UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

3. Zusammengesetzte Belastung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78212

Visual Library

Die ganze Belastung ist $= \frac{p\,l}{2}$; der Angriffspunkt derselben (Schwerpunkt des Belastungsdreiecks) hat die Entfernung $^1/_3\,l$ von der Einspannungsstelle, folglich ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\,l}{2} \cdot \frac{l}{3} = \frac{p\,l^2}{6}$$

Für eine Stelle in der Entfernung x vom freien Balkenende ist die Belastungshöhe $= \frac{p\,x}{l}$. Die Belastung des Balkenstückes von der Länge x ist also:

$$P = \frac{p\,x}{l} \cdot \frac{x}{2} = \frac{p\,x^2}{2\,l}$$

und das Moment an der Stelle x:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p\,x^2}{2\,l} \cdot \frac{x}{3} = \frac{p\,x^3}{6\,l}$$

Aus den beiden Momentengleichungen folgt:

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}_{max}} = \frac{x^3}{l^3}$$

Die Momente verhalten sich wie die dritten Potenzen der Abstände vom freien Ende des Balkens, die Momentenfläche wird daher begrenzt durch eine kubische Parabel, deren Scheitel in B liegt und deren Höhe $A\,A_1 = \frac{p\,l^2}{6}$ ist.

Zur Konstruktion der kubischen Parabel teile die Geraden $A\,A_1$ und $A\,B$ (Fig. 39) durch die Punkte 1 2 3 in die gleiche Anzahl unter sich gleicher Teile (hier vier), beschreibe über $A\,A_1$ einen Halbkreis und von dem Mittelpunkt A aus durch die auf $A\,A_1$ liegenden Punkte 1 2 3 Kreisbögen bis zu den Schnittpunkten 1′ 2′ 3′ mit dem Halbkreis. Ziehe ferner 1′ I, 2′ II, 3′ III parallel zu AB und verbinde die Punkte I II III mit B durch gerade Linien. Durch die auf der AB liegenden Punkte 1 2 3 ziehe sodann Parallelen zu $A\,A_1$, welche die durch I II III nach B gezogenen Strahlen in Parabelpunkten schneiden.

Der gefährliche Querschnitt liegt an der Einspannungsstelle und der Balken ist daher zu berechnen nach:

$$\mathbf{\frac{p\,l}{2} \cdot \frac{l}{3} = k\,W} \quad \text{. . . . . 43)}$$

3. Zusammengesetzte Belastung.

Wird ein an einem Ende eingespannter Träger an seinem freien Ende durch das Gewicht P belastet und hat derselbe außerdem noch eine gleichmäßig über seine Länge verteilte Belastung p für die Längeneinheit zu tragen (Fig. 40), so ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = P\,l + p\,l \cdot \frac{l}{2}$$

Setzt man:

$$\mathfrak{M}_{max} = k\,W$$

so ergibt sich das Widerstandsmoment:

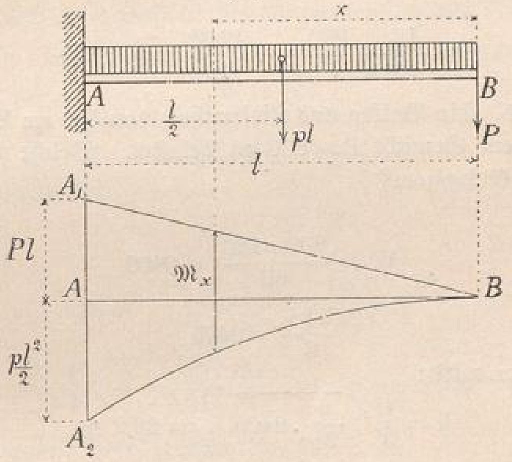
$$W = \frac{P\,l + p\,l \cdot \frac{l}{2}}{k}$$

Besteht die gleichmäßige Belastung aus dem Eigengewichte G des Trägers, so wird:

$$W = \frac{P\,l + G \cdot \frac{l}{2}}{k}$$

Die graphische Darstellung der Momente (Fig. 40) setzt sich zusammen aus dem Dreieck $A A_1 B$, herrührend von der Einzelkraft P und der von der

Fig. 40.



Parabel $A_2 B$ begrenzten Fläche $A A_2 B$ als Beitrag von der gleichmäßig verteilten Belastung.

Wird die durch die Einzelkraft P hervorgebrachte Beanspruchung mit k_1 und die durch die gleichmäßig verteilte Belastung hervorgebrachte Beanspruchung mit k_2 bezeichnet, so ergibt sich die Durchbiegung des Endpunktes B durch Addition der Gleichungen 37) und 41) zu:

$$\mathbf{f} = \left(\frac{\mathbf{k}_1}{3} + \frac{\mathbf{k}_2}{4}\right) \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{E}} \frac{\mathbf{l}^2}{\mathbf{e}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 44)$$

Aufgabe 16. Ein an einem Ende wagerecht eingespannter Balken von Eichenholz, dessen Länge = 150 cm und dessen Querschnitt 20 × 24 cm ist, soll an seinem freien Ende durch ein Gewicht P belastet werden. Wie groß darf P sein?

Auflösung. Nach der Tabelle S. 4 ist hier zu setzen: k = 80 (für Druck); ferner ist nach der Tabelle 15 § 6 S. 40 für b = 20 cm, h = 24 cm:

$$W = 1920$$

folglich erhält man nach Gl. 35) S. 45:

$$P = \frac{80 \cdot 1920}{150} = 1024 \text{ kg}$$

Aufgabe 17. Ein an einem Ende eingemauerter schmiedeeiserner I-Träger von 250 cm Länge wird am freien Ende durch ein Gewicht von 3000 kg belastet. Welches Profil muß der Träger erhalten und wie groß wird die Durchbiegung des Endpunktes sein? (k = 1000)

Auflösung. Aus Gl. 35) S. 45 folgt:

$$W = \frac{3000 \cdot 250}{1000} = 750$$

Nach Tabelle 2 § 6 ist das Profil Nr. 32 mit W = 781 zu wählen.

Die Beanspruchung wird dann genau:

$$k = \frac{\mathfrak{M}}{W} = \frac{3000 \cdot 250}{781} = 960 \text{ kg/qcm}$$

Die Durchbiegung beträgt nach Gl. 37) S. 46, worin $e = \frac{h}{2} = 16$ cm zu setzen ist:

$$f = \frac{1}{3} \frac{960}{2000000} \cdot \frac{250^2}{16} = 0{,}625 \text{ cm}$$

Aufgabe 18. Ein Balken aus Kiefernholz von 180 cm Länge ist an seinem freien Ende durch ein Gewicht P = 800 kg belastet. Welche Abmessungen erhält der Balken bei k = 60 kg/qcm?

Auflösung.

$$W = \frac{800 \cdot 180}{60} = 2400$$

$$\frac{b\,h^2}{6} = 2400$$

Für b = 21 cm wird:

$$h = \sqrt{\frac{6}{21} \cdot 2400} = \sim 26{,}2 \text{ cm}$$

Wählt man h = 26 cm, so wird:

$$b = \frac{6 \cdot 2400}{26^2} = 21{,}3 \text{ cm}$$

Wird $b = {}^3/_4\, h$ angenommen, so ergibt sich:

$$\frac{{}^3/_4\, h \cdot h^2}{6} = 2400$$

$$h = \sqrt[3]{8 \cdot 2400} = 26{,}8 \text{ cm}$$

$$b = \frac{3}{4} \cdot 26{,}8 = 20{,}1 \text{ cm}$$

Aufgabe 19. Ein 220 cm ausladender I-Träger soll nach Fig. 36 S. 46 belastet sein, und zwar sei:

$P_1 = 200$ kg; $l_1 = 220$ cm
$P_2 = 500$ kg; $l_2 = 180$ cm
$P_3 = 300$ kg; $l_3 = 120$ cm

Welches Profil muß der Träger erhalten bei k = 1000?

Auflösung.

$$\mathfrak{M}_{max} = 200 \cdot 220 + 500 \cdot 180 + 300 \cdot 120 = 170000 \text{ kg cm}$$

$$W = \frac{170000}{1000} = 170$$

Nach Tabelle 2 § 6 genügt Profil Nr. 19 mit W = 185.

Aufgabe 20. Welche gleichmäßig verteilte Belastung kann ein 200 cm langer Freiträger aus Eichenholz, dessen Breite b = 18 cm und dessen Höhe h = 24 cm ist, mit Sicherheit tragen? (k = 60)

Auflösung. Nach Tabelle 15 § 6 S. 40 ist:

$$W = 1728$$

folglich nach Gl. 39) S. 48:

$$p\,l = \frac{2 \cdot 60 \cdot 1728}{200} = 1036{,}8 \text{ kg}$$

Aufgabe 21. Wie lang kann ein an einem Ende wagerecht eingespannter I-Träger Profil Nr. 18 sein, um sich selbst (bei k = 1000) noch mit Sicherheit tragen zu können, und wie groß ist die Durchbiegung des freien Endes?

Auflösung. Das Widerstandsmoment dieses Trägers ist nach Tabelle 2 § 6:

$$W = 161$$

Das Gewicht für 1 cm Länge:

$$g = 0{,}217 \text{ kg}$$

folglich das Gesamtgewicht:

$$G = 0{,}217 \cdot l$$

Danach ist:

$$l = \frac{2\,k\,W}{G} = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 161}{0{,}217 \cdot l}$$

$$l = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 161}{0{,}217}} = 1218 \text{ cm} = 12{,}18 \text{ m}$$

Die Durchbiegung beträgt nach Gl. 41) S. 49:

$$f = \frac{1}{4} \cdot \frac{1000}{2000000} \cdot \frac{1218^2}{9} = 20{,}6 \text{ cm}$$

Aufgabe 22. Ein 200 cm langer Freiträger aus I-Eisen soll am Ende durch P = 500 kg belastet sein; außerdem hat derselbe noch eine gleichmäßige Belastung p = 8 kg auf 1 cm zu tragen. Es soll das Profil des Trägers und die Durchbiegung des Endpunktes bestimmt werden. (k = 1000)

Auflösung.

$$\mathfrak{M}_{max} = 500 \cdot 200 + 8 \cdot 200 \cdot \frac{200}{2} = 260000$$

$$W = \frac{260000}{1000} = 260$$

Gewählt: Profil Nr. 22 mit W = 278.

Die durch P = 500 hervorgebrachte Beanspruchung ist:

$$k_1 = \frac{500 \cdot 200}{278} = 360 \text{ kg/qcm}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Durch die gleichmäßig verteilte Belastung entsteht:

$$k_2 = \frac{8 \cdot 200 \cdot 200}{2 \cdot 278} = 575 \text{ kg/qcm}$$

Im ganzen:

$$k = k_1 + k_2 = 935 \text{ kg/qcm}$$

Die Durchbiegung beträgt nach Gl. 44) S. 51:

$$F = \left(\frac{360}{3} + \frac{575}{4}\right)\frac{200^2}{2000000 \cdot 11} = 0{,}48 \text{ cm}$$

Aufgabe 23. Ein Balkon von 3,2 m Länge und 1,2 m Ausladung wird durch 5 Konsolträger (I-Eisen) unterstützt, die 0,8 m auseinander liegen. Wie stark müssen diese genommen werden, wenn als Belastung einschließlich Eigengewicht 750 kg auf 1 qm gerechnet wird und das Gewicht der Brüstung 200 kg für das laufende Meter beträgt?

Auflösung. Auf jeden der drei mittleren Träger kommt die gleichmäßig verteilte Belastung:

$$p\,l = 0{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 750 = 720 \text{ kg}$$

und die am Ende wirkende Einzellast:

$$P = 0{,}8 \cdot 200 = 160 \text{ kg}$$

folglich ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{720 \cdot 120}{2} + 160 \cdot 120 = 62400$$

$$W = \frac{62400}{1000} = 62{,}4$$

Nach der Tabelle 2 § 6 genügen I-Eisen Nr. 13 mit W = 67,0.

Für die beiden Endträger sind die Belastungen:

$$p\,l = 0{,}4 \cdot 1{,}2 \cdot 750 + 1{,}2 \cdot 200 = 600 \text{ kg}$$

$$P = 0{,}4 \cdot 200 = 80 \text{ kg}$$

folglich ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{600 \cdot 120}{2} + 80 \cdot 120 = 45600$$

$$W = \frac{45600}{1000} = 45{,}6$$

Erforderlich: I-Eisen Nr. 12 mit W = 54,5.

Aufgabe 24. Es soll der eiserne I-Träger Fig. 41 unter Berücksichtigung des Eigengewichtes berechnet werden.

Auflösung. Wird das Eigengewicht des Trägers auf 1 cm Länge mit g bezeichnet, so ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = 500 \cdot 600 + 600 \cdot 400 + 600\,g \cdot 300$$

$$\mathfrak{M}_{max} = 540000 + 180000 \cdot g$$

$$W = \frac{540000}{1000} + \frac{180000}{1000} \cdot g$$

$$W = 540 + 180 \cdot g$$

Nach der Tabelle 2 § 6 würde ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes Profil Nr. 28 mit W = 541 genügen. Das Gewicht dieses Eisens beträgt 0,476 kg für 1 cm Länge, folglich ist:

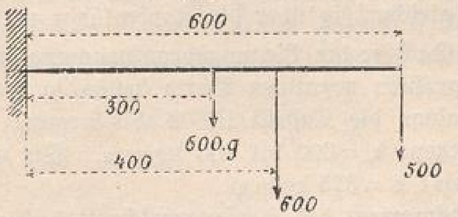
$$180\,g = 180 \,.\, 0{,}476 = 85{,}7$$

und das erforderliche Widerstandsmoment würde betragen:

$$W = 540 + 85{,}7 = 625{,}7$$

Danach ist Profil Nr. 28 zu schwach und es ist dafür das Profil Nr. 30 mit W = 652 zu wählen.

Fig. 41.



Da das Gewicht dieses Eisens 0,538 kg für 1 cm Länge beträgt, so ist

$$180\,g = 180 \,.\, 0{,}538 = \backsim 97$$

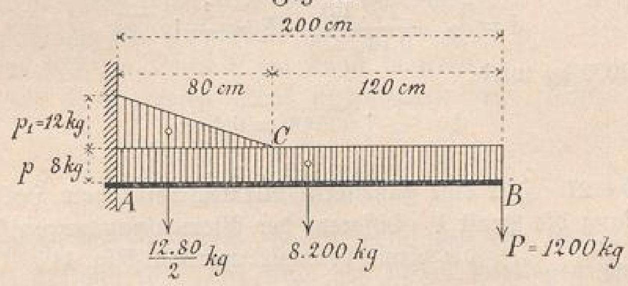
das erforderliche Widerstandsmoment also:

$$W = 540 + 97 = 637$$

Das Profil Nr. 30 ist daher genügend.

Aufgabe 25. Ein Freiträger von 200 cm Länge ist nach Fig. 42 belastet. Es soll das erforderliche Profil berechnet werden.

Fig. 42.



Auflösung. Das Moment bei A ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{12 \,.\, 80}{2} \cdot \frac{80}{3} + 8 \,.\, 200 \,.\, 100 + 1200 \,.\, 200 = 412800$$

Das Moment bei C ist:

$$\mathfrak{M}_c = 8 \,.\, 120 \,.\, 60 + 1200 \,.\, 120 = 201600$$

Für den Querschnitt bei C ist daher erforderlich:

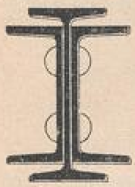
$$W_c = \frac{201600}{1000} = 202$$

und für den Querschnitt bei A:

$$W = \frac{412800}{1000} = 413$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Fig. 43.



Für den Träger kann danach gewählt werden:

ein I-Eisen Nr. 26 mit W = 441

oder: zwei I-Eisen Nr. 20 mit je W = 214, davon eins durchlaufend von A bis B, das andere nur von A bis C reichend

oder: ein I-Eisen Nr. 20 durchlaufend von A bis B und zwei ⊏-Eisen Nr. 16 mit je W = 116 von A bis C (nach Fig. 43).

Aufgabe 26. Wie groß muß der Durchmesser d eines cylindrischen Tragzapfens aus Flußeisen sein, dessen Länge l = 1,5 d betragen soll, unter der Annahme, daß sich der Druck P gleichmäßig über die Zapfenlänge verteilt?

Auflösung. Da hier die Biegungsbeanspruchung zwischen einem größten positiven und einem größten negativen Werte beständig wechselt, so ist für die zulässige Inanspruchnahme die Tabelle III S. 5 (Biegung) maßgebend. Danach ist für Flußeisen zu setzen: k = 300 bis 400 kg/qcm. Wir wählen unter Voraussetzung guten Materials: k = 375 kg/qcm.

Das Widerstandsmoment des Zapfenquerschnittes ist nach der Tabelle S. 27 Nr. 13:

$$W = \frac{d^3 \pi}{32}$$

folglich lautet die allgemeine Biegungsgleichung:

$$\frac{d^3 \pi}{32} k = P \frac{l}{2}$$

Setzt man hierin l : d = 1,5 und k = 375, so entsteht:

$$\frac{d^2 \pi}{32} = \frac{1,5 \, P}{2 \, . \, 375}$$

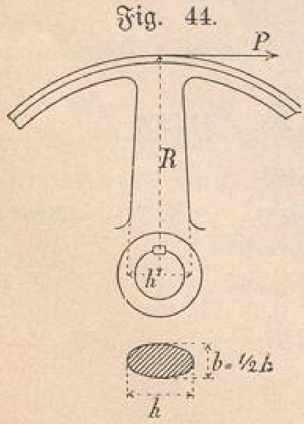
$$d = \sqrt{\frac{16 \, . \, 1,5}{3,14 \, . \, 375} \, . \, P} = \frac{1}{7} \sqrt{P}$$

z. B. für P = 2000 kg wird:

$$d = \frac{1}{7} \sqrt{2000} = 6,4 \text{ cm}$$

Aufgabe 27. Für eine gußeiserne Riemenscheibe vom Halbmesser R, auf welche am Umfang die Kraft P (Differenz der Riemenspannungen)*) wirkt, sollen die Arme berechnet werden (Fig. 44).

Fig. 44.



Auflösung. Die Arme können annähernd als fest in der Nabe eingespannte Träger von der Länge R betrachtet werden, die am anderen Ende durch die Kraft P belastet sind. Man kann (nach v. Bach) annehmen, daß ⅓ der Arme gleichzeitig und gleichmäßig zur Kraftübertragung beiträgt, so daß, wenn die Armzahl mit z bezeichnet wird, zu setzen ist:

$$P R = k W \frac{z}{3}$$

*) Vergl. Lauenstein, Mechanik. 5. Aufl. S. 116, Gl. 152.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Der Armquerschnitt ist elliptisch und hat, verlängert gedacht und in der Mitte der Welle gemessen, die Höhe h und die Breite $b = \frac{1}{2} h$.

Für diesen Querschnitt ist nach der Tabelle S. 27 Nr. 15:

$$W = \frac{b h^2 \pi}{32} = \frac{h^3 \pi}{2 \cdot 32}$$

dafür genügend genau:

$$W = 0{,}1 \cdot \frac{h^3}{2}$$

Setzt man diesen Wert, und außerdem (da hier die Belastung zwischen Null und einem Maximum wechseln kann) nach der Tabelle II S. 5 die Biegungsbeanspruchung für Gußeisen: k = 300 kg/qcm in die obige Gleichung ein, so erhält man:

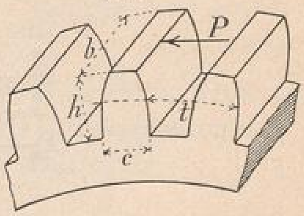
$$P R = 300 \cdot 0{,}1 \frac{h^3}{2} \cdot \frac{z}{3}$$

und daraus:

$$h = \sqrt[3]{\frac{P R}{5 z}}$$

Aufgabe 28. Es soll die erforderliche Teilung eines gußeisernen Zahnrades berechnet werden, welches den Zahndruck P auszuhalten hat (Fig. 45).

Fig. 45.



Auflösung. Der Druck P beginnt (bei dem treibenden Rade) an der Wurzel des in Eingriff kommenden Zahnes und steigt dann während des Ganges der Räder allmählich auf bis zum Kopf, in welchem Augenblick (oder auch schon früher) ein folgendes Zähnepaar in Eingriff kommt. Der ungünstigste Fall für einen Zahn (und dieser Fall wird immer der Berechnung der Zahnstärke zu Grunde gelegt) ist also der, daß der Druck P am Kopfe angreift und daß nur ein Zahn diesen Druck auszuhalten hat. Unter dieser Voraussetzung ist:

$$P h = k W = k \frac{b c^2}{6}$$

Es ist in der Praxis üblich, die Abmessungen der Zähne (Breite, Höhe, Stärke) auf die Teilung (d. i. das Maß von einem beliebigen Punkte des einen Zahnes bis zu dem gleichliegenden Punkte des folgenden Zahnes, im Teilkreise gemessen) zu beziehen. Wird die Teilung mit t bezeichnet, so ist zu setzen:

$$h = 0{,}7 \, t$$

und angenähert:

$$c = 0{,}5 \, t$$

Man erhält dann für k = 300 kg/qcm (Tabelle II S. 5):

$$P \cdot 0{,}7 \, t = 300 \, \frac{b \, (0{,}5 \, t)^2}{6}$$

oder:

$$P = \frac{300 \cdot 0{,}25 \, b \, t^2}{6 \cdot 0{,}7 \, t} = \infty \; 18 \, b \, t$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Für Windenräder mit $b = 2t$ wird:

$$P = 18 \,.\, 2t \,.\, t = 36t^2$$

woraus die Teilung folgt:

$$t = \frac{1}{6}\sqrt{P}$$

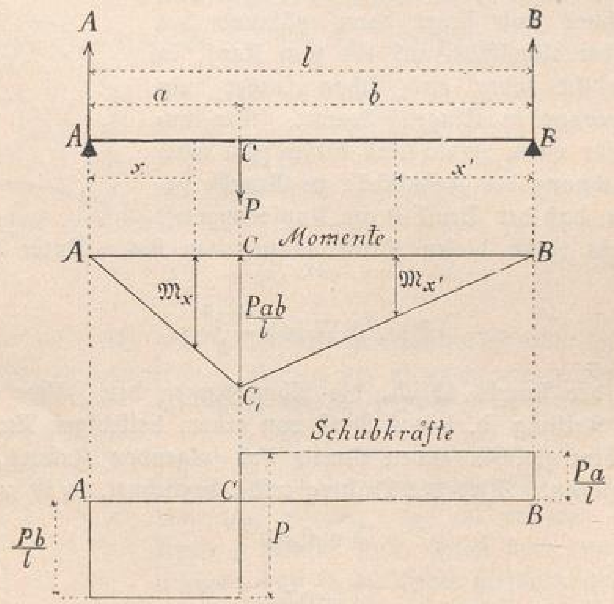
§ 9.

Der Träger auf zwei Stützen.

1. Belastung durch Einzelkräfte.

Ein an beiden Enden unterstützter, durch lotrechte Kräfte belasteter Träger übt auf die Unterstützungspunkte lotrecht abwärts gerichtete Drücke, die sogen. Stützendrücke oder Auflagerdrücke, aus, und nach dem Gesetze der Wechselwirkung erfährt umgekehrt der Träger durch die Unterstützungspunkte die gleichen, aber entgegengesetzt, also lotrecht aufwärts gerichteten Drücke. Diese werden Stützenwiderstände genannt.

Fig. 46.



Ist der Träger AB (Fig. 46) durch eine lotrechte Kraft P belastet, welche die ganze Trägerlänge l in die Abschnitte a und b teilt, und werden die Stützenwiderstände mit A und B bezeichnet, so müssen sich die drei Kräfte ABP im Gleichgewichte halten, daher:

$$A + B = P$$