Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

2. Biegung und Verdrehung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78212

Nach Tabelle 1 § 6 S. 28 ist für Profil Nr. 14:

$$F = 20{,}4$$
$$W = 86{,}4$$

folglich:

$$k = \frac{8000}{2\,.\,20{,}4} + \frac{96\,000}{2\,.\,86{,}4} = 751 \text{ kg}$$

Das nächst kleinere Profil Nr. 12 würde eine Beanspruchung von über 1000 kg ergeben; das ⊏-Eisen Nr. 14 ist daher beizubehalten.

2. Biegung und Verdrehung.

Wirken auf einen prismatischen geraden Stab Kräfte, welche denselben um seine Längsachse zu verdrehen streben, und zugleich Kräfte, welche rechtwinklig zur Stabachse gerichtet sind, also eine Biegung hervorrufen, so treten in dem Stabe infolge der Verdrehung Schubspannungen und zugleich infolge der Biegung Zug- oder Druckspannungen auf, welche sich in jedem einzelnen Punkte zu einer Gesamtspannung vereinigen lassen.

Die Abmessungen des Stabes sind so zu bestimmen, daß die größte Gesamtspannung höchstens gleich der zulässigen Inanspruchnahme des Materiales wird.

Wird für irgend einen Querschnitt des Stabes das durch die rechtwinklig zur Stabachse gerichteten Kräfte hervorgerufene Biegungsmoment mit $\mathfrak{M}_B$, die dabei auftretende größte Zug- bezw. Druckspannung mit s, ferner das auf Verdrehung wirkende Moment (das Torsionsmoment) mit $\mathfrak{M}_T$, die dabei auftretende größte Schubspannung mit t bezeichnet, so hat man zur Bestimmung der Gesamtspannung die Gleichung*):

$$\mathbf{k} = \frac{3}{8}\,\mathbf{s} + \frac{5}{8}\sqrt{\mathbf{s}^2 + 4\,\mathbf{t}^2} \quad \ldots\ldots \quad 107)$$

Für den kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser d, dem Widerstandsmoment W und dem polaren Trägheitsmoment J_c bestehen für s bezw. t die Bedingungsgleichungen:

$$s = \frac{\mathfrak{M}_B}{W} = \frac{32\,\mathfrak{M}_B}{d^3\,\pi} \quad \ldots\ldots \quad 108)$$

$$t = \frac{\mathfrak{M}_T\,.\,d}{2\,J_c} = \frac{16\,\mathfrak{M}_T}{d^3\,\pi} \quad \ldots\ldots \quad 109)$$

Durch Einsetzung dieser Werte in Gl. 107) folgt:

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{d}^3\,\boldsymbol{\pi}}\left(\frac{3}{8}\,\mathfrak{M}_B + \frac{5}{8}\sqrt{\mathfrak{M}_B{}^2 + \mathfrak{M}_T{}^2}\right) \quad \ldots \quad 110)$$

oder:

$$\mathbf{d}^3 = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{k}\,\boldsymbol{\pi}}\left(3\,\mathfrak{M}_B + 5\sqrt{\mathfrak{M}_B{}^2 + \mathfrak{M}_T{}^2}\right) \quad \ldots\ldots \quad 111)$$

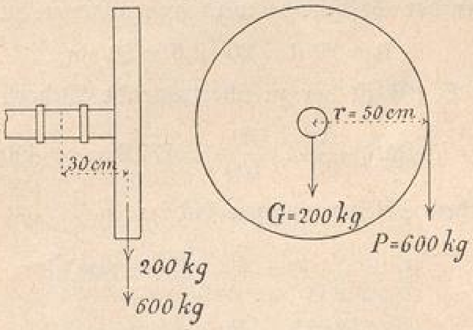
---

*) Vergl. Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit, 2. Aufl. S. 215 und 216.

Nach Gl. 111) läßt sich z. B. der Durchmesser d einer durch Zahnräder, Riemenscheiben u. s. w. belasteten und auf Verdrehung beanspruchten Welle berechnen.

Aufgabe 70. Es soll der Durchmesser d einer schmiedeeisernen Welle berechnet werden, welche nach Fig. 113 durch ein Zahnrad, dessen Eigengewicht G = 200 kg ist und welches einen Zahndruck von P = 600 kg überträgt, belastet ist.

Fig. 113.



Auflösung. Für den durch die Mitte des Lagers gelegten Querschnitt ist das Biegungsmoment:

$$\mathfrak{M}_B = (600 + 200)\, 30 = 24000$$

Das Verdrehungsmoment hat die Größe:

$$\mathfrak{M}_T = 600 \,.\, 50 = 30000$$

Bei k = 500 erhält man dann nach Gl. 111):

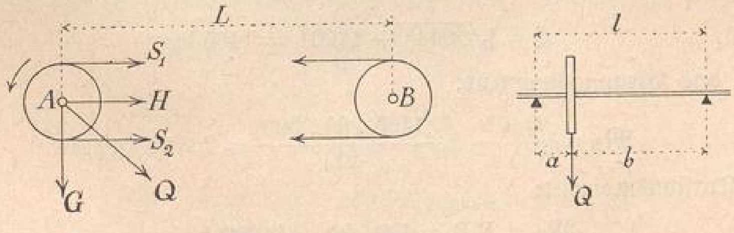
$$d^3 = \frac{4}{500 \,.\, 3{,}14} \left(3 \,.\, 24000 + 5 \sqrt{24000^2 + 30000^2}\right)$$

woraus folgt:

$$d = 8{,}8 \text{ cm}$$

Aufgabe 71. Von einer Welle A, die n = 100 Umdrehungen in der Minute macht, sollen auf eine andere in L = 16 m Entfernung und in gleicher Höhe befindliche parallele Welle B mittels Hanfseilbetrieb N = 60 Pferdekräfte übertragen werden. Länge der Welle A zwischen den Lagern: l = 4 m; Abstand der Seilscheibe vom linken Lager: a = 0,8 m; vom rechten Lager: b = 3,2 m (Fig. 114).

Fig. 114.



Die Welle A, welche zugleich auf Biegung und auf Verdrehung in Anspruch genommen wird, ist zu berechnen.

Auflösung. Der bei Hanfseilbetrieb übliche Seildurchmesser ist:

$$d = 4{,}5 \text{ cm}$$

Diesem entspricht der Seilquerschnitt:

$$\frac{d^2 \pi}{4} = 15{,}9 = \infty\ 16 \text{ qcm}$$

Gewicht des Seiles für 1 m Länge:

$$q = 1{,}5 \text{ kg}$$

Der Halbmesser der Seilscheibe wird angenommen zu:

$$R = 20\ d = 20 \ .\ 4{,}5 = 90 \text{ cm}$$

Nach Gl. 102) S. 134 ist der zu übertragende Widerstand:

$$P = 71\,620 \ .\ \frac{1}{90} \ .\ \frac{60}{100} = 477{,}5 = \infty\ 480 \text{ kg}$$

Die erforderlichen Seilspannungen sind*):

$$S_1 = \frac{5}{3}\ P = \frac{5}{3} \ .\ 480 = 800 \text{ kg}$$

$$S_2 = \frac{2}{3}\ P = \frac{2}{3} \ .\ 480 = 320 \text{ kg}$$

Rechnet man für die zulässige Inanspruchnahme der Seile rund $k = 8$ kg/qcm, so ergibt sich die Anzahl der anzuordnenden Seile zu:

$$z = \frac{S_1}{k \ .\ \frac{d^2 \pi}{4}} = \frac{800}{8 \ .\ 16} = \infty\ 6$$

Das auf die Scheibe kommende Seilgewicht ist:

$$G_1 = z\ L\ q = 6 \ .\ 16 \ .\ 1{,}5 = 144 \text{ kg}$$

Das Eigengewicht der Scheibe beträgt (nach praktischen Ausführungen des Eisenwerkes Wülfel vor Hannover):

$$G_2 = 800 \text{ kg}$$

zusammen:

$$G = G_1 + G_2 = 944 \text{ kg}$$

Die auf die Welle A wirkende Horizontalkraft besteht aus der Summe der Seilspannungen und ist danach:

$$H = 800 + 320 = 1120 \text{ kg}$$

Aus G und H ergibt sich die Mittelkraft:

$$Q = \sqrt{944^2 + 1120^2} = 1465 \text{ kg}$$

mithin ist das Biegungsmoment:

$$\mathfrak{M}_B = \frac{Q\ a\ b}{l} = \frac{1465 \ .\ 80 \ .\ 320}{400} = 93\,760 \text{ kg/cm}$$

und das Torsionsmoment:

$$\mathfrak{M}_T = P\ R = 480 \ .\ 90 = 43\,200 \text{ kg/cm}$$

---

*) Vergl. Lauenstein, Mechanik, 5. Aufl. Gl. 164) S. 118.

Für $k = 400$ kg/qcm und $\frac{32}{\pi} = \sim 10$ wird dann nach Gl. 110) S. 140 der auszuführende Wellendurchmesser:

$$d^3 = \frac{10}{400}\left(\frac{3}{8} \cdot 93760 + \frac{5}{8}\sqrt{93760^2 + 43200^2}\right) = 2492$$

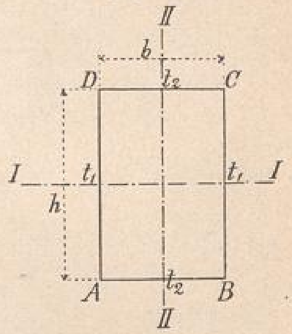
$$d = \sqrt[3]{2492} = 13{,}6 \text{ cm}$$

Bei dem rechteckigen Querschnitt (Fig. 115) ist die Schubspannung in den vier Ecken = Null. Die größten Schubspannungen treten auf in den Mitten der Umfangsseiten und sind*):

$$t_1 = \frac{3}{8}\,\frac{\mathfrak{M}_T \cdot b}{J_{II}} \quad . \; . \; . \; . \quad 112)$$

$$t_2 = \frac{3}{8}\,\frac{\mathfrak{M}_T \cdot h}{J_I} \quad . \; . \; . \; . \quad 113)$$

Fig. 115.



Ist $h > b$, so wird $J_{II} < J_I$, folglich $t_1 > t_2$, d. h. die stärkste überhaupt vorkommende Schubspannung erleiden diejenigen Punkte des Umfangs, deren Entfernung von der Stabachse am geringsten ist.

Für die Drehungsfestigkeit des rechteckigen Querschnittes ist daher stets das kleinste Trägheitsmoment maßgebend.

Setzt man $J_I = \frac{b\,h^3}{12}$ und $J_{II} = \frac{h\,b^3}{12}$ in die letzten Gleichungen ein, so entsteht:

$$\mathbf{t_1 = \frac{9}{2}\,\frac{\mathfrak{M}_T}{h\,b^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 114)$$

$$\mathbf{t_2 = \frac{9}{2}\,\frac{\mathfrak{M}_T}{b\,h^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 115)$$

Aufgabe 72. Es sollen die Abmessungen h und b der in Fig. 116 abgebildeten, mit $P = 4000$ kg belasteten Kurbel von rechteckigem Querschnitt berechnet werden, unter der Annahme, daß $b = \frac{1}{2}\,h$ ist.

Da hier die Biegungsebene ($\mathfrak{M}_B$-Ebene) parallel zu den Kanten A B bezw. C D gerichtet ist, so bildet E E′ die neutrale Achse, und die größte Biegungsspannung s entsteht in den Kanten A D und B C. Die größten Schubspannungen t_1 und t_2 treten auf in den Punkten E und E′ bezw. F und F′, die größte Gesamtspannung überhaupt in den Mitten der Seiten A D und B C, für welche:

$$s = \frac{\mathfrak{M}_B}{W} = \frac{6\,\mathfrak{M}_B}{b\,h^2}$$

und:

$$t_2 = \frac{9}{2}\,\frac{\mathfrak{M}_T}{b\,h^2}$$

Nun ist:

$$\mathfrak{M}_B = 4000 \cdot 50 = 200\,000 \text{ kg/cm} = 200 \text{ t cm}$$

$$\mathfrak{M}_T = 4000 \cdot 14 = 56\,000 \text{ kg/cm} = 56 \text{ t cm}$$

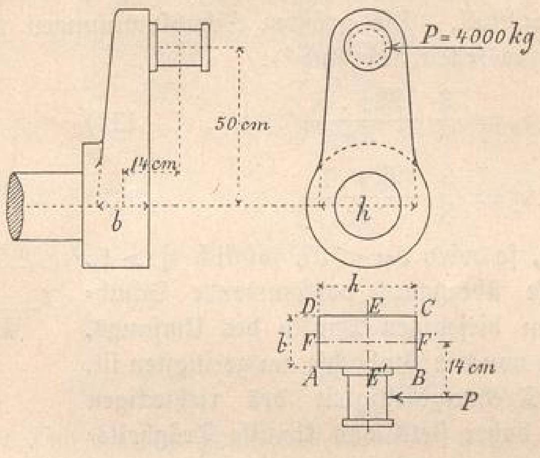
*) Vergl. Keck, Vorträge über Mechanik, T. II S. 69.

folglich für $b = \frac{1}{2}h$:

$$s = \frac{6 \cdot 200}{\frac{1}{2}h^3} = \frac{2400}{h^3}$$

$$t_2 = \frac{9}{2} \cdot \frac{56}{\frac{1}{2}h^3} = \frac{504}{h^3}$$

Fig. 116.



für $k = 500$ kg/qcm $= 0{,}5$ t/qcm wird somit nach Gl. 107):

$$0{,}5 = \frac{3}{8} \cdot \frac{2400}{h^3} + \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{2400}{h^3}\right)^2 + 4\left(\frac{504}{h^3}\right)^2}$$

$$0{,}5 = \frac{1}{8\,h^3}\left(7200 + 5\sqrt{2400^2 + 4 \cdot 504^2}\right) = \frac{20\,215}{8\,h^3}$$

oder:

$$h = \sqrt[3]{5054} = 17{,}2 \text{ cm}$$

folglich:

$$b = \tfrac{1}{2}h = 8{,}6 \text{ cm}$$

Die Schubspannung in der Mitte der Seiten A B bezw. C D wird nach Gl. 114):

$$t_1 = \frac{9}{2}\,\frac{\mathfrak{M}_T}{h\,b^2} = \frac{9}{2}\,\frac{56}{17{,}2 \cdot 8{,}6^2} = 0{,}2 \text{ t/qcm} = 200 \text{ kg/qcm}$$

§ 17.

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.

Widerstand gegen Zug oder Druck.

$$\mathbf{P = F\,k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)\ \text{S. } 6$$

$$\lambda = \frac{\mathbf{P\,l}}{\mathbf{F\,E}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)\ \text{S. } 6$$