Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

1. Der gleichmäßig belastete Träger auf drei Stützen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78212

§ 10.

Die statisch unbestimmten Träger.

Statisch unbestimmt nennt man solche Träger, bei denen es nicht möglich ist, die unbekannten Größen (d. s. die Momente und Stützenwiderstände) nur mit Hilfe der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (§ 4 S. 16) zu bestimmen. Zur Berechnung solcher Träger sind außer den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen noch die Elastizitätsgleichungen Gl. 31) bis 34) S. 43 und 44 zu benutzen.

Die einfachsten Fälle der statisch unbestimmten Träger sollen in folgendem kurz besprochen werden.

1. Der gleichmäßig belastete Träger auf drei Stützen.

Es soll vorausgesetzt werden, daß die Stützen alle in gleicher Höhe liegen und daß die Felder A C und B C die gleiche Spannweite l haben (Fig. 73).

Da die Durchbiegung des Punktes A gegen den Punkt C = Null ist, so erhält man, wenn die gleichmäßige Belastung wieder mit p bezeichnet wird, mit Anwendung der Gl. 36) S. 46 und Gl. 40) S. 49:

$$0 = \frac{A\,l^3}{3\,E\,J} - \frac{p\,l^4}{8\,E\,J}$$

Da wegen des symmetrischen Belastungszustandes A = B sein muß, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \frac{3}{8}\,\mathbf{p\,l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 64)$$

Die Summe aller drei Stützenwiderstände muß gleich der Gesamtbelastung = 2 p l sein, danach wird:

$$\mathbf{C} = \frac{10}{8}\,\mathbf{p\,l} = \frac{5}{8}\,.\,\mathbf{2\,p\,l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 65)$$

Der Druck auf die Mittelstütze beträgt 5/8 der Gesamtbelastung.

Nachdem die Stützenwiderstände mit Hilfe der Elastizitätsgleichungen gefunden sind, erfolgt die weitere Behandlung des Trägers in gewohnter Weise.

Das Moment in der Entfernung x vom Auflager ist:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - \frac{p\,x^2}{2} = \frac{3}{8}\,p\,l\,.\,x - \frac{p\,x^2}{2}$$

Fügt man das Glied $^1/_8\,p\,l\,x$ positiv und negativ hinzu, so erhält man:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p\,l\,x}{2} - \frac{p\,x^2}{2} - \frac{p\,l\,x}{8} = \frac{p}{2}\,x\,(l - x) - {}^1/_8\,p\,l\,x$$

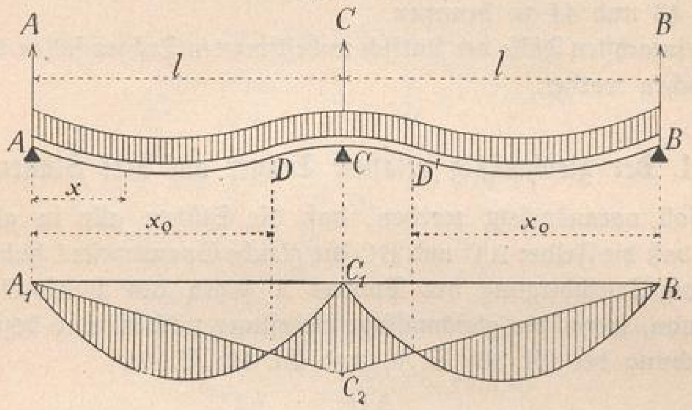
Das erste Glied der rechten Seite stimmt überein mit Gl. 52) S. 67, die graphische Darstellung desselben ist also eine Parabel mit der Pfeilhöhe $^1/_8\,p\,l^2$. Das zweite Glied ist proportional x, erreicht seinen größten

Wert $\frac{1}{8}\,p\,l^2$ für $x = l$ und läßt sich darstellen durch die Gerade $A_1\,C_2$ bezw. $B_1\,C_2$ (Fig. 73), wenn $C_1\,C_2 = \frac{1}{8}\,p\,l^2$ aufgetragen wird.

Man erhält daher nach der letzten Gleichung graphisch die Momente $\mathfrak{M}$, wenn man von den Ordinaten der Parabel diejenigen der Geraden abzieht. Dadurch entsteht die in Fig. 73 schraffierte Momentenfläche.

Der Träger ist so durchgebogen, daß über der Mittelstütze die oberen Fasern, in den Feldern zwischen den Punkten A und D bezw. B und D′ dagegen die unteren Fasern gezogen werden. In den Punkten D und D′

Fig. 73.



geht die eine Krümmung in die andere über, folglich ist in diesen Punkten das Moment = Null.

Bezeichnet man den Abstand der Punkte D und D′ von den Auflagern mit x_0, so ergibt sich, indem man $\mathfrak{M}_x = 0$ setzt:

$$x_0 = \frac{3}{4}\,l$$

Diese Trägerstücke A D und B D′ können daher als an den Enden frei aufliegende Träger von der Länge $\frac{3}{4}\,l$ angesehen werden. Das größte Moment für diese Trägerstücke ist:

$$\mathfrak{M} = p \cdot \frac{3}{4}\,l \cdot \frac{\frac{3}{4}\,l}{8} = \frac{9}{128}\,p\,l^2$$

Das Moment über der Mittelstütze erhält man, wenn man in dem Ausdruck $\mathfrak{M}_x$ für x den Wert l einsetzt.

Man findet:

$$\mathfrak{M}_c = -\frac{p\,l^2}{8}$$

Der absolute Wert von $\mathfrak{M}_c$ ist größer als $\mathfrak{M}$, der gefährliche Querschnitt findet also über der Stütze C statt, und der Träger ist zu berechnen nach der Gleichung:

$$\frac{\mathbf{p\,l^2}}{\mathbf{8}} = \mathbf{k\,W} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 66)$$

Diese Gleichung stimmt überein mit der Gleichung 54) S. 68.

Danach ist das Moment über der Mittelstütze des symmetrischen gleichmäßig belasteten Trägers von der Länge 2 l auf drei in gleicher Höhe liegenden Stützen gleich dem größten Momente des gleichmäßig belasteten, an beiden Enden frei aufliegenden Trägers von der Länge l.

Für die Berechnung des Trägerquerschnittes kann man daher annehmen, daß die Felder A C und B C durch je einen besonderen Träger überspannt sind.

Zur Berechnung der Stütze C selbst, die z. B. aus einer Säule oder einem Unterzug bestehen kann, ist diese Annahme dagegen unzulässig, denn der Druck, welchen zwei Einzelträger A C und B C auf die Stütze C übertragen, würde nur $= p\,l$ sein, während in Wirklichkeit der durchlaufende Träger A C B nach Gl. 65) einen größeren Druck auf die Mittelstütze ausübt.

Durch eine Aenderung in der Höhenlage der Stützen werden die Momente stark beeinflußt, und zwar wird durch eine Senkung der Mittelstütze das Moment $\mathfrak{M}_c$ verkleinert, die Momente $\mathfrak{M}$ vergrößert. Durch eine geringe Senkung der Mittelstütze läßt sich daher die Tragfähigkeit des Balkens vergrößern, wogegen eine Ueberhöhung der Mittelstütze nachteilig auf die Tragfähigkeit einwirkt. Da durch Zufälligkeiten, z. B. nachträgliches ungleichförmiges Setzen der Auflager, die Höhenlage derselben sich gegeneinander leicht etwas verändern kann und eine genaue Ueberwachung häufig schwer durchzuführen ist, so bleibt hauptsächlich aus diesem Grunde die Anwendung der Träger auf mehreren Stützen mit Recht beschränkt, obgleich bei diesen an Material etwas gespart werden kann.

2. Der durch Einzelkräfte belastete Träger auf drei Stützen.

Es wird auch hier wieder vorausgesetzt, daß die Stützen in gleicher Höhe liegen, und daß die Feldweiten A C und B C (Fig. 74) einander gleich sind. Die Einzelkräfte P sollen in den Feldmitten angreifen.

Die Durchbiegung des Punktes A gegen den Punkt C ist im ganzen = Null. Sie setzt sich zusammen aus einem Teile, hervorgebracht durch den Stützenwiderstand A und aus einem andern Teile in entgegengesetzter Richtung, welcher durch die Einzelkraft P erzeugt wird.

Der Angriffspunkt E der Einzelkraft P erfährt nach Gl. 36) S. 46 durch P allein die Durchbiegung:

$$f_1 = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3\,E\,J} = \frac{P\,l^3}{24\,E\,J}$$

Der Punkt A liegt aber (Fig. 75) um das Maß:

$$f_2 = \frac{l}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

tiefer als der Punkt E, und da nach Gl. 38) S. 47:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2\,E\,J}$$