme zu setzen ist. Alle anderen Stellen eines prismatischen Balkens erleiden eine geringere Spannung, es ist deshalb die Einspannungsstelle der **gefährliche Querschnitt**.

Die letzte Gleichung kann in der Form:

$$P = \frac{kW}{l}$$

benutzt werden, die Tragfähigkeit eines gegebenen Balkens zu berechnen.

Soll dagegen für eine gegebene Belastung der erforderliche Balkenquerschnitt bestimmt werden, so ist zu setzen:

$$W = \frac{Pl}{k}$$

So z. B. ist für einen Kreisquerschnitt mit dem Durchmesser d

$$\frac{d^3\pi}{32} = \frac{Pl}{k}$$

also:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi}\,\frac{Pl}{k}}$$

Für einen rechteckigen Querschnitt von der Breite b und der Höhe h würde sein:

$$\frac{bh^2}{6} = \frac{Pl}{k}$$

Man kann hier nun entweder b annehmen und h danach berechnen, oder umgekehrt h annehmen und b danach berechnen, oder endlich für $b : h$ ein bestimmtes Verhältnis wählen, woraus sich dann die Größen b und h ebenfalls ermitteln lassen. (Letzteres Verfahren ist wohl das zweckmäßigste.)

Setzt man z. B.

$$\frac{b}{h} = \frac{3}{4}, \text{ also } b = \frac{3}{4} h$$

so wird:

$$\frac{{}^3/_4 \, h \, . \, h^2}{6} = \frac{P \, l}{k}$$

$$h = \sqrt[3]{8 \frac{P \, l}{k}}$$

Bei eisernen Trägern berechnet man das Widerstandsmoment W und sucht dann am zweckmäßigsten aus den Profiltabellen der Walzwerke ein Profil heraus, dessen Widerstandsmoment gleich oder nahezu gleich dem berechneten ist.

Die Durchbiegung f des Endpunktes B ergibt sich aus Gl. 33) S. 44, worin für den vorliegenden Fall nach Fig. 35 zu setzen ist:

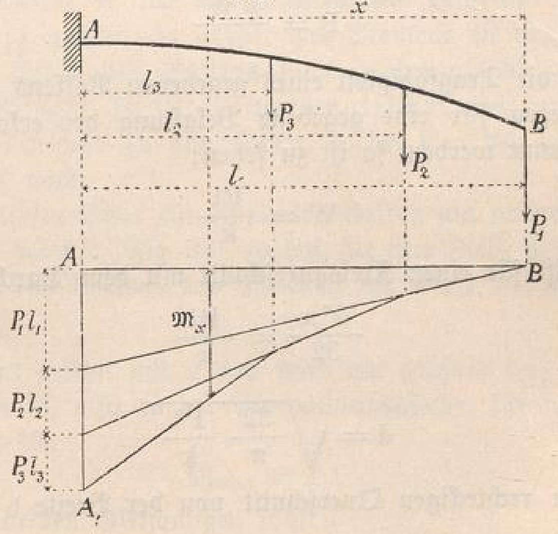
$$F_m = A \, A_1 \, B = P \, l \, . \, \frac{l}{2}$$

$$x_0 = {}^2/_3 \, l$$

Man erhält:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{P \, l^3}}{\mathbf{3 \, EJ}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 36)$$

Fig. 36.



Setzt man hierin nach Gl. 17) S. 18:

$$P \, l = k \, W = k \frac{J}{e}$$

so wird:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{E}} \frac{\mathbf{l^2}}{\mathbf{e}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 37)$$

Der Winkel α, den die elastische Linie an dem Endpunkt B mit der Wagerechten einschließt, folgt nach Gl. 31) S. 43 aus:

$$\mathbf{tg}\,\alpha = \frac{\mathbf{P l^2}}{\mathbf{2\,EJ}} \quad \ldots\ldots \quad 38)$$

Wirken auf einen eingespannten Träger verschiedene Einzelkräfte $P_1\,P_2\,P_3$ in den Entfernungen $l_1\,l_2\,l_3$ von der Einspannungsstelle (Fig. 36), so ist zu setzen:

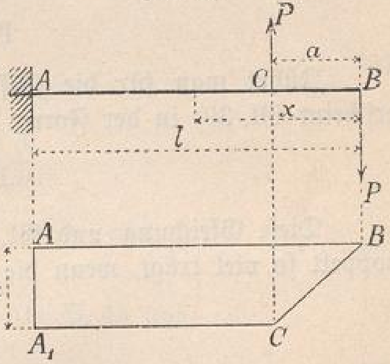
$$\mathfrak{M}_{max} = P_1\,l_1 + P_2\,l_2 + P_3\,l_3$$

und das Widerstandsmoment wird:

$$W = \frac{P_1\,l_1 + P_2\,l_2 + P_3\,l_3}{k}$$

Fig. 36 zeigt zugleich die graphische Darstellung der Momente.

Fig. 37.



Wirkt am freien Ende des eingespannten Trägers (Fig. 37) ein Kräftepaar, dessen Moment = P a ist, so ist für eine beliebige Stelle in der Entfernung x vom Endpunkte:

$$\mathfrak{M}_x = P\,x - P\,(x - a) = P\,a$$

Das Moment zwischen den Punkten A und C ist also unveränderlich und hat die Größe P a, daher:

$$W = \frac{P\,a}{k}$$

2. Streckenbelastung.

Ist die Belastung p für die Längeneinheit gleichmäßig über die ganze Länge l des Balkens verteilt (Fig. 38), so liegt der Angriffspunkt der Gesamtbelastung $p\,l$ im Schwerpunkte der Belastungsfläche, hat also den Abstand $\frac{l}{2}$ von der Einspannungsstelle.

Das Moment an der Stelle x ist:

$$\mathfrak{M}_x = p\,x \cdot \frac{x}{2}$$

Das größte Moment an der Einspannungsstelle ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = p\,l \cdot \frac{l}{2}$$

folglich:

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}_{max}} = \frac{x^2}{l^2}$$

Die Momente verhalten sich wie die Quadrate der Abstände vom freien Ende des Balkens, die Momentenfläche wird daher begrenzt durch eine