Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

2. Streckenbelastung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78212

Der Winkel α, den die elastische Linie an dem Endpunkt B mit der Wagerechten einschließt, folgt nach Gl. 31) S. 43 aus:

$$\mathbf{tg}\,\alpha = \frac{\mathbf{P l^2}}{\mathbf{2 EJ}} \quad \text{. . . . .} \quad 38)$$

Wirken auf einen eingespannten Träger verschiedene Einzelkräfte $P_1\,P_2\,P_3$ in den Entfernungen $l_1\,l_2\,l_3$ von der Einspannungsstelle (Fig. 36), so ist zu setzen:

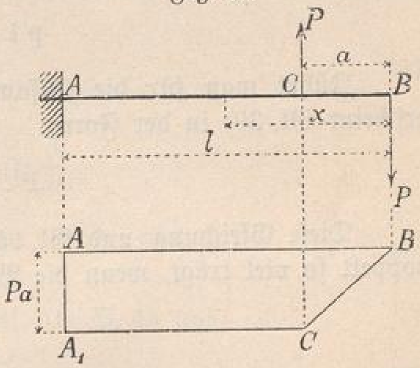
$$\mathfrak{M}_{max} = P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3$$

und das Widerstandsmoment wird:

$$W = \frac{P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3}{k}$$

Fig. 36 zeigt zugleich die graphische Darstellung der Momente.

Fig. 37.



Wirkt am freien Ende des eingespannten Trägers (Fig. 37) ein Kräftepaar, dessen Moment = P a ist, so ist für eine beliebige Stelle in der Entfernung x vom Endpunkte:

$$\mathfrak{M}_x = P x - P (x - a) = P a$$

Das Moment zwischen den Punkten A und C ist also unveränderlich und hat die Größe P a, daher:

$$W = \frac{P a}{k}$$

2. Streckenbelastung.

Ist die Belastung p für die Längeneinheit gleichmäßig über die ganze Länge l des Balkens verteilt (Fig. 38), so liegt der Angriffspunkt der Gesamtbelastung p l im Schwerpunkte der Belastungsfläche, hat also den Abstand $\frac{l}{2}$ von der Einspannungsstelle.

Das Moment an der Stelle x ist:

$$\mathfrak{M}_x = p x \cdot \frac{x}{2}$$

Das größte Moment an der Einspannungsstelle ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = p l \cdot \frac{l}{2}$$

folglich:

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}_{max}} = \frac{x^2}{l^2}$$

Die Momente verhalten sich wie die Quadrate der Abstände vom freien Ende des Balkens, die Momentenfläche wird daher begrenzt durch eine

Parabel AA_1B, deren Scheitel in B liegt und deren Höhe $AA_1 = \frac{p\,l^2}{2}$ ist. Eine einfache Konstruktion der Parabel ist in Fig. 38 angedeutet.

Der gefährliche Querschnitt des Balkens, welcher mit der Einspannungsstelle zusammenfällt, ist nach dem größten Moment zu berechnen. Setzt man:

$$\mathfrak{M}_{max} = k\,W$$

so folgt:

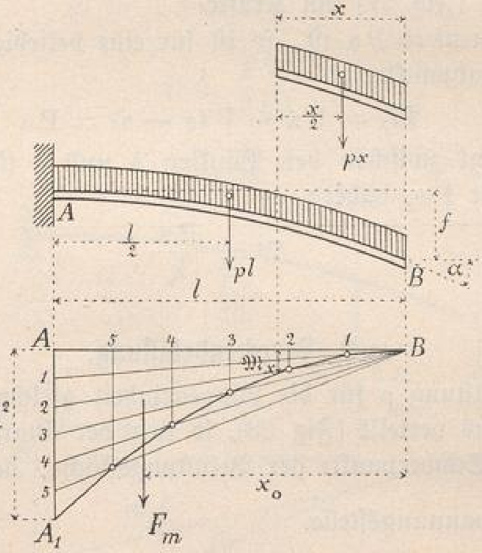
$$p\,l \cdot \frac{l}{2} = k\,W \quad \ldots\ldots\ldots \quad 39)$$

Führt man für die Gesamtbelastung $p\,l$ den Buchstaben P ein, so erscheint Gl. 39) in der Form:

$$P \cdot \frac{l}{2} = k\,W$$

Diese Gleichung und Gl. 35) S. 45 lassen erkennen, daß ein Balken doppelt so viel trägt, wenn die Belastung gleichmäßig über die Länge des-

Fig. 38.



selben verteilt ist, als wenn dieselbe Belastung als Einzelkraft am freien Ende des Balkens angreift.

Besteht die gleichmäßige Belastung aus dem Eigengewichte des Balkens und wird dieses mit G bezeichnet, so ist:

$$G \cdot \frac{l}{2} = k\,W$$

Daraus ergibt sich die Länge l, welche ein an einem Ende eingespannter Balken haben darf, um sich selbst noch mit Sicherheit tragen zu können, zu:

$$l = \frac{2\,k\,W}{G}$$

Die M-Fläche für den gleichmäßig belasteten Freiträger wird (wie schon oben gesagt) begrenzt durch eine Parabel und hat den Flächeninhalt:

$$F_m = \frac{l}{3} \cdot \frac{p\,l^2}{2} = \frac{p\,l^3}{6}$$

Der Abstand x_0 des Schwerpunktes dieser Fläche vom Trägerende B ist*):

$$x_0 = {}^3/_4\, l$$

Nach Einsetzung dieser Werte ergibt sich die Durchbiegung f aus Gl. 33) S. 44 zu:

$$\mathbf{f = \frac{p\,l^4}{8\,EJ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 40)$$

oder nach Einsetzung von:

$$\frac{p\,l^2}{2} = k\,W = k\,\frac{J}{e}$$

zu:

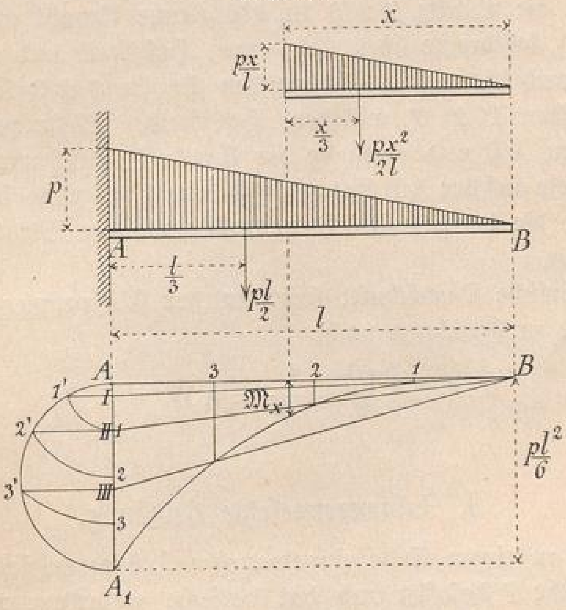
$$\mathbf{f = \frac{1}{4}\,\frac{k}{E}\,\frac{l^2}{e}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 41)$$

Der Winkel α (Fig. 38) folgt nach Gl. 31) S. 43 aus:

$$\mathbf{tg\,\alpha = \frac{p\,l^3}{6\,EJ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 42)$$

Die Streckenbelastung sei nun nicht mehr gleichmäßig über die ganze Länge des Balkens verteilt, sondern sei $= p$ an der Einspannungsstelle A

Fig. 39.



und nehme von dort aus stetig und gleichförmig ab bis auf Null am freien Ende B (Fig. 39). Die Belastungsfläche ist alsdann ein Dreieck.

*) Vergl. Lauenstein, Mechanik, 5. Aufl. Gl. 47.

Die ganze Belastung ist $= \frac{p\,l}{2}$; der Angriffspunkt derselben (Schwerpunkt des Belastungsdreiecks) hat die Entfernung $\frac{1}{3}\,l$ von der Einspannungsstelle, folglich ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\,l}{2} \cdot \frac{l}{3} = \frac{p\,l^2}{6}$$

Für eine Stelle in der Entfernung x vom freien Balkenende ist die Belastungshöhe $= \frac{p\,x}{l}$. Die Belastung des Balkenstückes von der Länge x ist also:

$$P = \frac{p\,x}{l} \cdot \frac{x}{2} = \frac{p\,x^2}{2\,l}$$

und das Moment an der Stelle x:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p\,x^2}{2\,l} \cdot \frac{x}{3} = \frac{p\,x^3}{6\,l}$$

Aus den beiden Momentengleichungen folgt:

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}_{max}} = \frac{x^3}{l^3}$$

Die Momente verhalten sich wie die dritten Potenzen der Abstände vom freien Ende des Balkens, die Momentenfläche wird daher begrenzt durch eine kubische Parabel, deren Scheitel in B liegt und deren Höhe $A\,A_1 = \frac{p\,l^2}{6}$ ist.

Zur Konstruktion der kubischen Parabel teile die Geraden $A\,A_1$ und $A\,B$ (Fig. 39) durch die Punkte 1 2 3 in die gleiche Anzahl unter sich gleicher Teile (hier vier), beschreibe über $A\,A_1$ einen Halbkreis und von dem Mittelpunkt A aus durch die auf $A\,A_1$ liegenden Punkte 1 2 3 Kreisbögen bis zu den Schnittpunkten 1′ 2′ 3′ mit dem Halbkreis. Ziehe ferner 1′ I, 2′ II, 3′ III parallel zu AB und verbinde die Punkte I II III mit B durch gerade Linien. Durch die auf der AB liegenden Punkte 1 2 3 ziehe sodann Parallelen zu $A\,A_1$, welche die durch I II III nach B gezogenen Strahlen in Parabelpunkten schneiden.

Der gefährliche Querschnitt liegt an der Einspannungsstelle und der Balken ist daher zu berechnen nach:

$$\frac{\mathbf{p\,l}}{\mathbf{2}} \cdot \frac{\mathbf{l}}{\mathbf{3}} = \mathbf{k\,W} \quad \text{. . . . . 43)}$$

3. Zusammengesetzte Belastung.

Wird ein an einem Ende eingespannter Träger an seinem freien Ende durch das Gewicht P belastet und hat derselbe außerdem noch eine gleichmäßig über seine Länge verteilte Belastung p für die Längeneinheit zu tragen (Fig. 40), so ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = P\,l + p\,l \cdot \frac{l}{2}$$