Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

1. Belastung durch Einzelkräfte.

Für Windenräder mit $b = 2t$ wird:

$$P = 18 \, . \, 2t \, . \, t = 36t^2$$

woraus die Teilung folgt:

$$t = \frac{1}{6}\sqrt{P}$$

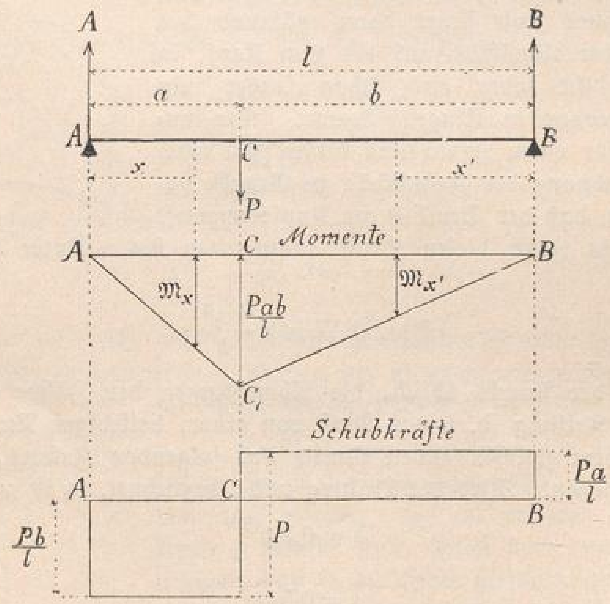
§ 9.

Der Träger auf zwei Stützen.

1. Belastung durch Einzelkräfte.

Ein an beiden Enden unterstützter, durch lotrechte Kräfte belasteter Träger übt auf die Unterstützungspunkte lotrecht abwärts gerichtete Drücke, die sogen. Stützendrücke oder Auflagerdrücke, aus, und nach dem Gesetze der Wechselwirkung erfährt umgekehrt der Träger durch die Unterstützungspunkte die gleichen, aber entgegengesetzt, also lotrecht aufwärts gerichteten Drücke. Diese werden Stützenwiderstände genannt.

Fig. 46.



Ist der Träger AB (Fig. 46) durch eine lotrechte Kraft P belastet, welche die ganze Trägerlänge l in die Abschnitte a und b teilt, und werden die Stützenwiderstände mit A und B bezeichnet, so müssen sich die drei Kräfte ABP im Gleichgewichte halten, daher:

$$A + B = P$$

Die Stützenwiderstände A und B ergeben sich aus der Gleichung der statischen Momente. In Bezug auf den Drehpunkt B ist $A l = P b$, folglich:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{P\,b}}{l} \quad \text{. . . . . 45)}$$

In Bezug auf den Drehpunkt A ist $B l = P a$, daher:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{P\,a}}{l} \quad \text{. . . . . 46)}$$

Ist der eine Stützenwiderstand, z. B. A, mit Hilfe der Gleichung der statischen Momente ermittelt, so ergibt sich der andere Stützenwiderstand B auch aus der Bedingung:

$$B = P - A = P - \frac{P\,b}{l} = \frac{P\,a}{l}$$

Der Widerstand der einen Stütze ist gleich der Last, multipliziert mit dem Abstande derselben von der anderen Stütze und dividiert durch die ganze Trägerlänge.

Das Moment $\mathfrak{M}_x$ im Abstande x von A ist:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x = \frac{P\,b}{l}\,x$$

Das Moment $\mathfrak{M}_x'$ im Abstande x' von B ist:

$$\mathfrak{M}_x' = B\,x' = \frac{P\,a}{l}\,x'$$

Die Momente haben in den Auflagerpunkten den Wert Null, nehmen dann mit x bezw. x' zu und erreichen den größten Wert im Angriffspunkte C der Last. Für diesen Punkt wird $x = a$ und $x' = b$, folglich ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = P\,\frac{a\,b}{l}$$

Da die Momente sich verhalten wie die Abstände von den Unterstützungspunkten, so müssen die Begrenzungslinien der Figur, welche die Momente graphisch darstellt, gerade Linien sein. Konstruiert man also das Dreieck $A\,B\,C_1$ (Fig. 46) so, daß $C\,C_1 = P\,\frac{a\,b}{l}$ ist, so können die Momente durch die Ordinaten dieses Dreiecks gemessen werden.

Ist der Träger prismatisch, so ist zur Berechnung des Querschnittes das größte Moment maßgebend, welches $= k\,W$ zu setzen ist.

$$\mathbf{P}\,\frac{\mathbf{a\,b}}{l} = \mathbf{k\,W} \quad \text{. . . . . 47)}$$

Denkt man sich den Träger in der Entfernung $x < a$ vom Auflager A zerschnitten und betrachtet das linke Stück desselben (Fig. 47), so ist der Stützenwiderstand A die einzige äußere auf das Trägerstück wirkende Kraft. Da sich aber der ganze Träger und folglich auch jedes einzelne Stück desselben im Gleichgewichte befinden soll, so muß an der Schnittstelle noch eine Kraft S angebracht werden, welche gleiche Größe, aber entgegengesetzte Richtung wie A hat. Diese Kraft wird **Schubkraft** oder **Querkraft** genannt; sie sucht das linke Trägerstück gegen das rechte in lotrechter Richtung zu verschieben, was durch die in dem betreffenden Querschnitt auftretenden inneren Schubspannungen verhindert wird.

Die Schubkraft ändert sich nicht von A bis C.

Wird $x > a$, so kommt im Punkte C die äußere Kraft P hinzu und das Trägerstück (Fig. 48) befindet sich unter Einwirkung der drei Kräfte A, P

Fig. 47.

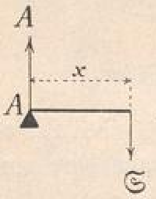
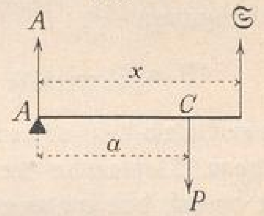


Fig. 48.



und $\mathfrak{S}$ im Gleichgewichte. Es hat deshalb von C bis B die für das linke Trägerstück nach **oben** gerichtete Schubkraft die Größe:

$$\mathfrak{S} = P - A = B$$

Im Punkte C, also an der Stelle, wo das Moment seinen größten Wert erreicht, ändert die Schubkraft die Richtung, hat also die Größe Null.

Die Schubkräfte lassen sich, ähnlich wie die Momente, durch eine geometrische Figur graphisch darstellen, wie in Fig. 46 angedeutet ist.

Wird $a = b = \frac{l}{2}$, d. h. hängt die Last P in der Mitte des Trägers, so sind die Stützenwiderstände:

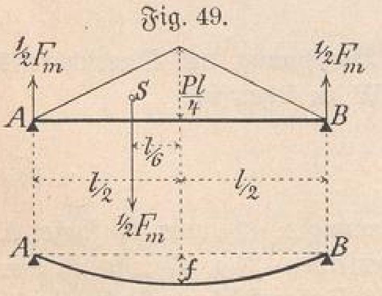
$$A = B = \tfrac{1}{2} P$$

und man erhält statt Gl. 47):

$$\frac{\mathbf{P\,l}}{\mathbf{4}} = \mathbf{k\,W} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 48)$$

Die Berechnung der Durchbiegung f kann auch hier wieder geschehen mit Hilfe der M-Fläche, durch welche man den Träger als belastet auffaßt.

Fig. 49.



Unter der Annahme von $a = b = \frac{1}{2} l$ ist der Inhalt der M-Fläche (Fig. 49):

$$F_m = \frac{P\,l}{4} \cdot \frac{l}{2} = \frac{P\,l^2}{8}$$

und das dadurch hervorgerufene Moment in Bezug auf die Trägermitte:

$$\tfrac{1}{2} F_m \cdot \frac{l}{2} - \tfrac{1}{2} F_m \cdot \frac{l}{6} = \frac{P\,l^3}{32} - \frac{P\,l^3}{96} = \frac{P\,l^3}{48}$$

folglich nach Gl. 34) S. 44:

$$f = \frac{1}{E\,J}\,\frac{P\,l^3}{48}$$

Setzt man hierin:

$$\frac{P\,l}{4} = k\,\frac{J}{e}$$

so folgt:

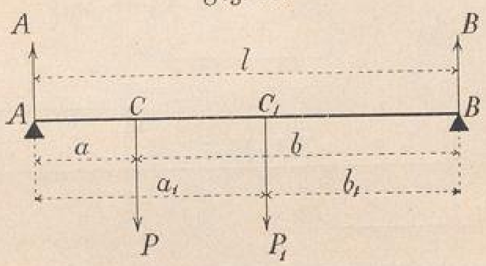
$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\,\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{E}}\,\frac{\mathbf{l}^2}{\mathbf{e}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 49)$$

Genau in derselben Weise ergibt sich, wenn der Angriffspunkt C der Last P die Trägerlänge l in die unter sich ungleichen Abschnitte a und b teilt (Fig. 46), die Durchbiegung im Punkte C zu:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\,\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{E}}\,\frac{\mathbf{a\,b}}{\mathbf{e}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 50)$$

Für $a = b = \frac{1}{2}\,l$ entsteht hieraus natürlich wieder die Gl. 49).

Fig. 50.



Wirken zwei Einzellasten P und P_1 auf den Träger und teilen diese die ganze Trägerlänge l in die Abschnitte a und b, bezw. a_1 und b_1 (Fig. 50), so sind die Stützenwiderstände:

$$A = \frac{P\,b + P_1\,b_1}{l} \qquad B = \frac{P\,a + P_1\,a_1}{l}$$

und die Momente an den Laststellen C und C_1:

$$\mathfrak{M} = A\,a \qquad \mathfrak{M}_1 = B\,b_1$$

Es ist in jedem einzelnen Falle zu untersuchen, welches dieser Momente das größere ist; das größte Moment ist $= k\,W$ zu setzen und danach der Träger zu berechnen.

Sind die beiden Lasten einander gleich ($= P$) und greifen dieselben in der gleichen Entfernung a von den Auflagern an, so entsteht der in Fig. 51 dargestellte einfachere Fall.

Die Stützenwiderstände sind hier:

$$A = B = P$$

Das Moment ist in den Auflagerpunkten = Null und wächst von dort ab gleichmäßig bis zu den Laststellen, wo es die Größe annimmt:

$$\mathfrak{M} = P\,a$$

Zwischen den Laststellen bleibt das Moment unveränderlich, denn für eine Stelle in der Entfernung x vom Auflager ist:

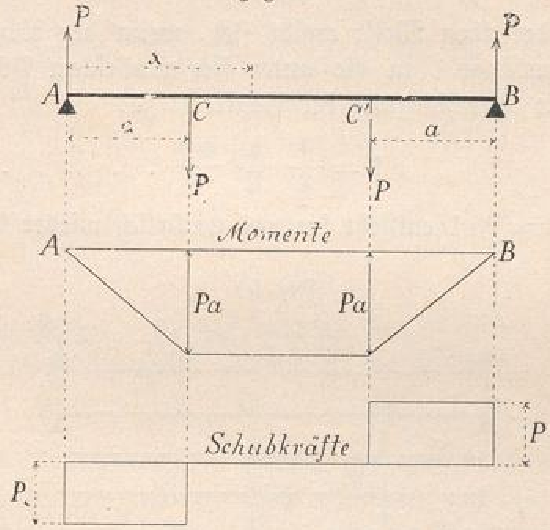
$$\mathfrak{M}_x = P\,x - P\,(x - a) = P\,a$$

$P\,a$ ist also zugleich das größte Moment, daher:

$$P\,a = k\,W$$

Die Schubkraft $\mathfrak{S}$ hat zwischen den Laststellen C und C′ die Größe Null.

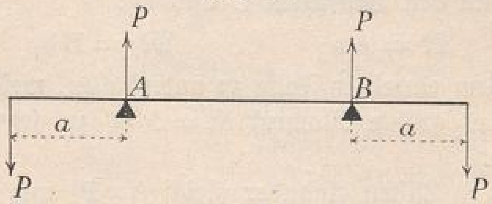
Fig. 51.



Vertauscht man in Fig. 51 die Lasten mit den Stützenwiderständen und denkt sich die ganze Figur herumgedreht, so erhält man den in Fig. 52 dargestellten Belastungsfall.

Die Berechnung dieses Trägers, bei welchem das Moment zwischen den Stützpunkten die unveränderliche Größe $P\,a$ hat, geschieht in derselben Weise

Fig. 52.



wie bei dem Träger Fig. 51. Die Trägerlänge zwischen den Stützpunkten ist in diesem, sowie auch in dem vorigen Falle (Fig. 51) unter der Voraussetzung, daß der Träger selbst als gewichtlos betrachtet werden kann, ganz ohne Einfluß auf die Tragfähigkeit, da in dem größten Momente $P\,a$ die Trägerlänge nicht erscheint.

Wirkt außer den Kräften P, welche an den Enden des über die Stützpunkte um das Stück a hinausragenden Trägers angreifen, innerhalb der Auflager noch eine Kraft P_1 und teilt diese die Stützlänge l in die Abschnitte a_1 und b_1 (Fig. 53), so sind die Stützenwiderstände:

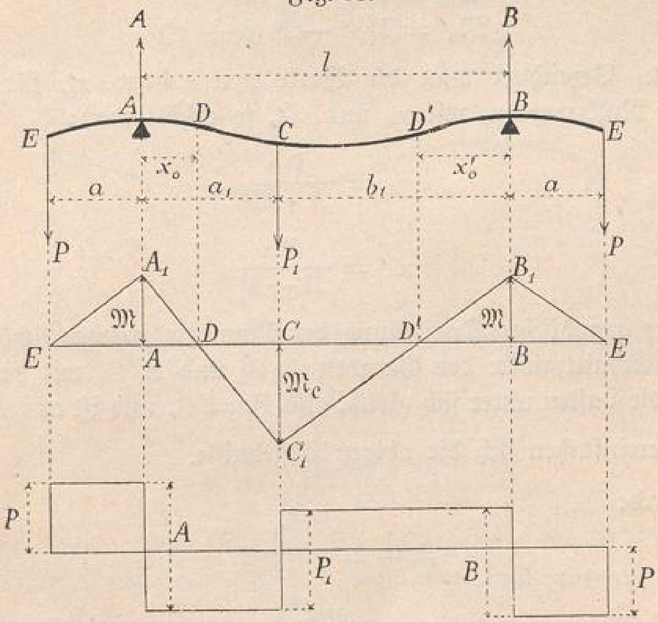
$$A = P + \frac{P_1 b_1}{l}$$

$$B = P + \frac{P_1 a_1}{l}$$

Das Moment bei C hat die Größe:

$$\mathfrak{M}_c = A a_1 - P (a + a_1)$$

Fig. 53.



und wenn für A der obige Wert eingesetzt wird:

$$\mathfrak{M}_c = P_1 \frac{a_1 b_1}{l} - P a$$

Das Moment über den Stützen hat die absolute Größe:

$$\mathfrak{M} = P a$$

Die Tragfähigkeit des Trägers wird voll ausgenutzt, wenn die Momente einander gleich sind.

Setzt man $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c$, so folgt:

$$2 P a = P_1 \frac{a_1 b_1}{l}$$

oder:

$$a = \frac{P_1}{P} \frac{a_1 b_1}{2 l}$$

Danach:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c = \frac{P_1}{2} \frac{a_1 b_1}{l}$$

Das Moment im Lastpunkte C erteilt dem Balken eine Biegung, welche gerade entgegengesetzt der durch die Stützenmomente hervorgebrachten Biegung ist. Während über den Stützen die oberen Fasern des Balkens gezogen werden, sind bei C die oberen Fasern gedrückt. Zwischen den Stützpunkten A und B müssen daher zwei Punkte D und D′ liegen, in denen die eine Biegung in die andere übergeht, wo also überhaupt keine Biegung stattfindet, das Biegungsmoment in diesen Punkten daher = Null ist.

Man findet die Lage dieser Punkte, wenn man die Momente in den Abständen x und x′ von den Stützpunkten A bezw. B, nämlich:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - P\,(a + x)$$
$$\mathfrak{M}_{x'} = B\,x' - P\,(a + x')$$

= Null setzt. Bezeichnet man die Werte von x bezw. x′, für welche diese Momente = Null werden, mit x_0 und x_0', so erhält man:

$$x_0 = \frac{P\,a}{A - P}$$

$$x_0' = \frac{P\,a}{B - P}$$

In der graphischen Darstellung der Momente ergeben sich die Punkte D und D′ als Schnittpunkte der Geraden $A_1\,C_1$ und $B_1\,C_1$ mit der E E.

Sind die Lasten unter sich gleich, also $P_1 = P$, und ist außerdem $a_1 = b_1 = \frac{l}{2}$, so vereinfachen sich die obigen Ergebnisse.

Es wird:

$$A = B = \frac{3}{2}\,P$$

$$\mathfrak{M}_c = \frac{P\,l}{4} - P\,a$$

$$\mathfrak{M} = P\,a$$

Sollen die Stützenmomente gleich dem Momente in der Mitte des Trägers sein, so folgt aus:

$$P\,a = \frac{P\,l}{4} - P\,a$$

$$a = \frac{l}{8}$$

Danach wird:

$$\mathfrak{M} = \frac{P\,l}{8}$$

und

$$x_0 = x_0' = \frac{\frac{P\,l}{8}}{\frac{3}{2}\,P - P} = \frac{l}{4}$$

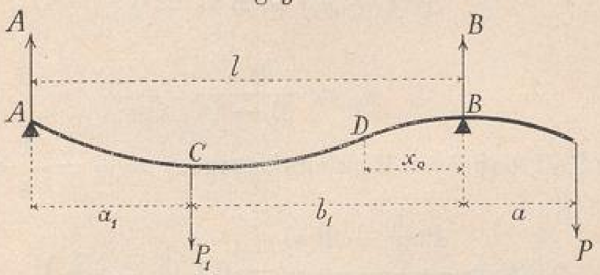
Ist ein auf den Stützen A und B aufgelagerter Träger, welcher über die eine Stütze B um das Stück a hinausragt, am freien Ende durch die Kraft P belastet und hat derselbe außerdem noch eine Last P_1 zu tragen, welche innerhalb der Stützen angreift und die Stützlänge l in die Abschnitte a_1 und b_1 teilt, so ist nach Fig. 54 in Bezug auf den Drehpunkt B:

$$A\,l - P_1 b_1 + P\,a = 0$$

in Bezug auf den Drehpunkt A:

$$-B\,l + P_1 a_1 + P\,(a + l) = 0$$

Fig. 54.



Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Stützenwiderstände:

$$A = \frac{P_1 b_1 - P\,a}{l}$$

$$B = \frac{P_1 a_1 + P\,(a + l)}{l}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, daß für $P\,a > P_1 b_1$ der Stützenwiderstand A negativ wird, d. h. von oben nach unten wirkt.

Für $P\,a = P_1 b_1$ wird A = Null.

In beiden Fällen entsteht bei B das Maximalmoment:

$$\mathfrak{M}_b = P\,a$$

Ist $P\,a < P_1 b_1$, so wird A positiv. Es entsteht dann im Lastpunkte C ein zweites Maximalmoment von der Größe:

$$\mathfrak{M}_c = A\,a_1 = \frac{P_1 b_1 - P\,a}{l} \cdot a_1$$

Welches von diesen beiden Momenten das absolut größte ist, muß für jeden einzelnen Fall untersucht werden. Das größte Moment ist dann $= k\,W$ zu setzen und der Balken danach zu berechnen.

Die Tragfähigkeit des Balkens wird voll ausgenutzt, wenn die Momente einander gleich sind. Setzt man $\mathfrak{M}_b = \mathfrak{M}_c$, so folgt:

$$P\,a = \frac{P_1 b_1 - P\,a}{l} \cdot a_1$$

oder:

$$a = \frac{P_1}{P}\,\frac{a_1 b_1}{l + a_1}$$