Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

5. Der an beiden Enden wagrecht eingespannte, in der Mitte durch eine Einzelkraft P belastete Träger.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78212

und für das rechte Trägerstück:

$$f = \frac{p\left(\frac{l}{2} - x_0\right)^4}{8\,E\,J} + \frac{p\,x_0\left(\frac{l}{2} - x_0\right)^3}{3\,E\,J}$$

Setzt man diese beiden Werte von f einander gleich, so folgt:

$$3\left[\left(\frac{l}{2} + x_0\right)^4 - \left(\frac{l}{2} - x_0\right)^4\right] = 8\,x_0\left[\left(\frac{l}{2} + x_0\right)^3 + \left(\frac{l}{2} - x_0\right)^3\right]$$

Durch Auflösung dieser Gleichung ergibt sich:

$$x_0 = \frac{l}{2\sqrt{3}}$$

Danach ist die Länge des Mittelstückes $D\,D'$

$$2\,x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

und das größte Moment bei C:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{p\,\frac{l}{\sqrt{3}} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}}}{8} = \frac{p\,l^2}{24}$$

Für das Moment bei B ergibt sich:

$$\mathfrak{M} = p\,x_0\left(\frac{l}{2} - x_0\right) + \frac{p\left(\frac{l}{2} - x_0\right)^2}{2}$$

und wenn für x_0 der obige Wert eingesetzt wird:

$$\mathfrak{M} = p\,\frac{l}{2\sqrt{3}}\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{p\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2\sqrt{3}}\right)^2}{2}$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{M} = \frac{p\,l^2}{12}$$

Die Einspannungsstellen A und B sind also die gefährlichen Querschnitte und der Träger ist zu berechnen nach der Gleichung:

$$\frac{\mathbf{p\,l^2}}{\mathbf{12}} = \mathbf{k\,W} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 68)$$

5. Der an beiden Enden wagerecht eingespannte, in der Mitte durch eine Einzelkraft P belastete Träger.

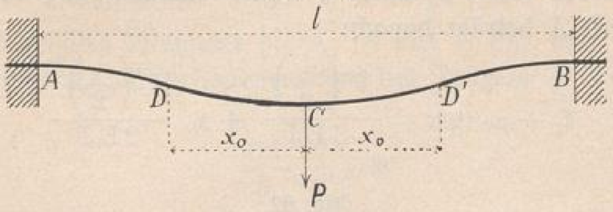
Die Entfernung x_0 der Punkte D und D′, in denen das Moment = Null ist, von der Mitte des Trägers erhält man in ähnlicher Weise wie unter 4).

Das mittlere Trägerstück $D\,D'$ von der Länge $2\,x_0$ kann betrachtet werden als ein an den Enden frei aufliegender Träger, welcher auf jeden

Unterstützungspunkt den Auflagerdruck $^1/_2$ P überträgt. Die Seitenstücke AD und BD′ bilden daher Konsolträger, an deren freiem Ende die Kraft $^1/_2$ P wirkt.

Denkt man sich den Träger AB (Fig. 80) im Punkte D′ zerschnitten, so hat man für das linke Trägerstück AD′ die lotrecht aufwärts gerichtete

Fig. 80.

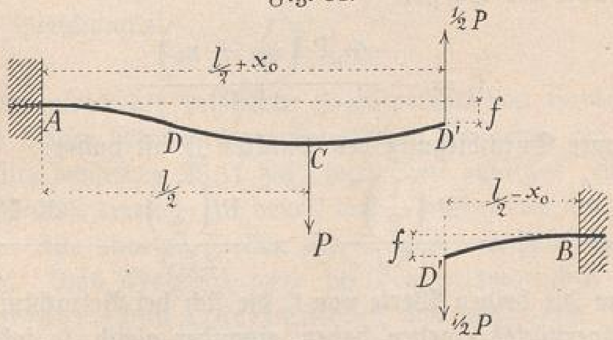


Kraft $^1/_2$ P, für das rechte Trägerstück BD′ die lotrecht abwärts gerichtete Kraft $^1/_2$ P als äußere Kraft hinzuzufügen (Fig. 81).

Die Durchbiegung f des Punktes D′ gegen die Punkte A und B ergibt sich dann für das rechte Trägerstück BD′ nach Gl. 36) S. 46 zu:

$$f = \frac{^1/_2\, P \left(\frac{l}{2} - x_0\right)^3}{3EJ}$$

Fig. 81.



Für das linke Trägerstück AD′ setzt sich die Durchbiegung f aus mehreren Teilen zusammen.

Die in C angreifende Kraft P (Fig. 82) erzeugt im Punkte C die Durchbiegung:

$$f_1 = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EJ}$$

Die Tangente des Winkels, den die Trägerachse in C mit der Wagerechten bildet, hat nach Gl. 38) S. 47 die Größe:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EJ}$$

folglich liegt der Punkt D′ um:

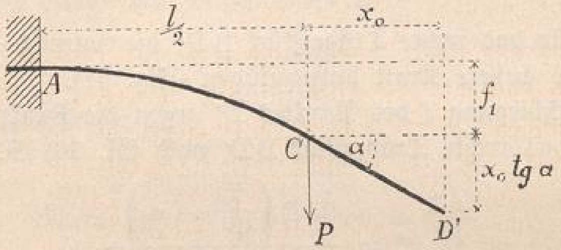
$$x_0 \operatorname{tg} \alpha = x_0 \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EJ}$$

tiefer als der Punkt C.

Die von der Kraft P allein bewirkte Durchbiegung des Punktes D′ gegen den Punkt A beträgt danach:

$$f_1 + x_0 \operatorname{tg} \alpha = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EJ} + x_0 \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EJ}$$

Fig. 82.



Die in D′ angreifende Kraft $^1/_2$ P erzeugt nun aber eine Durchbiegung nach aufwärts von der Größe:

$$f_2 = -\frac{^1/_2\, P\left(\frac{l}{2} + x_0\right)^3}{3EJ}$$

Die gesamte Durchbiegung des Punktes D′ ist daher:

$$f = f_1 + x_0 \operatorname{tg} \alpha + f_2 = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EJ} + x_0 \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EJ} - \frac{^1/_2\, P\left(\frac{l}{2} + x_0\right)^3}{3EJ}$$

Setzt man die beiden Werte von f, die sich bei Betrachtung des rechten und linken Trägerstückes ergeben haben, einander gleich, so folgt:

$$\left(\frac{l}{2} - x_0\right)^3 + \left(\frac{l}{2} + x_0\right)^3 = 2\left(\frac{l}{2}\right)^3 + 3x_0\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

woraus man durch Auflösung der Gleichung für x_0 erhält:

$$x_0 = \frac{l}{4}$$

Das mittlere Trägerstück D D′ hat daher die Länge

$$2x_0 = \frac{l}{2}$$

und das Moment bei C ist:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)}{4} = \frac{Pl}{8}$$

Die Konsolträger AD und BD′ haben die Länge $\frac{l}{4}$ und sind am freien Ende durch die Kraft $\frac{P}{2}$ belastet. Die Momente bei A und B haben danach die Größe:

$$\mathfrak{M} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Pl}{8}$$

Die drei größten Momente bei A, B und C sind also einander gleich und das erforderliche Widerstandsmoment des Trägers ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{\mathbf{P\,l}}{\mathbf{8}} = \mathbf{k\,W} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 69)$$

In Bezug auf die eingespannten Träger verdient schließlich noch bemerkt zu werden, daß in der Praxis auf eine vollkommene Einspannung nicht leicht zu rechnen ist, und daß man sicherer geht, keine Rücksicht darauf zu nehmen und den Träger immer als Träger auf zwei Stützen anzusehen und zu berechnen.

§ 11.

Die Träger von gleichem Biegungswiderstand.

In der Gleichung:

$$\mathfrak{M} = k\,W$$

darf k höchstens gleich der zulässigen Inanspruchnahme werden.

Bei den bisher betrachteten prismatischen Trägern, bei denen W für alle Querschnitte denselben Wert hat, wird diese zulässige Inanspruchnahme nur in den Punkten erreicht, in denen das Moment der äußeren Kräfte ein Maximum ist. Alle anderen Stellen des Trägers erleiden eine geringere Inanspruchnahme. Das Material wird bei den prismatischen Trägern daher nur in den gefährlichen Querschnitten voll ausgenutzt.

Soll die Tragfähigkeit des Materials in allen Querschnitten voll ausgenutzt werden, so darf der Träger nur in den Teilen eine prismatische Form haben, in denen das Moment unveränderlich ist, wie z. B. bei dem Träger Fig. 37 S. 47 zwischen den Punkten A und C, in Fig. 51 S. 62 zwischen C und C′ und in Fig. 52 S. 62 zwischen A und B. In allen übrigen Teilen muß sich der Querschnitt mit dem Momente ändern, und zwar muß der Träger eine solche Form erhalten, daß die Spannung der äußeren Faserschicht in allen Querschnitten gleich der zulässigen Inanspruchnahme wird.

Träger, welche dieser Bedingung entsprechen, nennt man Träger von gleichem Biegungswiderstand. Diese Träger besitzen außer dem Vorteil der Materialersparung vor den prismatischen Trägern auch noch den Vorteil, daß die Belastung durch das Eigengewicht geringer ausfällt.