Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

2. Streckenbelastung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78212

Nach Einsetzung dieses Wertes wird dann:

$$\mathfrak{M}_b = \mathfrak{M}_c = P_1 \frac{a_1 b_1}{l + a_1} \; .$$

Das Moment $\mathfrak{M}_b$ erteilt dem Balken eine Biegung, welche gerade entgegengesetzt der durch das Moment $\mathfrak{M}_c$ hervorgebrachten Biegung ist. Zwischen den Punkten C und B muß sich daher ein Punkt D befinden, in welchem die eine Biegung in die andere übergeht, das Moment also = Null ist.

Die Entfernung x_0 dieses Punktes von der Stütze B ergibt sich dann aus der Bedingung:

$$P(a + x_0) - B x_0 = 0$$

zu:

$$x_0 = \frac{P a}{B - P}$$

Für den Fall, daß $P_1 = P$ und außerdem $a_1 = b_1 = \frac{l}{2}$ ist, erhält man:

$$A = \frac{P \frac{l}{2} - P a}{l} = P\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{l}\right)$$

$$B = \frac{P \frac{l}{2} + P(a + l)}{l} = P\left(\frac{3}{2} + \frac{a}{l}\right)$$

$$\mathfrak{M}_b = P a$$

$$\mathfrak{M}_c = \frac{P l}{4} - \frac{P a}{2}$$

Sollen die Momente einander gleich werden, so folgt aus:

$$P a = \frac{P l}{4} - \frac{P a}{2}$$

$$a = \frac{l}{6}$$

Danach wird:

$$\mathfrak{M} = \frac{P l}{6}$$

und:

$$x_0 = \frac{P a}{P\left(\frac{3}{2} + \frac{a}{l}\right) - P} = \frac{a}{\frac{1}{2} + \frac{a}{l}} = \frac{3}{2} a = \frac{l}{4}$$

2. Streckenbelastung.

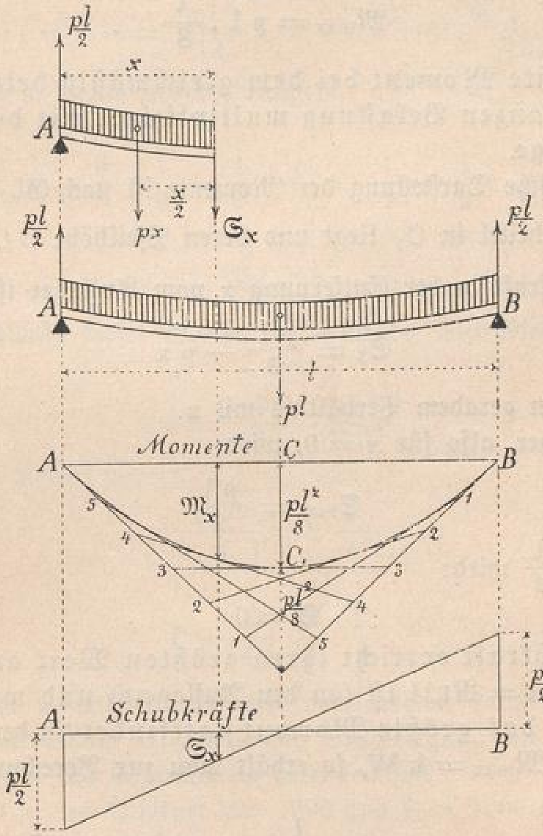
Ist ein an den Endpunkten unterstützter Träger A B von der Länge l (Fig. 55) gleichmäßig belastet und bezeichnet man die Belastung für die Längeneinheit mit p, so ist die Gesamtbelastung $= p\,l$. Der Angriffspunkt derselben liegt im Schwerpunkte der Belastungsfläche, also in der Mitte des Trägers.

Die Belastung wird zur Hälfte auf jedes Auflager übertragen, folglich sind die Stützenwiderstände:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \frac{\mathbf{p\,l}}{\mathbf{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 51)$$

Denkt man sich den Träger in der Entfernung x vom Auflager A zerschnitten und betrachtet das linke Stück desselben, so sind der Stützenwiderstand $\frac{p\,l}{2}$ und die Belastung p x die auf das Trägerstück wirkenden äußeren Kräfte.

Fig. 55.



Die Belastung p x greift im Schwerpunkte der Belastungsfläche, also in der Entfernung $\frac{x}{2}$ von der Schnittstelle an. Stellt man in Bezug auf die Schnittstelle die Momentengleichung auf, so ergibt sich:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p\,l}{2}\,x - p\,x \cdot \frac{x}{2}$$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{x}\,(\mathbf{l} - \mathbf{x}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 52)$$

Für x = 0 und x = l wird $\mathfrak{M}_x = 0$, d. h. das Moment an den Stützpunkten ist = Null.

Das größte Moment findet in der Mitte des Trägers statt. Es ist nämlich für $x = \frac{1}{2}\,l$:

$$x\,(l - x) = \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^2}{4}$$

Dagegen ergibt sich für $x = \frac{1}{2}\,l + \lambda$ oder $x = \frac{1}{2}\,l - \lambda$ der kleinere Wert:

$$x\,(l - x) = \left(\frac{l}{2} + \lambda\right)\left(\frac{l}{2} - \lambda\right) = \frac{l^2}{4} - \lambda^2$$

Aus Gl. 52) folgt danach für $x = \frac{1}{2}\,l$:

$$\mathfrak{M}_{max} = \mathbf{p\,l} \cdot \frac{\mathbf{l}}{\mathbf{8}} \quad \text{. . . . . 53)}$$

Das größte Moment bei dem gleichmäßig belasteten Träger ist gleich der ganzen Belastung multipliziert mit dem achten Teil der Trägerlänge.

Die graphische Darstellung der Momente ist nach Gl. 52) eine Parabel $A\,C_1\,B$, deren Scheitel in C_1 liegt und deren Pfeilhöhe $C\,C_1 = p\,l \cdot \frac{l}{8}$ ist.

Die Schubkraft in der Entfernung x vom Auflager ist:

$$\mathfrak{S}_x = \frac{p\,l}{2} - p\,x$$

ändert sich also in geradem Verhältnis mit x.

Im Auflager, also für $x = 0$, wird:

$$\mathfrak{S}_{max} = \frac{p\,l}{2}$$

Für $x = \frac{l}{2}$ wird:

$$\mathfrak{S} = 0$$

Die Schubkraft erreicht ihren größten Wert an den Stellen, wo das Moment = Null ist (an den Auflagern) **und wird = Null an der Stelle, wo das größte Moment stattfindet** (in der Trägermitte)*).

Setzt man $\mathfrak{M}_{max} = k\,W$, so erhält man zur Berechnung des Trägers die Gleichung:

$$\mathbf{p\,l} \cdot \frac{\mathbf{l}}{\mathbf{8}} = \mathbf{k\,W} \quad \text{. . . . . 54)}$$

Aus Gl. 48) S. 60 und aus Gl. 54) erkennt man, daß ein gleichmäßig belasteter Balken doppelt so viel trägt, als wenn dieselbe Belastung $p\,l = P$ als Einzelkraft in der Mitte des Balkens wirkt.

Besteht die gleichmäßige Belastung aus dem Eigengewichte G des Trägers, so erhält man die Gleichung:

$$G \cdot \frac{l}{8} = k\,W$$

---

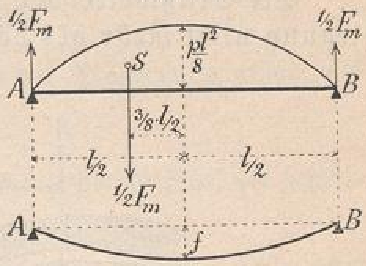
*) Der allgemeine Beweis dieses Satzes für einen beliebig belasteten Träger ist S. 75 gegeben.

welche in der Form:

$$l = \frac{8\,k\,W}{G}$$

zur Bestimmung der Länge l dienen kann, welche ein prismatischer Balken höchstens haben darf, um sein eigenes Gewicht noch mit Sicherheit tragen zu können.

Fig. 56.



Zur Berechnung der Durchbiegung f denke man sich den Träger durch die M-Fläche belastet (Fig. 56). Der Inhalt derselben ist:

$$F_m = {}^2\!/_3\, l \,.\, \frac{p\,l^2}{8} = \frac{p\,l^3}{12}$$

und das Moment in Bezug auf die Trägermitte:

$$\tfrac{1}{2}\, F_m \,.\, \frac{l}{2} - \tfrac{1}{2}\, F_m \,.\, \frac{3}{8} \,.\, \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \,.\, \frac{p\,l^3}{12} \,.\, \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \,.\, \frac{p\,l^3}{12} \,.\, \frac{3}{8} \,.\, \frac{l}{2} =$$

$$\frac{5}{384}\, p\, l^4$$

Nach Einsetzung dieses Wertes ergibt sich die Durchbiegung nach Gl. 34) S. 44 zu:

$$f = \frac{5}{384}\, \frac{p\,l^4}{E\,J}$$

Setzt man hierin:

$$\frac{p\,l^2}{8} = k\, \frac{J}{e}$$

so folgt:

$$\mathbf{f = \frac{5}{48}\, \frac{k}{E}\, \frac{l^2}{e}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 55)$$

Bei den zu Deckenkonstruktionen verwendeten Trägern hält man gewöhnlich die Bestimmung ein, daß die Durchbiegung bei voller Belastung nicht mehr als $^1/_{600}$ der Spannweite betragen soll.

Setzt man $f = {}^1/_{600}\, l$, ferner $k = 1000$ und $E = 2\,000\,000$ (für Schmiedeeisen) in Gl. 55) ein, so erhält man:

$$\frac{l}{600} = \frac{5}{48}\, \frac{1000}{2\,000\,000}\, \frac{l^2}{0{,}5\,h}$$

woraus folgt:

$$\mathbf{h = \frac{1}{16}\, l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 56)$$

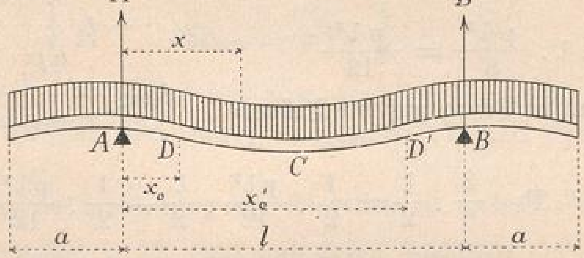
Diese theoretisch erforderliche Trägerhöhe hält man praktisch häufig nicht ein. Da nämlich in Wirklichkeit die Deckenträger an den Enden immer eingemauert sind und infolgedessen wenigstens als teilweise eingespannte Träger (vergl. 4, § 10) betrachtet werden können, bei denen die Durchbiegung unter denselben Umständen wesentlich geringer ist, als bei den frei auf zwei Endstützen ruhenden Trägern, so genügt es zu setzen:

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{25}\,\mathfrak{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 57)$$

Man stellt danach praktisch die Forderung:

Die Stützweite der Träger soll mit Rücksicht auf die Durchbiegung nicht mehr als das 25fache der Trägerhöhe betragen.

Fig. 57.



Ragt ein auf zwei Stützen ruhender, gleichmäßig mit p für die Längeneinheit belasteter Träger um ein Stück a über die Stützpunkte hinaus (Fig. 57) und bezeichnet man die Stützweite wieder mit l, so sind die Stützenwiderstände:

$$A = B = p\left(\frac{l}{2} + a\right)$$

Das Moment in der Entfernung x vom Auflager ist:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - \frac{p\,(a + x)^2}{2}$$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p}{2}\,x\,(l - x) - \frac{p\,a^2}{2}$$

Die größten Momente finden über den Stützen und in der Mitte des Trägers statt.

Für $x = 0$ und $x = l$ werden die Stützenmomente

$$\mathfrak{M} = -\frac{p\,a^2}{2}$$

Für $x = \frac{l}{2}$ wird das Moment in der Trägermitte:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{p\,l^2}{8} - \frac{p\,a^2}{2}$$

Um diejenige Größe von a zu ermitteln, bei welcher alle drei Momente einander gleich werden, der Balken also die größte Tragfähigkeit besitzt, hat man den absoluten Wert von $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c$ zu setzen:

$$\frac{p\,a^2}{2} = \frac{p\,l^2}{8} - \frac{p\,a^2}{2}$$

Daraus folgt:

$$a = \frac{l}{\sqrt{8}}$$

Nach Einsetzung dieses Wertes ergibt sich dann für die Momente die Größe:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c = p\,l \cdot \frac{l}{16}$$

Ist $a < \frac{l}{\sqrt{8}}$, so wird das Moment in der Trägermitte größer als die Stützenmomente.

Ist $a > \frac{l}{\sqrt{8}}$, so werden die Stützenmomente am größten, die gefährlichen Querschnitte des Trägers liegen dann über den Stützen.

Der Balken erhält durch die Stützenmomente eine Biegung, bei welcher die erhabene Seite nach oben gerichtet ist, durch das Moment in der Mitte aber eine entgegengesetzte Biegung. Man erhält die Lage der zwischen den Stützen liegenden Punkte D und D′, in denen eine Krümmung in die andere übergeht, indem man $\mathfrak{M}_x$ = Null setzt.

$$\frac{p}{2}\,x\,(l - x) - \frac{p\,a^2}{2} = 0$$

$$x^2 - l\,x = -a^2$$

Bezeichnet man die Wurzeln dieser Gleichung mit x_0 und x_0', so ergibt sich:

$$x_0 = \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - a^2}$$

$$x_0' = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - a^2}$$

Für den besonderen Fall, daß $a = \frac{l}{\sqrt{8}}$ angenommen wird, erhält man:

$$x_0 = \frac{l}{2} - \frac{l}{\sqrt{8}} = \frac{l}{2} - a$$

$$x_0' = \frac{l}{2} + \frac{l}{\sqrt{8}} = \frac{l}{2} + a$$

Wird nicht die Stützweite, sondern die ganze Trägerlänge mit l bezeichnet (Fig. 58), so sind die Stützenwiderstände:

$$A = B = \frac{p\,l}{2}$$

Das Moment für die Trägermitte C ist:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{p\,l}{2}\left(\frac{l}{2} - a\right) - \frac{p\,l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{p\,l}{2}\left(\frac{l}{4} - a\right)$$

Die Stützenmomente haben den absoluten Wert:

$$\mathfrak{M} = \frac{p\,a^2}{2}$$

Der Balken besitzt die größte Tragfähigkeit, wenn $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c$ wird.

Aus:

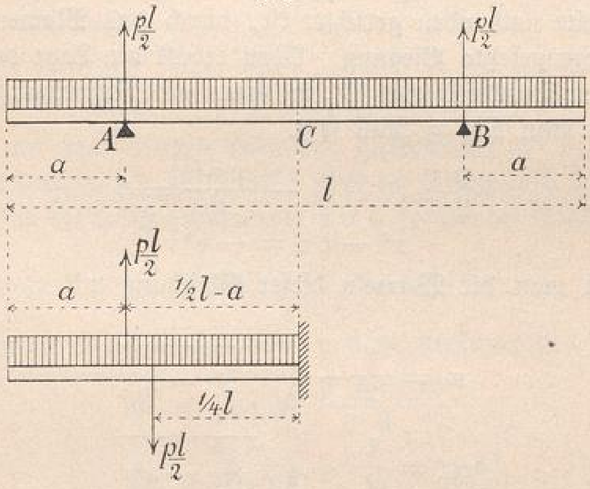
$$\frac{p\,a^2}{2} = \frac{p\,l}{2}\left(\frac{l}{4} - a\right)$$

folgt dann:

$$a^2 + l\,a = \frac{l^2}{4}$$

$$a = \frac{l}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right) = 0{,}2071\,.\,l$$

Fig. 58.



Nach Einsetzung dieses Wertes ergibt sich dann für die Momente die Größe:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c = \frac{p\,l^2}{8}\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 0{,}02145\;p\,l^2$$

Für eine Stelle in der Entfernung x vom Balkenende ist:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p\,l}{2}(x - a) - \frac{p\,x^2}{2}$$

Setzt man $\mathfrak{M}_x = 0$, so folgt:

$$x^2 - l\,x = -\,l\,a$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$x_0 = \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - l\,a}$$

$$x_0' = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - l\,a}$$

und für den speziellen Fall, daß $a = \frac{l}{2}(\sqrt{2} - 1)$ ist:

$$x_0 = \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

$$x_0' = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{l}{2} + \frac{l}{2}\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

Der Ausdruck $a = \frac{l}{2}(\sqrt{2} - 1)$ läßt sich noch auf eine andere Form bringen. Es ist nämlich:

$$a^2 = \frac{l^2}{4}(2 - 2\sqrt{2} + 1) = \frac{l^2}{4}(3 - 2\sqrt{2})$$

folglich:

$$a = \frac{l}{2}\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

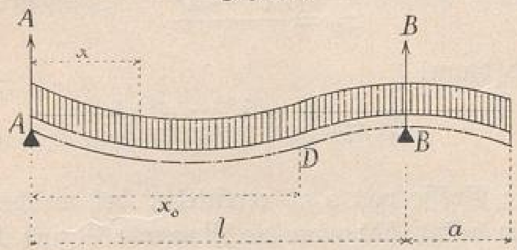
Danach ergeben sich die Abstände der Stellen, wo das Moment = Null ist, von den Balkenenden zu:

$$x_0 = \frac{l}{2} - a$$

$$x_0' = \frac{l}{2} + a$$

Ragt ein auf zwei Stützen ruhender, gleichmäßig mit p für die Längeneinheit belasteter Träger von der Stützweite l um ein Stück a über den einen

Fig. 59.



Stützpunkt hinaus (Fig. 59), und stellt man die Gleichungen der statischen Momente auf, so ist in Bezug auf den Drehpunkt B:

$$A\,l - \frac{p\,l^2}{2} + \frac{p\,a^2}{2} = 0$$

und in Bezug auf den Drehpunkt A:

$$-B\,l + \frac{p\,l^2}{2} + p\,a\left(l + \frac{a}{2}\right) = 0$$

Daraus ergeben sich die Stützenwiderstände:

$$A = \frac{p}{2\,l}\,(l^2 - a^2)$$

$$B = \frac{p}{2\,l}\,(l + a)^2$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, daß für $a > l$ der Stützenwiderstand A negativ wird. Für $a = l$ wird $A =$ Null.

In beiden Fällen entsteht bei B das Maximalmoment:

$$\mathfrak{M}_B = \frac{p\,a^2}{2}$$

Ist $a < l$, so wird A positiv. Es entsteht dann zwischen den Stützpunkten A und B ein zweites Maximalmoment von der Größe:

$$\mathfrak{M} = \frac{p\,x_0{}^2}{8}$$

wobei x_0 die Entfernung des Punktes D (d. i. desjenigen Punktes, in welchem das Moment = Null wird) von dem Stützpunkt A bedeutet.

Das Moment in der Entfernung x vom Auflager A ist:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - \frac{p\,x^2}{2}$$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p}{2\,l}\,(l^2 - a^2)\,x - \frac{p\,x^2}{2}$$

Dieses Moment wird = Null am Auflager A, d. h. für $x = 0$ und außerdem für:

$$x_0 = \frac{l^2 - a^2}{l}$$

Danach wird dann:

$$\mathfrak{M} = \frac{p}{8}\left(\frac{l^2 - a^2}{l}\right)^2$$

Um diejenige Größe von a zu ermitteln, bei welcher der Balken die größte Tragfähigkeit besitzt, hat man die Momente $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_B$ einander gleich zu setzen.

$$\frac{p}{8}\left(\frac{l^2 - a^2}{l}\right)^2 = \frac{p\,a^2}{2}$$

Daraus folgt:

$$a = l\,(\sqrt{2} - 1) = 0{,}4142\,.\,l$$

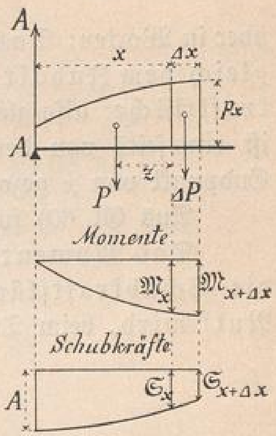
Nach Einsetzung dieses Wertes ergibt sich:

$$x_0 = 0{,}8284\,.\,l = 2\,a$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_B = 0{,}0858\,p\,l^2$$

Ist die Belastung eines Trägers unsymmetrisch, so läßt sich die Lage des gefährlichen Querschnittes am einfachsten dadurch bestimmen, daß man die Stelle aufsucht, wo die Schubkraft = Null ist. An derselben Stelle erreicht das Moment seinen größten Wert.

Fig. 60.



Ein einfacher Beweis dieses Satzes, welcher für den besonderen Fall des gleichmäßig auf seine ganze Länge belasteten Trägers schon S. 68 angeführt war, ist folgendermaßen:

Bei dem beliebig belasteten Träger (Fig. 60) hat für eine Stelle in der Entfernung x vom Auflager A die Schubkraft die Größe:

$$\mathfrak{S}_x = A - P$$

Wächst x um das sehr kleine Stück Δx an, so entsteht:

$$\mathfrak{S}_{x+\Delta x} = A - (P + \Delta P)$$

Danach beträgt die Aenderung der Schubkraft, während x um Δx anwächst:

$$\Delta \mathfrak{S}_x = \mathfrak{S}_{x+\Delta x} - \mathfrak{S}_x = -\Delta P = -p_x \cdot \Delta x \quad . \quad . \quad . \quad 58)$$

Für die Momente an den Stellen in den Entfernungen x und $x + \Delta x$ von A erhält man die Ausdrücke:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - P\,z$$

$$\mathfrak{M}_{x+\Delta x} = A\,(x + \Delta x) - P\,(z + \Delta x) - \Delta P \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

oder da das letzte Glied $\Delta P \cdot \frac{\Delta x}{2}$ wegen Kleinheit vernachlässigt werden kann:

$$\mathfrak{M}_{x+\Delta x} = A\,(x + \Delta x) - P\,(z + \Delta x)$$

Die Zunahme des Moments beträgt danach:

$$\Delta \mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_{x+\Delta x} - \mathfrak{M}_x = A\,\Delta x - P\,\Delta x = (A - P)\,\Delta x$$

und wenn für $(A - P)$ der obige Wert $\mathfrak{S}_x$ eingesetzt wird:

$$\Delta \mathfrak{M}_x = \mathfrak{S}_x \cdot \Delta x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 59)$$

d. h. die Zunahme des Moments von einer Stelle in der Entfernung x bis zu der nächstfolgenden Stelle in der Entfernung $x + \Delta x$ vom Auflagerpunkte A ist gleich dem Flächeninhalt des lotrecht darunter liegenden Streifens der Schubkraftfläche.

Aus Gl. 59) folgt bei der zeichnerischen Darstellung der Momente:

Wird $\mathfrak{S}_x$ = Null, so wird auch $\Delta \mathfrak{M}_x$ = Null, d. h. das Moment $\mathfrak{M}$ erreicht seinen größten Wert an der Stelle, wo die Schubkraft $\mathfrak{S}$ = Null ist (oder bei einer Einzellast von + in — übergeht).

Durch Summierung vom Auflagerpunkte A ab, also von x = Null ab gerechnet, entsteht aus Gl. 59)

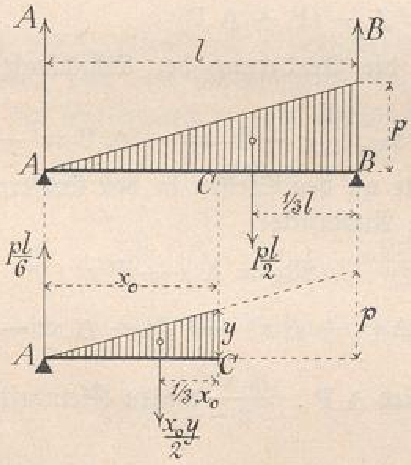
$$\mathfrak{M}_x = \Sigma\,(\mathfrak{S}_x \,.\, \Delta\, x) = \Big[\mathfrak{S}\text{-Fläche}\Big]_0^x \quad . \;.\; .\; .\; . \quad 60)$$

oder in Worten: Das Moment in der Entfernung x vom Auflager ist gleich dem Inhalt der lotrecht unter der Strecke x liegenden Schubkraftfläche: also gleich demjenigen Teil der Schubkraftfläche, welcher begrenzt ist einerseits von der Auflager-Lotrechten, andererseits von der durch den Endpunkt von x gezogenen Lotrechten.

Aus Gl. 60) folgt:

Das Moment $\mathfrak{M}$ wird = Null bei dem Querschnitt, für welchen die Schubkraftfläche (bestehend aus positiven und negativen Teilen) = Null wird, beim Träger auf zwei Endstützen also an den Auflagern.

Fig. 61.



Die Belastungsfläche des Trägers A B (Fig. 61) bilde ein Dreieck mit der Höhe p bei dem Auflager B. Es ist dann:

$$A = \left(\frac{p\,l}{2} \,.\, \frac{l}{3}\right) : l = \frac{p\,l}{6}$$

Wird die Entfernung der Stelle, wo die Schubkraft = Null ist, vom Auflager A mit x_0 und die Belastungshöhe an dieser Stelle mit y bezeichnet, so erhält man zunächst:

$$y = \frac{p\,x_0}{l}$$

und danach die Belastung des Stückes A C:

$$\frac{x_0\,y}{2} = \frac{p\,x_0{}^2}{2\,l}$$

Aus der Bedingung: $\frac{x_0\, y}{2} = A$ oder:

$$\frac{p\, x_0^2}{2\, l} = \frac{p\, l}{6}$$

folgt dann:

$$x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

Das an dieser Stelle entstehende größte Moment ergibt sich zu:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\, l}{6}\, x_0 - \frac{p\, x_0^2}{2\, l} \cdot \frac{x_0}{3}$$

und wenn für x_0 der obige Wert eingesetzt wird:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\, l^2}{9\sqrt{3}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 61)$$

Fig. 62.

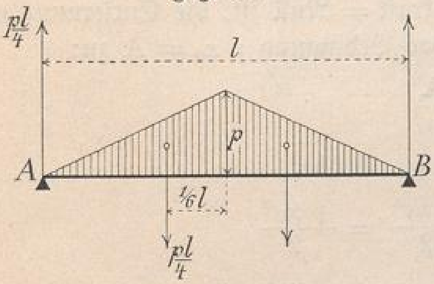
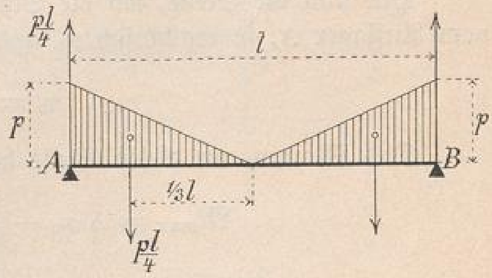


Fig. 63.



Für den symmetrischen Belastungsfall (Fig. 62) (Belastungshöhe in der Trägermitte $= p$, an den Auflagern $=$ Null) ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\, l}{4}\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{6}\right) = \frac{p\, l^2}{12} \quad \ldots\ldots \quad 62)$$

Ist umgekehrt die Belastungshöhe an den Auflagern $= p$ und in der Trägermitte $=$ Null (Fig. 63), so wird:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\, l}{4}\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3}\right) = \frac{p\, l^2}{24} \quad \ldots\ldots \quad 63)$$

Die Addition der Gleichungen 62) und 63) ergibt wieder das Maximalmoment des gleichmäßig mit p auf die ganze Länge l belasteten Trägers (vergl. Gl. 53) S. 68) zu:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\, l^2}{8}$$

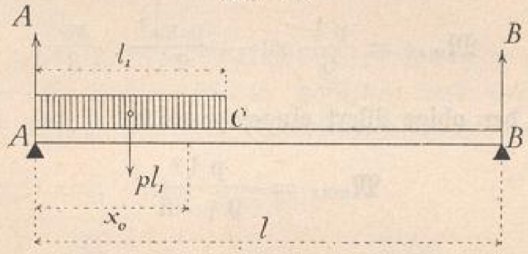
Der Träger A B (Fig. 64) sei von A bis C gleichmäßig mit p für die Längeneinheit belastet. Man erhält die Stützenwiderstände A und B, indem man sich die gleichmäßig verteilte Belastung im Schwerpunkte der Belastungsfläche vereinigt denkt, aus den Momentengleichungen:

$$A\,l - p\,l_1\,(l - {}^1\!/_2\,l_1) = 0$$
$$B\,l - p\,l_1\,.\,{}^1\!/_2\,l_1 = 0$$

zu:

$$A = \frac{p\,l_1\,(l - {}^1\!/_2\,l_1)}{l} \qquad B = \frac{p\,l_1^2}{2\,l}$$

Fig. 64.



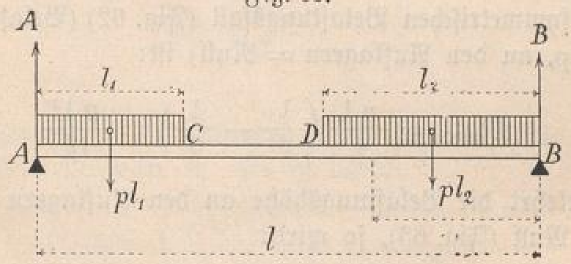
Hat nun die Stelle, wo die Schubkraft = Null ist, die Entfernung x_0 vom Auflager A, so ergibt sich x_0 aus der Bedingung $p\,x_0 = A$ zu:

$$x_0 = \frac{A}{p}$$

Das Moment an dieser Stelle hat die Größe:

$$\mathfrak{M}_{max} = A\,x_0 - \frac{p\,x_0^2}{2} = \frac{p\,x_0^2}{2}$$

Fig. 65.



Für den Belastungsfall (Fig. 65), bei welchem man sich die gleichmäßig verteilten Belastungen wieder in den Schwerpunkten der Belastungsflächen vereinigt zu denken hat, erhält man:

$$A = \frac{p\,l_1\,(l - {}^1\!/_2\,l_1) + p\,l_2\,.\,{}^1\!/_2\,l_2}{l}$$

$$B = \frac{p\,l_1\,.\,{}^1\!/_2\,l_1 + p\,l_2\,(l - {}^1\!/_2\,l_2)}{l}$$

Ist $l_2 > l_1$, so ergibt sich die Größe x_0, das ist die Entfernung der Stelle, wo die Schubkraft = Null ist, wo also zugleich das Biegungsmoment seinen größten Wert erreicht, vom Auflager B aus der Bedingung $p\,x_0 = B$ zu:

$$x_0 = \frac{B}{p}$$

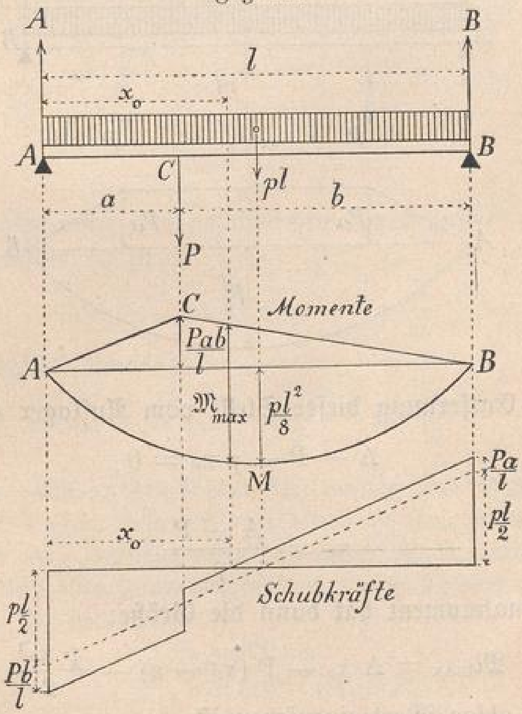
folglich wird:

$$\mathfrak{M}_{max} = B\,x_0 - \frac{p\,x_0^2}{2} = \frac{p\,x_0^2}{2}$$

3. Zusammengesetzte Belastung.

Wirkt auf einen an den Enden unterstützten, gleichmäßig durch p für die Längeneinheit belasteten Balken noch eine Einzelkraft P (Fig. 66), so setzt sich das Moment für eine beliebige Stelle des Balkens zusammen aus zwei Teilen,

Fig. 66.



nämlich aus einem Beitrage, herrührend von der gleichmäßig über die Länge verteilten Belastung und aus dem Beitrage, den die Einzelkraft P liefert. Diese Beiträge sind einzeln für sich zu berechnen und zu addieren.

Die Stützenwiderstände sind:

$$A = \frac{p\,l}{2} + \frac{P\,b}{l}$$

$$B = \frac{p\,l}{2} + \frac{P\,a}{l}$$