# Die Statik der Hochbau-Constructionen

**Landsberg, Theodor**

**Stuttgart, 1899**

1. Kap. Allgemeines

PETERSEN, J. Lehrbuch der Statik fefter Körper. Deutfche Ausg. von R. v. FISCHER-Benzon. Kopenhagen 1882.
MAURER, M. *Statique graphique appliquée aux conftructions, toitures, planchers, poutres etc.* Paris 1882. — 2. Aufl. 1885.
GRAHAM, R. H. *Graphic and analytic ftatics in theory and comparifon etc.* London 1883. (New-York 1887.)
WILDA, E. Statik fefter Körper. Brünn 1884.
GRUNER, O. Formeln und Tabellen zu einfachen ftatifchen Berechnungen der bei Hochbauten vorkommenden Eifenconftructionen. Leipzig 1885.
SCHLOESSER, H. Anleitung zur ftatifchen Berechnung von Eifenconftructionen. Berlin 1885.
CREMONA, L. *Les figures réciproques en ftatique graphique.* Paris 1885. — Mit Anhang von SAVIATTI.
JENTZEN, E. Baumechanik mit befonderer Rückficht auf die Berechnung der Träger und Stützen aus Holz und Eifen etc. Hamburg 1886.
FLAMANT, A. *Stabilité des conftructions, réfiftance des matériaux.* Paris 1886. — 2. Aufl. 1896.
Praktifche Unterrichtsbücher für Bautechniker. III. Die Feftigkeitslehre und die Statik im Hochbau. Von H. DIESENER. Halle 1886.
HENNEBERG, L. Statik der ftarren Syfteme. Darmftadt 1886.
HAUSSER, A. E. & L. CUNQ. *Statique graphique appliquée etc.* Paris. Erfcheint feit 1886.
SCHLOTKE, J. Lehrbuch der graphifchen Statik. Hamburg 1887.
MÜLLER-Breslau, H. F. B. Die graphifche Statik der Bauconftructionen. Leipzig 1887—96.
RITTER, W. Anwendung der graphifchen Statik. Theil I: Die im Innern eines Balken wirkenden Kräfte. Zürich 1888. — Theil II: Das Fachwerk. Zürich 1890.
BALL, R. S. Theoretifche Mechanik ftarrer Syfteme. Herausg. von H. GRAVELIUS. Berlin 1889.
KOECHLIN, M. *Applications de la ftatique graphique.* Paris 1889.
LAUENSTEIN, R. Die graphifche Statik. Stuttgart 1889. — 4. Aufl. 1898.
SCHMID, C. Statik und Feftigkeitslehre. Stuttgart 1891. — 2. Aufl. 1897.
MÜLLER-Breslau, F. B. Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Berlin 1892.
BAKER, W. L. *The beam etc.* London 1892.
KECK, W. Vorträge über Elafticitätslehre. Hannover 1892—93.
MÜLLER-Breslau, F. B. Die neueren Methoden der Feftigkeitslehre und der Statik der Bauconftructionen. Leipzig 1893.
CLAUSSEN, E. Statik und Feftigkeitslehre in ihrer Anwendung auf Bauconftructionen. Berlin 1893.
KECK, W. Vorträge über graphifche Statik. Hannover 1894.
BAYER, A. Handbuch zur Berechnung der im Hochbau vorkommenden Conftructionen in Eifen, Stein und Holz. Wien 1896.
PULLEN, W. W. F. *The application of graphic methods to the defign of ftructures.* Manchefter 1896.
DOMITROWICH, A. v. Statifche Berechnung von Balkendecken, Säulen und Stützen im Hochbaufache. Wien 1897.
KECK, W. Vorträge über Mechanik etc. Hannover 1897.
FROELICH, H. Elementare Anleitung zur Anfertigung ftatifcher Berechnungen für die im Hochbau üblichen Conftructionen mit eifernen Trägern und Stützen etc. Berlin 1892. — 2. Aufl. 1897.
ROUTH, E. J. Die Dynamik der Syfteme ftarrer Körper. Deutfch von A. SCHEPP. Leipzig 1898.

---

## 1. Kapitel.

# Allgemeines.

2. Aeufsere und innere Kräfte.

Für die Löfung der beiden in Art. 1 bezeichneten Aufgaben ift die Kenntnifs derjenigen Kräfte nöthig, welche bei den verfchiedenartigen möglichen Belaftungszuftänden im Inneren der Conftructionen entftehen, d. h. der fog. inneren Kräfte oder Spannungen, welche auch wohl widerftehende Kräfte genannt werden. Die inneren Kräfte ftehen aber wiederum in einem ganz beftimmten Verhältnifs zu den von aufsen auf die Conftructionen wirkenden Kräften, zu den fog. äufseren Kräften, welche auch als die angreifenden Kräfte bezeichnet werden.

Eine jede ftatifche Unterfuchung zerfällt defshalb zunächft in zwei Theile: in die Ermittelung der äufseren Kräfte, bezw. der für den zu unterfuchenden Conftructionstheil ungünftigften äufseren Kräfte, und in die Ermittelung der inneren Kräfte oder Spannungen, welche durch die äufseren Kräfte hervorgerufen werden.

Die äufseren Kräfte laffen fich in zwei Hauptgruppen theilen:

1) Die Belaftungen. Diefelben find beim Beginne der Unterfuchung nur zum Theile bekannt; die Eigengewichte z. B. find zunächft noch unbekannt, da erft die vorzunehmende Berechnung die genauen Abmeffungen und damit die Gewichte feftftellen foll. Meiftens kann das Eigengewicht nach ausgeführten ähnlichen Conftructionen genügend genau angenommen werden.

2) Die Auflager- oder Stützendrücke derjenigen feften Punkte, welche die zu betrachtenden Conftructionen ftützen. Diefelben find meiftens von vornherein nicht gegeben; fie find nach den Gefetzen der Statik, bezw. der Elafticitätslehre zu ermitteln.

3. Ermittelung der äufseren Kräfte.

Da die Statik der Bau-Conftructionen fich nur mit folchen Körpern befchäftigt, welche unter der Einwirkung der äufseren Kräfte im Gleichgewichte find, fo kann man für die fämmtlichen äufseren Kräfte, welche auf eine Conftruction wirken, die Gleichgewichtsbedingungen aufftellen und mittels der fo gefundenen Gleichungen die unbekannten äufseren Kräfte, die Stützendrücke, ermitteln. Man führt die letzteren defshalb als vorläufig unbekannte Kräfte ein und ftellt die Gleichgewichtsbedingungen auf. Wenn alle Kräfte in einer Ebene wirken, wie es in den hier zu betrachtenden Fällen meiftens angenommen werden kann, giebt es drei Gleichgewichtsbedingungen, alfo auch drei Gleichungen für die Ermittelung der Unbekannten. Aus drei Gleichungen kann man aber nur drei Unbekannte finden; find alfo mehr als drei Unbekannte vorhanden, fo genügt die angegebene Methode nicht mehr. Die Gleichungen für die Stützendrücke dürfen in diefem Falle nicht mehr als drei Unbekannte enthalten, wenn die Aufgabe auf dem angegebenen Wege lösbar fein foll; anderenfalls ift zur Ermittelung derfelben die Elafticitätslehre zu Hilfe zu nehmen.

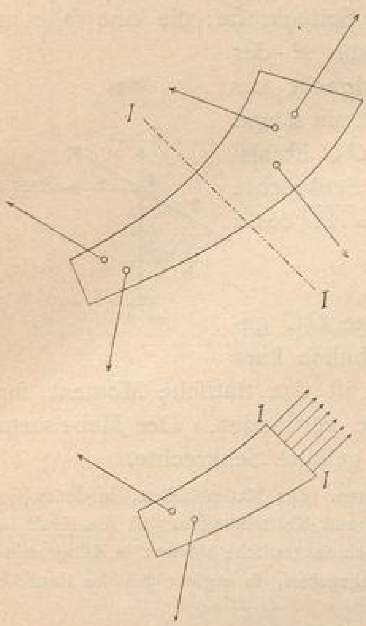
Wirken die Kräfte in verfchiedenen Ebenen, wie bei den Thürmen, Kuppeln u. f. w., fo ftehen fechs Gleichgewichtsbedingungen, alfo fechs Gleichungen zur Verfügung; die Gleichungen für die zu ermittelnden Stützendrücke dürfen alsdann fechs Unbekannte enthalten.

4. Ermittelung der inneren Kräfte.

Nachdem die fämmtlichen äufseren Kräfte gefunden find, müffen die inneren Kräfte oder Spannungen aufgefucht werden. Das hierbei einzufchlagende Verfahren ist folgendes.

Man denkt fich durch den Körper an derjenigen Stelle, an welcher man die inneren Kräfte kennen lernen will, eine Ebene $II$ (Fig. 1) hindurchgelegt und unterfucht den an der einen Seite diefer Ebene liegenden Theil; hier möge der Theil links von $II$ betrachtet werden. Auf diefen Theil werden von dem an der anderen Seite der Ebene $II$ liegenden Körpertheile gewiffe innere Kräfte übertragen, welche denfelben im Vereine mit den auf ihn wirkenden äufseren Kräften im Gleichgewichte halten; denn nicht nur der ganze Körper, fondern auch jeder Theil deffelben mufs unter der Einwirkung aller auf ihn wirkenden Kräfte, der äufseren und der inneren,

Fig. 1.



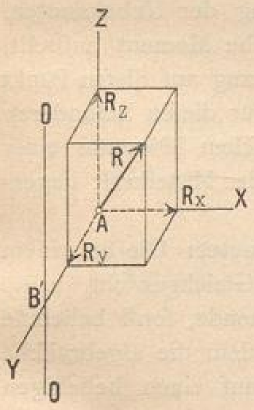

im Gleichgewichte ſein. Bringt man demnach die inneren Kräfte am linken Körpertheile an, ſo kann man auf die ſämmtlichen jetzt auf dieſen Theil wirkenden Kräfte die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen anwenden und aus dieſen die nach Gröſse und Richtung unbekannten inneren Kräfte ermitteln. Wie oben, ſtehen auch hier, falls alle Kräfte in einer Ebene liegen, drei Bedingungsgleichungen, falls die Kräfte in verſchiedenen Ebenen liegen, ſechs Bedingungsgleichungen zu Gebote; deſshalb iſt auch hier die Ermittelung der unbekannten inneren Kräfte auf dieſem Wege nur möglich, wenn dieſelben nicht mehr als drei, bezw. ſechs Unbekannte enthalten. Selbſtverſtändlich iſt das Ergebniſs das gleiche, ob man den Körpertheil an der einen oder anderen Seite der Ebene *II* unterſucht.

Die aus Vorſtehendem ſich ergebende Regel wird folgendermaſsen ausgedrückt: Man lege durch den Körper einen Schnitt, denke den Theil an der einen Seite des Schnittes fortgenommen und bringe an dem übrig bleibenden Bruchſtück alle Kräfte an, welche vor dem Durchſchneiden auf daſſelbe wirkten, d. h. die äuſseren Kräfte und die an der Schnittſtelle Seitens des anderen Bruchſtückes übertragenen inneren Kräfte. Alsdann befindet ſich daſſelbe in demſelben Zuſtande wie vor dem Durchſchneiden, d. h. im Gleichgewichte; man ſtelle nun für dieſe Kräfte die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf.

### a) Grundgeſetze der Statik feſter Körper.

Obgleich die Statik feſter Körper im Allgemeinen hier als bekannt vorausgeſetzt werden kann, ſollen im Folgenden doch einige der wichtigſten anzuwendenden Sätze kurz angeführt werden, damit über die gemachten Annahmen keine Unklarheit herrſche. 5. Statiſche Momente.

Fig. 2.

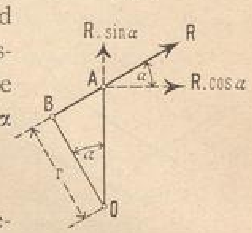



1) Satz des ſtatiſchen Momentes. Es ſei eine Kraft $R$ und eine Axe $OO$ gegeben (Fig. 2); man denke eine ſenkrecht zur Axe ſtehende Ebene hindurchgelegt, welche die Kraftrichtung im Punkte $A$ ſchneidet; in dieſem Punkte zerlege man die Kraft $R$ in drei ſenkrecht zu einander ſtehende Seitenkräfte $R_x$, $R_y$, $R_z$. Die eine Seitenkraft ($R_z$) ſei parallel zur Axe $OO$; die zweite ($R_y$) falle in die Verbindungslinie des Punktes $A$ mit dem Punkte $B'$, in welchem die Axe $OO$ von der obigen Ebene geſchnitten wird; die dritte Seitenkraft ($R_x$) ſteht ſenkrecht zur zweiten und liegt, wie dieſe, in der ſenkrecht zur Axe $OO$ hindurchgelegten Ebene. Alsdann nennt man das Product $R_x \cdot \overline{AB'}$ das ſtatiſche Moment der Kraft $R$ für die Axe $OO$.

Wenn alle Kräfte in derſelben Ebene wirken und die Axe $OO$ ſenkrecht zu dieſer Kraftebene ſteht, ſo ſind für jede Kraft nur zwei Seitenkräfte ($R_x$ und $R_y$) in Betracht zu ziehen; $R_z$ iſt dann gleich Null. Der Schnittpunkt der Axe mit der

Kraftebene ſei $O$ (Fig. 3); alsdann zerlege man $R$ in einem beliebigen auf der Richtungslinie der Kraft gelegenen Punkte $A$ in zwei Seitenkräfte: die eine falle in die Richtung der Verbindungslinie des Angriffspunktes $A$ der Kraft mit dem Axenpunkt $O$; die andere ſtehe ſenkrecht zur erſteren. Die beiden Seitenkräfte haben die Gröſse $R \sin \alpha$ und $R \cos \alpha$. Das ſtatiſche Moment von $R$ für die Axe $OO$ iſt alsdann: $M = R \cos \alpha \,.\, \overline{AO}$. Fällt man von $O$ die Senkrechte $\overline{OB} = r$ auf die Richtung der Kraft $R$, ſo iſt $\overline{OB} = \overline{AO} \cos \alpha = r$, alſo

Fig. 3.




$$M = R \,.\, r.$$

$r$ wird der **Hebelsarm** der Kraft $R$ für die Axe $OO$ genannt. Bei Kräften in einer Ebene ſpricht man gewöhnlich kurz vom ſtatiſchen Moment für den **Punkt** $O$; darunter iſt das ſtatiſche Moment für die im Punkte $O$ ſenkrecht zur Ebene errichtete Axe verſtanden. Der Hebelsarm iſt die vom Punkte $O$ auf die Richtung der Kraft $R$ gefällte Senkrechte.

Die ſtatiſchen Momente ſind Producte von Kräften und Längen. Die Maſseinheiten, in denen ſie ausgedrückt werden, ſind demnach gleichfalls Producte aus Längen- und Krafteinheiten. Iſt die Kraft in Kilogrammen und die Länge in Centimetern angegeben, ſo ergiebt ſich das ſtatiſche Moment in Kilogramm-Centimetern; iſt die Kraft in Tonnen und die Länge in Metern angegeben, ſo ergiebt ſich das ſtatiſche Moment in Tonnen-Metern[1]) etc.

Die Kraft $R$ hat das Beſtreben, die Ebene um den als feſt gedachten Punkt $O$, bezw. um eine im Punkte $O$ ſenkrecht zur Kraftebene errichtete Axe zu drehen, hier alſo nach rechts. Wenn die ſtatiſchen Momente mehrerer in derſelben Ebene liegender Kräfte aufzuſtellen ſind, ſo iſt zu beachten, daſs die verſchiedenen Kräfte allgemein verſchiedene Drehrichtungen haben. Welche von dieſen als poſitiv eingeführt wird, iſt gleichgiltig; iſt aber die eine Drehrichtung als poſitiv angenommen, ſo iſt die entgegengeſetzte als negativ einzuführen.

Der in Folgendem häufig anzuwendende Satz des ſtatiſchen Momentes lautet: Das ſtatiſche Moment der Mittelkraft in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene, in welcher die Kräfte liegen, iſt gleich der algebraiſchen Summe der ſtatiſchen Momente der Einzelkräfte in Bezug auf denſelben Punkt.

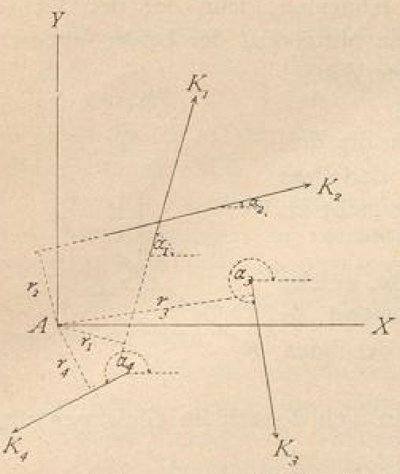
Dieſer Satz giebt oft ein bequemes Mittel zur Ermittelung der Unbekannten. Wählt man den Punkt, in Bezug auf welchen man das ſtatiſche Moment aufſtellt, auf der Richtungslinie der Mittelkraft, ſo hat die letztere in Bezug auf dieſen Punkt den Hebelsarm Null, alſo auch das ſtatiſche Moment Null. Für dieſen beſonderen Fall heiſst der obige Satz: Die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente einer Reihe von Kräften in Bezug auf einen auf der Richtungslinie der Mittelkraft liegenden Punkt iſt gleich Null.

6. Gleichgewicht der Kräfte.

2) **Satz vom Gleichgewicht der Kräfte.** Derſelbe lautet: Die an einem Körper angreifenden, in einer Ebene liegenden Kräfte ſind im Gleichgewicht, wenn die algebraiſche Summe der in zwei ſenkrecht zu einander ſtehende, ſonſt beliebige Richtungen fallenden Seitenkräfte je gleich Null iſt und auſserdem die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente ſämmtlicher Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null iſt.

[1]) Ein Tonnen-Meter iſt gleich 100 Tonnen-Centimetern und gleich 100 000 Kilogramm-Centimetern. Danach kann ein Moment, welches in der einen Einheit, etwa in Tonnen-Metern, berechnet iſt, leicht in eine andere Einheit, etwa Kilogramm-Centimeter, umgerechnet werden.

Fig. 4.




Man zerlege demnach fämmtliche Kräfte ($K_1$, $K_2$, $K_3$ . . . in Fig. 4) nach zwei zu einander fenkrechten Richtungen, von denen die eine ganz willkürlich angenommen werden kann. Alsdann erhält man als Gleichgewichtsbedingungen für die fämmtlichen Kräfte die Gleichungen:

$\Sigma (K \cos \alpha) = 0$, $\Sigma (K \sin \alpha) = 0$ und $\Sigma (K r) = 0$.

Hier ift $A$ als Momentenpunkt angenommen; indefs hätte auch jeder beliebige andere Punkt der Kraftebene gewählt werden können.

In fehr vielen Fällen ift die Mehrzahl aller äufseren Kräfte lothrecht gerichtet; alsdann empfiehlt es fich, die Kräfte $K_1$, $K_2$, $K_3$ . . . nach der wagrechten und lothrechten Richtung zu zerlegen. In diefem Falle heifsen die Bedingungsgleichungen, wenn wiederum alle Kräfte in einer Ebene liegen: Die an einem Körper angreifenden Kräfte find im Gleichgewicht, wenn

α) die algebraifche Summe der wagrechten Seitenkräfte gleich Null ift,

β) die algebraifche Summe der lothrechten Seitenkräfte gleich Null ift,

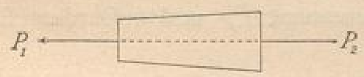
γ) die algebraifche Summe der ftatifchen Momente, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene, gleich Null ift.

Für Kräfte, welche nicht in derfelben Ebene wirken, lautet der Satz vom Gleichgewicht der Kräfte: Die an einem Körper angreifenden Kräfte find im Gleichgewichte, wenn für drei rechtwinkelig zu einander ftehende Axen die algebraifchen Summen der in die Axenrichtungen fallenden Seitenkräfte je gleich Null find und aufserdem die algebraifchen Summen der ftatifchen Momente aller Kräfte, bezogen auf diefe Axen, je gleich Null find.

7. Zwei Kräfte auf einen Körper wirkfam; Kräftepaar.

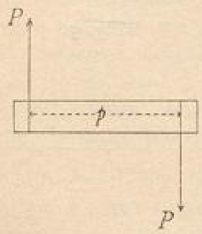
3) Zwei auf einen Körper wirkende Kräfte halten denfelben nur dann im Gleichgewicht, wenn beide der Gröfse nach genau gleich, dem Sinne nach genau einander entgegengefetzt find und mit ihren Richtungslinien zufammenfallen (Fig. 5); denn nur dann find alle drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt.

Fig. 5.




Haben zwei Kräfte $P$ (Fig. 6) parallele Richtung, gleiche Gröfse und entgegengefetzten Sinn, fallen fie aber mit ihren Richtungslinien nicht zufammen, fo ift allerdings jede der beiden erften Gleichgewichtsbedingungen α und β erfüllt, nicht aber die dritte. Man nennt zwei folche Kräfte ein Kräftepaar und verfteht unter dem Momente des Kräftepaares das Product aus der Gröfse der Kraft $P$ in den fenkrechten Abftand der beiden Richtungslinien der Kräfte; d. h. es ift das Moment $M = Pp$.

Fig. 6.




Die Summe der ftatifchen Momente beider zu dem Kräftepaar vereinten Kräfte hat für jeden beliebigen Punkt der Ebene die gleiche Gröfse $M = Pp$. In den Berechnungen kommt vielfach das (unter Umftänden vorläufig noch unbekannte) Moment $M$ eines Kräftepaares vor; wird alsdann für einen beliebigen Punkt der Ebene die algebraifche Summe der ftatifchen Momente aufgeftellt, fo ift, wo auch der Punkt liege, der Beitrag des Kräftepaares mit dem Werthe $M$ einzuführen.

8. Drei Kräfte auf einen Körper wirkſam.

4) Drei auf einen Körper wirkende Kräfte ſind nur dann im Gleichgewicht, wenn ſich ihre Richtungslinien in einem Punkte ſchneiden, jede der drei Kräfte abſolut genommen genau eben ſo groſs iſt, wie die Mittelkraft der beiden anderen Kräfte, und mit der betreffenden Mittelkraft einen Winkel von 180 Grad einſchlieſst.

Dieſe Bedingungen ſind nur erfüllbar, wenn die drei Kräfte in derſelben Ebene liegen; drei nicht in derſelben Ebene liegende Kräfte können daher mit einander nicht im Gleichgewicht ſein.

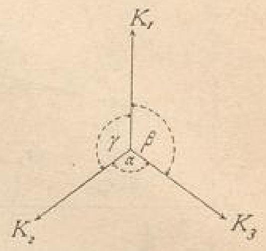


Fig. 7.

5) Wenn drei in derſelben Ebene liegende Kräfte, welche ſich in einem Punkte ſchneiden, im Gleichgewichte ſind, ſo verhalten ſich die Kräfte zu einander, wie die Sinus der ihnen gegenüber liegenden Winkel.

Die drei Kräfte $K_1$, $K_2$, $K_3$ (Fig. 7) befinden ſich ſonach im Gleichgewicht, wenn

$$K_1 : K_2 : K_3 = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

6) Eine in irgend einem Punkte $A$ (Fig. 8) angreifende Kraft $P$ kann ſtets erſetzt werden durch eine nach einem beliebigen anderen Punkte $B$ parallel verſchobene Kraft $P$ von gleicher Gröſse, gleicher Richtung und gleichem Sinne mit der gegebenen, und ein Kräftepaar, deſſen Moment dem Momente der gegebenen Kraft in Bezug auf den Punkt $B$ nach Gröſse und Drehrichtung gleich iſt.

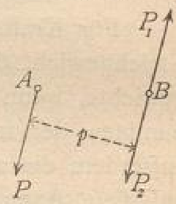


Fig. 8.

Denn es wird nichts geändert, wenn im Punkte $B$ zwei Kräfte, $P_1$ und $P_2$, angebracht werden, welche der gegebenen Kraft in Gröſse und Richtung gleich, dem Sinne nach einander entgegen geſetzt ſind. Zwei dieſer drei Kräfte, $P$ und $P_1$, ergeben ein Kräftepaar, welches für jeden Punkt der Ebene, alſo auch für $B$, das Moment $M = Pp$ und gleiche Drehrichtung hat, wie die urſprünglich gegebene Kraft; die dritte Kraft $P_2$ iſt eben die parallel verſchobene Kraft $P$. Jede Kraft $P$ wirkt alſo auf einen nicht auf ihrer Richtung liegenden Punkt, deſſen ſenkrechter Abſtand von der Kraft gleich $p$ iſt, mit einem Drehmoment $Pp$ und auſserdem ſo, als ob ſie in ihm ſelbſt angriffe.

9. Geſetz der Wechſelwirkung.

7) Geſetz der Wechſelwirkung. Daſſelbe lautet: Wenn ein Körper auf einen anderen eine Kraft ausübt, ſo erleidet er durch dieſen Körper eine Kraft, welche der von ihm ausgeübten der Gröſse nach genau gleich, der Richtung nach genau entgegengeſetzt iſt.

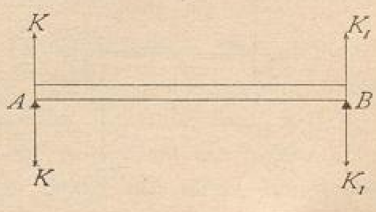


Fig. 9.

Dieſes Geſetz wird in der Folge ſehr häufig angewendet werden. Es kommt unter Anderem bei den Auflagern der Träger in Betracht. Ein Träger $AB$ (Fig. 9) übt durch ſein Eigengewicht und die wirkenden Belaſtungen auf die Auflagerpunkte $A$ und $B$ die Drücke $K$ und $K_1$ aus; dieſelben ſind nach unten gerichtet. Genau eben ſo groſs ſind die Gegendrücke, welche die Auflager auf die Träger ausüben. Dieſe ſind nach oben gerichtet, da ſie den erſteren Drücken $K$ und $K_1$ genau entgegengeſetzt gerichtet ſein müſſen.

Betrachtet man nur den Träger, ſo hat man die nach oben wirkenden Kräfte $K$ und $K_1$ — als Stützendrücke — einzuführen; betrachtet man die Auflager, ſo ſind die nach unten gerichteten Drücke $K$ und $K_1$ der Unterſuchung zu Grunde zu legen.

## b) Grundlagen für die graphifche Behandlung bauftatifcher Aufgaben.

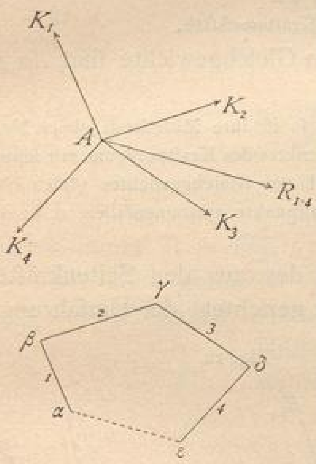
Die Aufgaben der Statik der Bau-Conftructionen können fowohl durch Rechnung (auf analytifchem Wege), als auch durch Zeichnung (auf graphifchem Wege) gelöst werden. Die graphifche Behandlung hat manche Vortheile. Diefelbe führt in vielen Fällen rafcher und leichter zum Ziele und gewährt faft immer eine klarere Ueberficht über die Wirkung der Kräfte, als die Rechnung. 10. Graphifche Methode.

In den folgenden Unterfuchungen werden beide Wege eingefchlagen werden. Um Wiederholungen zu vermeiden, follen die Grundlagen für die graphifche Behandlung hier kurz vorgeführt werden. Da bei den meiften Aufgaben die Kräfte als in einer Ebene wirkend angenommen werden können, werden wir uns auf diefen Fall befchränken.

1) Kräfte an einem Angriffspunkte. Die an einem Punkte angreifenden Kräfte können durch ihre Mittelkraft erfetzt werden. Um diefe Mittelkraft nach Gröfse und Richtung zu erhalten, zeichnet man das fog. Kraftpolygon. 11. Kraftpolygon.

Das Kraftpolygon für eine Anzahl von Kräften ift derjenige Linienzug, welchen man erhält, wenn man fämmtliche Kräfte nach irgend einem Mafsftabe fo an einander reiht, dafs die Gröfse, die Richtung und der Sinn einer jeden Kraft in diefem Linienzuge mit der Gröfse, der Richtung und dem Sinne der gegebenen Kraft übereinftimmt und dafs der Anfangspunkt jeder Kraft mit dem Endpunkte der vorhergehenden Kraft zufammenfällt.

Fig. 10.



Der Mafsftab für das Auftragen der Kräfte kann beliebig angenommen werden; doch find fämmtliche Kräfte nach demfelben Mafsftabe aufzutragen.

Um das Kraftpolygon für die Kräfte $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$ zu erhalten, welche im Punkte $A$ (Fig. 10) angreifen, trage man zunächft von einem beliebig anzunehmenden Punkte $\alpha$ aus nach irgend einem Mafsftabe fo viele Krafteinheiten ab, wie $K_1$ enthält, und zwar nach einer Richtung $\alpha\beta$, welche mit derjenigen von $K_1$ übereinftimmt. Ift etwa $K_1 = 20^t$ und der Mafsftab fo gewählt, dafs $1^{cm} = 20^t$ bedeutet, fo würde man von $\alpha$ aus $1^{cm}$ abzutragen haben. Man ziehe alfo durch $\alpha$ eine Linie parallel zur Richtung von $K_1$ und trage auf diefer Linie $\alpha\beta = K_1$ ab. Daran trage man $K_2$ ab; zu diefem Zwecke ziehe man durch $\beta$ eine Linie parallel zur Richtung von $K_2$ und trage auf diefer Linie $\beta\gamma = K_2$ ab. In derfelben Weife verfahre man weiter und erhält fo $\gamma\delta = K_3$, $\delta\varepsilon = K_4$. Alsdann ift $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ das Kraftpolygon für die Kräfte $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$.

Es ift oben angegeben, dafs der Sinn der Kraft im Kraftpolygon mit dem der gegebenen Kraft übereinftimmen mufs. In der gegebenen Kraft ift der Sinn durch einen Pfeil ausgedrückt, fo dafs Unklarheit über denfelben nicht beftehen kann; im Kraftpolygon ergiebt fich der Sinn ebenfalls unzweideutig, wenn man die Kräfte ftets fo aufträgt, dafs die Richtung vom früheren Buchftaben des Alphabetes bis zum höheren Buchftaben deffelben mit der Pfeilrichtung der gegebenen Kraft übereinftimmt. Die Kraft $\alpha\beta$ wirkt alfo im Sinne von $\alpha$ nach $\beta$, nicht im Sinne von $\beta$ nach $\alpha$.

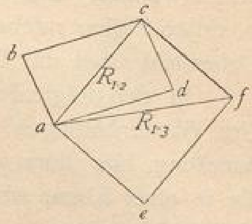
Gröfse, Richtung und Sinn der Mittelkraft aller an einem Punkte $A$ (Fig. 10) angreifenden Kräfte werden erhalten, indem man den Anfangspunkt des für diefe Kräfte conftruirten Kraftpolygons mit feinem Endpunkte verbindet. 12. Satz I.

In Fig. 10 giebt alfo $\alpha\varepsilon$ die Gröfse, die Richtung und den Sinn der Mittelkraft der vier Kräfte $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$ an.

Die Mittelkraft der beiden Kräfte $K_1$ und $K_2$ wird nach dem bekannten Satz vom Parallelogramm der Kräfte durch die Diagonale des aus diefen beiden Kräften conftruirten Parallelogramms dargeftellt, d. h. in Fig. 11 ftellt $ac$ die Mittelkraft von $K_1$ und $K_2$ nach Gröfse und Richtung dar, wenn

$ab = K_1$, $ad = K_2$ iſt. Die Diagonale $ac$ theilt das Parallelogramm $abcd$ in zwei congruente Dreiecke; es wird alſo genügen, das Dreieck $abc$ zu conſtruiren, in welchem $ab = K_1$ und $bc = K_2$ iſt. Alsdann iſt die dritte Seite $ac$ des Dreieckes gleich der Mittelkraft $R_{1-2}$ von $K_1$ und $K_2$. Der Linienzug $abc$ iſt aber nach der oben gegebenen Erklärung das Kraftpolygon für die beiden Kräfte $K_1$ und $K_2$, und $ac$ verbindet den Anfangspunkt $a$ deſſelben mit dem Endpunkte $c$. Für zwei Kräfte iſt damit obiger Satz bewieſen.

Fig. 11.




Kommt eine dritte Kraft $K_3$ hinzu, ſo iſt die Mittelkraft $R_{1-2}$ von $K_1$ und $K_2$ mit $K_3$ zu vereinen, um die Reſultirende $R_{1-3}$ von $K_1$, $K_2$ und $K_3$ zu erhalten. Iſt $K_3 = ae$, ſo conſtruire man das Parallelogramm $acfe$, und ziehe die Diagonale $af$ deſſelben; die letztere iſt die geſuchte Mittelkraft. Auch hier genügt es, um $af$ zu erhalten, nur das Dreieck $acf$ zu zeichnen. Man erhält alſo die Mittelkraft $R_{1-3}$, indem man an den Endpunkt von $R_{1-2} = ac$ die Kraft $K_3$ nach Gröſse und Richtung gleich $cf$ anträgt und $a$ mit $f$ verbindet. Der Linienzug $abcf$ iſt aber nach obiger Erklärung das Kraftpolygon für die drei Kräfte $K_1$, $K_2$ und $K_3$ und $af$ die Verbindungslinie des Anfangspunktes des Kraftpolygons mit deſſen Endpunkte. Damit iſt der Beweis unſeres Satzes auch für drei Kräfte geliefert. In derſelben Weiſe kann er ohne Schwierigkeit für eine beliebige Anzahl von Kräften geführt werden.

Das Kraftpolygon iſt nur eine Hilfsfigur, welche wohl Gröſse, Richtung und Sinn der Mittelkraft, nicht aber ihre Lage in der Ebene angiebt. Die Lage derſelben iſt aber nicht zweifelhaft, ſobald man auſser der Richtung der Kraft einen Punkt kennt, durch welchen die Kraft hindurchgeht. Die Richtung wird hier durch das Kraftpolygon gegeben. Der Durchgangspunkt für die Kraft iſt ebenfalls bekannt; denn die Mittelkraft aller Kräfte muſs durch den gemeinſchaftlichen Angriffspunkt derſelben, d. h. durch $A$ (Fig. 10), gehen. Zieht man alſo durch $A$ eine Linie parallel zu $\alpha\varepsilon$, ſo ergiebt dieſe die Mittelkraft nach Lage und Richtung; die Gröſse derſelben iſt $\alpha\varepsilon$.

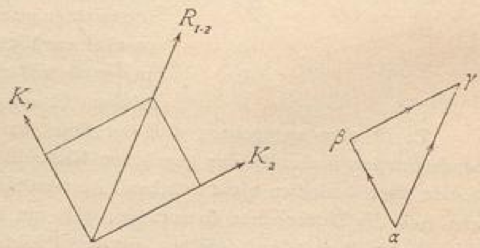
Zu jedem Kraftpolygon gehört als nothwendige Ergänzung ein Kräftemaſsſtab.

13. Satz II. Wenn die an einem Punkte angreifenden Kräfte im Gleichgewichte ſind, ſo iſt das Kraftpolygon eine geſchloſſene Figur.

Sind die auf einen Punkt wirkenden Kräfte im Gleichgewichte, ſo iſt ihre Mittelkraft gleich Null; dieſelbe wird aber nach Satz I durch die Verbindungslinie des Anfangspunktes des Kraftpolygons mit ſeinem Endpunkte dargeſtellt. Dieſe Verbindungslinie muſs alſo für den Fall des Gleichgewichtes gleich Null ſein; demnach muſs der Anfangspunkt des Kraftpolygons mit ſeinem Endpunkte zuſammenfallen, d. h. das Kraftpolygon muſs eine geſchloſſene Figur ſein.

14. Satz III. Der Sinn der Mittelkraft iſt vom Anfangspunkte des aus den Seitenkräften conſtruirten Kraftpolygons nach dem Endpunkte deſſelben gerichtet; der Umfahrungsſinn des ganzen Polygons mit Einſchluſs der Mittelkraft erleidet alſo am Endpunkte der Einzelkräfte eine Unterbrechung.

Fig. 12.



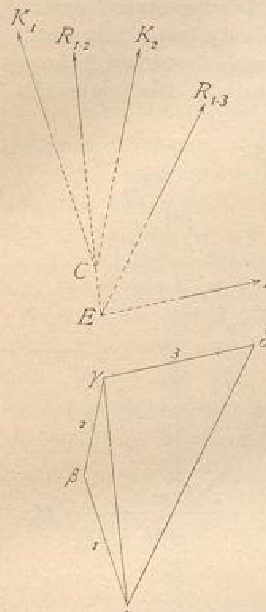

Um dieſen Satz zu beweiſen, genügt es, die Mittelkraft zweier Kräfte aufzuſuchen. Iſt in Fig. 12 $\alpha\beta = K_1$ und $\beta\gamma = K_2$, ſo haben beide den durch die Pfeile angedeuteten Umfahrungsſinn, welcher, wenn noch eine beliebige Anzahl von Kräften hinzukommt, immer derſelbe bleibt, d. h. er iſt ſtets vom Anfangspunkte des Kraftpolygons nach dem Endpunkte desſelben gerichtet. Der Sinn der Reſultirenden $R_{1-2} = \alpha\gamma$ iſt aber, wie ſich aus der Parallelogramm-Conſtruction in Fig. 12 ergiebt, von $\alpha$ nach $\gamma$ gerichtet; er iſt alſo dem Umfahrungsſinne der Einzelkräfte direct entgegengeſetzt. Damit iſt der Satz für zwei Kräfte bewieſen. Jede dritte Kraft $K_3$ läſſt ſich aber mit $R_{1-2}$ in derſelben Weiſe, wie bei $K_1$ und $K_2$ gezeigt iſt, zuſammenſetzen; es handelt ſich dabei auch ſtets nur um zwei Kräfte, und deſshalb gilt das Geſagte auch für $R_{1-2}$ und $K_3$, d. h. für $K_1$, $K_2$, $K_3$. Die Mittelkraft der durch das Kraftpolygon $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ dargeſtellten Kräfte (Fig. 10) iſt $\alpha\varepsilon$, der Sinn iſt von $\alpha$ nach $\varepsilon$ gerichtet; der Umfahrungsſinn erleidet ſonach bei $\varepsilon$ eine Unterbrechung.

15. Satz IV. Sind die an einem Punkte angreifenden Kräfte im Gleichgewichte, ſo iſt für das ganze Kraftpolygon der Umfahrungsſinn derſelbe.

Denn alsdann iſt die Mittelkraft gleich Null, und dieſe iſt nach Satz III die einzige Kraft, welche einen anderen Umfahrungsſinn hat, als die übrigen Kräfte. Dieſe einzige Kraft fällt hier fort; mithin haben in dieſem Falle alle Kräfte denſelben Umfahrungsſinn.

2) Kräfte an verſchiedenen Angriffspunkten. Wenn die auf einen Körper wirkenden Kräfte an verſchiedenen Punkten deſſelben angreifen, ſo iſt zunächſt die Ermittelung der Gröſse und Richtung der Mittelkraft genau, wie unter 1 angegeben, vorzunehmen. 16. Kräfte an verſchiedenen Angriffspunkten.

Fig. 13.



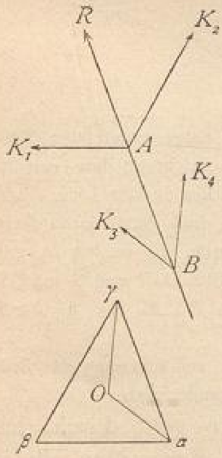

Denn man kann (Fig. 13) zunächſt die beiden Kräfte $K_1$ und $K_2$ auf ihren Richtungslinien beliebig verſchieben, alſo auch bis zu dem Schnittpunkte $C$ derſelben. Für die beiden im Punkte $C$ angreifenden Kräfte liegt nun die Aufgabe genau ſo, wie oben entwickelt iſt. Iſt $K_1 = \alpha\beta$ und $K_2 = \beta\gamma$, ſo iſt $\alpha\gamma$ die Mittelkraft $R_{1-2}$ von $K_1$ und $K_2$.

Dieſe Mittelkraft $R_{1-2}$ greift in $C$, dem Schnittpunkte der beiden Kräfte $K_1$ und $K_2$, an und hat die durch $\alpha\gamma$ beſtimmte Richtung, d. h. ſie iſt parallel zu $\alpha\gamma$. Um jetzt die Mittelkraft von $R_{1-2}$ und $K_3$, d. h. diejenige von $K_1$, $K_2$, $K_3$ zu finden, verfährt man genau ſo, wie bei der Zuſammenſetzung von $K_1$ und $K_2$. Man verſchiebt $R_{1-2}$ und $K_3$ bis zum Schnittpunkte $E$ ihrer Richtungslinien; in dieſem muſs die geſuchte Mittelkraft $R_{1-3}$ angreifen. Die Zuſammenſetzung von $R_{1-2}$ ($= \alpha\gamma$ im Kraftpolygon) und $K_3$ ($= \gamma\delta$ im Kraftpolygon) kann nun wiederum genau in der oben gezeigten Weiſe erfolgen, indem man $\gamma\delta = K_3$ an $\gamma$ anträgt und $\alpha\delta$ zieht. $\alpha\delta$ giebt die Gröſse und Richtung der Mittelkraft $R_{1-3}$ von $K_1$, $K_2$, $K_3$ an; dieſelbe geht durch den Punkt $E$. In der gleichen Weiſe kann man auch bei mehreren Kräften weiter verfahren.

Wenn Gröſse und Richtung der Mittelkraft gefunden ſind, iſt auch die Lage derſelben bekannt, ſobald ein Punkt bekannt iſt, durch welchen ſie gehen muſs; denn durch dieſen Punkt läſst ſich nur eine Parallele zu der im Kraftpolygon gefundenen Richtung der Mittelkraft legen. Ein ſolcher Punkt iſt in Fig. 13 bei $R_{1-2}$ der Punkt $C$, bei $R_{1-3}$ der Punkt $E$ etc.

Bei einer gröſseren Anzahl von Kräften würde die gezeigte Ermittelung der Lage der Mittelkraft ſehr umſtändlich ſein; deſshalb hat man zur Erleichterung eine Hilfsconſtruction eingeführt, das ſog. Seilpolygon. Daſſelbe ergiebt ſich durch die folgende Betrachtung. 17. Seilpolygon.

Fig. 14.




Wie man die Gröſse und Richtung der Mittelkraft zweier Kräfte $K_1$ und $K_2$ in der dritten Seite $\alpha\gamma$ (Fig. 14) des für die beiden Kräfte conſtruirten Kraftpolygons $\alpha\beta\gamma$, hier der Schluſsſeite des Kraftdreieckes, findet, ſo kann man auch irgend eine gegebene Kraft $R$ als Mittelkraft zweier Kräfte $K_1$ und $K_2$ auffaſſen. Dieſe beiden Kräfte müſſen nur zwei Bedingungen genügen, und zwar:

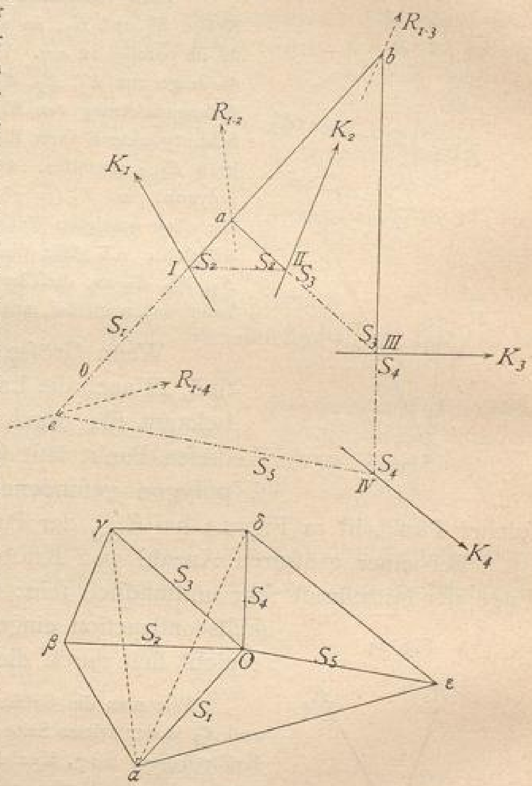
$\alpha$) Das aus ihnen conſtruirte Kraftpolygon muſs als dritte Seite die gegebene Kraft nach Gröſse und Richtung enthalten, und

$\beta$) die beiden Kräfte müſſen ſich auf einem Punkte der gegebenen Kraftrichtung ſchneiden.

Man kann alſo $R$ als Mittelkraft der beiden Kräfte $K_1$ und $K_2$ auffaſſen, die im Kraftpolygon durch bezw. $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ dargeſtellt ſind und deren Richtungslinien ſich auf dem Punkte $A$ der Kraftrichtung $R$ ſchneiden. In gleicher Weiſe kann $R$ auch als Mittelkraft der beiden Kräfte $K_3$ und $K_4$ angeſehen werden, denen das Kraftdreieck $\alpha O \gamma$ entſpricht, die alſo im Kraftpolygon durch bezw. $\alpha O$ und $O\gamma$ dargeſtellt werden und deren Richtungslinien ſich im Punkte $B$ der gegebenen Kraftrichtung ſchneiden. Man kann demnach die gegebene Kraft $R$ ſowohl durch die Kräfte $K_1$ und $K_2$, wie durch $K_3$ und $K_4$ erſetzen. Daraus folgt, daſs man für die Zerlegung einer gegebenen Kraft den Punkt $O$ ganz beliebig, den Punkt $B$ auf der Richtungslinie der gegebenen Kraft beliebig wählen kann.

Ift eine gröfsere Anzahl von Kräften $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$ .... gegeben (Fig. 15), fo kann man zunächft $K_1$ in der angegebenen Weife zerlegen. $K_1$ werde im Kraftpolygon durch $\alpha\beta$ dargeftellt und möge in $\alpha O = S_1$ und $O\beta = S_2$ zerlegt werden. Nach Früherem ift, da $K_1$ den Sinn von $\alpha$ nach $\beta$ hat, $S_1$ von $\alpha$ nach $O$, $S_2$ von $O$ nach $\beta$ gerichtet. Als Schnittpunkt diefer beiden Seitenkräfte von $K$ kann der Punkt $I$ auf der Richtungslinie von $K_1$ beliebig angenommen werden. Ferner kann $K_2$, welches im Kraftpolygon durch $\beta\gamma$ dargeftellt wird, ebenfalls in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, welche mit $\beta\gamma$ zufammen ein Dreieck bilden müffen. Die Spitze des Dreieckes kann wiederum beliebig gewählt werden; man kann alfo den Punkt $O$ als diefe Spitze annehmen. Sodann erhält man als die beiden Seitenkräfte von $K_2$ $(= \beta\gamma)$ die Kraftlinien $\beta O$ und $O\gamma$. Die erfte diefer Seitenkräfte ift nach Gröfse und Richtung der zweiten Seitenkraft von $K_1$ genau gleich, da diefe $O\beta$ war. $S_2 = \beta O$ hat den Sinn von $\beta$ nach $O$, $S_3 = O\gamma$ den Sinn von $O$ nach $\gamma$. Wählt man jetzt als Zerlegungspunkt der Kraft $K_2$ den Punkt $II$, in welchem die Richtungslinie der Kraft $K_2$ von der zweiten Seitenkraft $S_2$ der Kraft $K_1$ gefchnitten wird, fo greifen in diefem Punkte die beiden Kräfte $S_2$ und $S_3$ an. In der Richtungslinie $I\,II$ wirken alfo die beiden Kräfte $S_2$, deren eine in $I$, deren andere in $II$ angreift. Beide find, wie eben entwickelt ift, der Gröfse nach einander gleich; fie haben diefelbe Richtung, aber entgegengefetzten Sinn, heben fich alfo gegenfeitig auf. Die beiden gegebenen Kräfte $K_1$ und $K_2$ find alfo durch vier neue Kräfte erfetzt, nämlich durch $S_1$, $S_2$, $S_2$, $S_3$; zwei von diefen Kräften heben einander auf, nämlich die beiden $S_2$; es bleiben alfo zwei Kräfte $S_1$ und $S_3$, welche die gegebenen Kräfte $K_1$ und $K_2$ vollftändig erfetzen. Die Mittelkraft von $K_1$ und $K_2$ ift demnach derjenigen von $S_1$ und $S_3$ gleich in der Gröfse, in der Richtung, im Sinn und in der Lage. Die Mittelkraft von $S_1$ und $S_3$ geht aber durch den Schnittpunkt $a$ der Richtungslinien derfelben; durch diefen Punkt $a$ mufs alfo auch die Mittelkraft von $K_1$ und $K_2$ gehen.

Fig. 15.




Verfährt man nun mit der dritten Kraft $K_3$ eben fo, wie mit $K_2$, d. h. zerlegt man $K_3$ in zwei Seitenkräfte fo, dafs der Punkt $O$ als Spitze des Kraftdreieckes für die Zerlegung von $K_3 = \gamma\delta$ gewählt wird, fo werden die beiden Seitenkräfte $S_3 = \gamma O$ und $S_4 = O\delta$ fein. Die erfte diefer beiden Seitenkräfte ift wiederum gleich der zweiten Seitenkraft von $K_2$, hat aber entgegengefetzten Sinn. Wählt man ferner als Zerlegungspunkt von $K_3$ den Punkt $III$, in welchem die Richtungslinie von $K_3$ durch die Richtungslinie der Seitenkraft $S_3$ der Kraft $K_2$ gefchnitten wird, fo wirken in der Linie $II\,III$ zwei Kräfte $S_3$, welche einander wiederum aufheben. Die Kräfte $K_1$, $K_2$, $K_3$ find jetzt durch fechs Kräfte erfetzt, nämlich durch $S_1$, $S_2$, $S_2$, $S_3$, $S_3$, $S_4$, von denen fich die vier mittleren, die beiden $S_2$ und die beiden $S_3$, gegenfeitig aufheben, fo dafs nur $S_1$ und $S_4$ übrig bleiben. Die Mittelkraft von $S_1$ und $S_4$ ift alfo auch diejenige von $K_1$, $K_2$ und $K_3$. Daraus folgt, dafs die Mittelkraft von $K_1$, $K_2$ und $K_3$ durch den Schnittpunkt der Kraftrichtungen $S_1$ und $S_4$, alfo durch den Punkt $b$ geht.

Verfährt man fo weiter, fo erhält man einen Linienzug $O\,I\,II\,III\,IV$ ..., welchen man das Seilpolygon nennt. Aus der vorftehenden Erklärung der Entftehung ergiebt fich folgender Satz:

18. Satz V. Die Mittelkraft einer Anzahl auf einander folgender Kräfte geht durch den Schnittpunkt der Richtung derjenigen Seilpolygonfeite, welche der erften diefer Kräfte vorhergeht, mit der Richtung derjenigen Seilpolygonfeite, welche auf die letzte diefer Kräfte folgt.

Denn die in den mittleren Seilpolygonſeiten wirkenden Kräfte heben ſich ſämmtlich gegenſeitig auf, und es bleiben nur die in den äuſseren Seilpolygonſeiten wirkenden Kräfte übrig, deren Mittelkraft mit derjenigen der gegebenen Kräfte in jeder Beziehung übereinſtimmt[2]).

Den Punkt $O$ (Fig. 15) nennt man den **Pol** des Seilpolygons.

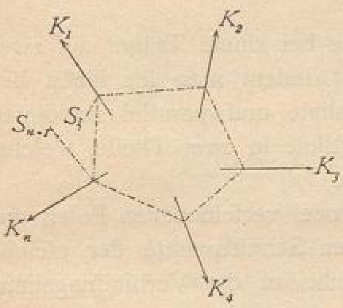
Durch das Kraft- und Seilpolygon iſt die Mittelkraft ganz beliebig in einer Ebene wirkender Kräfte beſtimmt. Die Gröſse, die Richtung und den Sinn derſelben giebt das Kraftpolygon, die Lage in der Ebene giebt das Seilpolygon an, da daſſelbe einen Punkt der Richtungslinie der Mittelkraft ergiebt. Zieht man durch dieſen die Parallele zu der mit Hilfe des Kraftpolygons gefundenen Richtung der Mittelkraft, ſo erhält man die wirkliche Lage derſelben, über welche ein Zweifel nicht mehr herrſchen kann, da durch einen Punkt nur eine Parallele zu einer gegebenen Richtung möglich iſt.

Aus dem Vorſtehenden folgt, daſs Kraft- und Seilpolygon nicht nur die Mittelkraft der ſämmtlichen wirkenden Kräfte, ſondern auch diejenige einer beliebigen Gruppe dieſer Kräfte ergeben. So iſt die Mittelkraft von $K_1$ und $K_2$ (Fig. 15) nach Gröſse und Richtung gleich $\alpha\gamma$ und geht durch $a$. Zieht man alſo durch $a$ eine Linie parallel zu $\alpha\gamma$, ſo erhält man dieſe Mittelkraft $R_{1-2}$. So iſt ferner die Mittelkraft von $K_1$, $K_2$ und $K_3$ nach Gröſse und Richtung gleich $\alpha\delta$ und geht durch $b$; eine durch $b$ parallel zu $\alpha\delta$ gezogene Linie ergiebt $R_{1-3}$. Die Mittelkraft von $K_1$, $K_2$, $K_3$ und $K_4$ iſt nach Gröſse und Richtung gleich $\alpha\varepsilon$ und geht durch $c$ etc.

Wenn die an verſchiedenen Punkten eines Körpers angreifenden Kräfte im Gleichgewicht ſind, ſo iſt ſowohl das Kraftpolygon, wie auch das Seilpolygon eine geſchloſſene Figur. 19. Satz VI.

Daſs das Kraftpolygon in dem angegebenen Falle eine geſchloſſene Figur ſein muſs, geht aus dem Früheren hervor; denn es iſt nachgewieſen, daſs das Kraftpolygon für an verſchiedenen Punkten angreifende Kräfte genau eben ſo conſtruirt wird und genau dieſelbe Bedeutung hat, wie für an einem Punkte angreifende Kräfte. Nach Satz II muſs alſo das Kraftpolygon eine geſchloſſene Figur ſein, auch wenn die im Gleichgewicht befindlichen Kräfte an verſchiedenen Punkten angreifen.

Fig. 16.




Daſs ſich auch das Seilpolygon ſchlieſsen muſs, ergiebt ſich folgendermaſsen.

Conſtruirt man das Seilpolygon für eine beliebige Anzahl von Kräften, ſo heben ſich, wie oben auseinandergeſetzt, die ſämmtlichen in den mittleren Seilpolygonſeiten wirkenden Kräfte auf, und es bleiben als einzig wirkende Kräfte diejenigen übrig, welche in den beiden äuſserſten Seilpolygonſeiten wirken, d. h. diejenige, welche der erſten Kraft $K_1$ vorangeht, und diejenige, welche auf die letzte Kraft $K_n$ folgt, alſo $S_1$ und $S_{n+1}$ (Fig. 16). Dieſe beiden Kräfte erſetzen alle gegebenen Kräfte $K_1, K_2, K_3 \ldots K_n$. Die letzteren ſind nach der Vorausſetzung im Gleichgewicht; folglich müſſen auch $S_1$ und $S_{n+1}$ im Gleichgewicht ſein. Gleichgewicht zwiſchen zwei Kräften iſt aber nur möglich, wenn ihre Richtungslinien in dieſelbe Gerade fallen. Sonach muſs diejenige Seilpolygonſeite, welche der erſten Kraft $K_1$ vorhergeht, mit derjenigen Seilpolygonſeite, welche auf die letzte Kraft $K_n$ folgt, zuſammenfallen, d. h. das Seilpolygon muſs eine geſchloſſene Figur ſein.

Die ſchlieſsende Seilpolygonſeite nennt man die **Schluſslinie des Seilpolygons**.

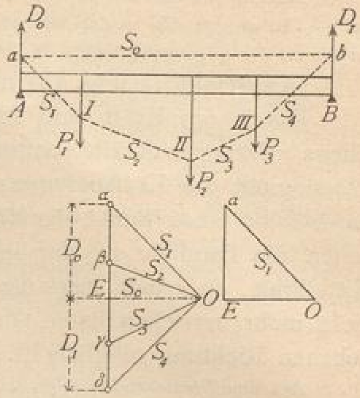
In der Statik der Bau-Conſtructionen kommt ſehr häufig der Fall vor, daſs alle wirkſamen Kräfte parallel ſind. In dieſem Falle wird das Kraftpolygon eine Gerade. Sind dieſe Kräfte im Gleichgewicht, ſo ſchlieſst ſich nach Satz VI das Kraftpolygon; ſomit fallen alsdann Anfangs- und Endpunkt des Kraftpolygons auch hier zuſammen.

---

[2]) Kehrt man die Richtungen der in einem Eckpunkte des Seilpolygons wirkenden zwei Seitenkräfte $S$ um, ſo halten ſich dieſelben offenbar mit der auf den Eckpunkt wirkenden Kraft $K$ im Gleichgewicht. In jedem Eckpunkte eines Seilpolygons befindet ſich demnach die äuſsere Kraft $K$ mit den im entgegengeſetzten Sinne genommenen Spannungen $S$ im Gleichgewicht.

Für neben ſtehenden Balken $AB$ (Fig. 17) ſei im Kraftpolygon $P_1 = \alpha\beta$, $P_2 = \beta\gamma$, $P_3 = \gamma\delta$; das Kraftpolygon muſs ſich ſchlieſsen, wenn die auſserdem noch wirkenden Kräfte $D_1$ und $D_0$, die Stützendrücke, an $\delta$ angetragen werden, d. h. es müſſen $D_0$ und $D_1$, welche, eben ſo wie $P_1$, $P_2$, $P_3$, lothrecht ſind, mit $\delta\alpha$ zuſammenfallen, und der Endpunkt von $D_0$ muſs auf $\alpha$ fallen. Unbekannt iſt zunächſt noch der Punkt $E$ im Kraftpolygon, welcher die Grenze zwiſchen $D_1$ und $D_0$ bildet. Da aber Gleichgewicht ſtattfindet, ſo muſs ſich auch das Seilpolygon ſchlieſsen, welches für einen beliebigen Pol und die fünf Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$, $D_1$, $D_0$ conſtruirt wird. Es ſei der Pol $O$, das Seilpolygon $I\,II\,III$ und $a$ der Schnittpunkt der erſten Seilpolygonſeite mit der Richtungslinie von $D_0$, $b$ der Schnittpunkt der letzten Seilpolygonſeite mit der Richtungslinie von $D_1$; alsdann müſſen nach dem Satze VI die vor $D_0$ liegende und die auf $D_1$ folgende Seilpolygonſeite, d. h. $S_0$ und $S_{n+1}$ zuſammenfallen; es muſs alſo $ab$ die ſchlieſsende Seilpolygonſeite, d. h. die Schluſslinie des Seilpolygons ſein.

Fig. 17.




Nach der Erklärung des Seilpolygons in Art. 17 (S. 13) ſtellen die von den Ecken des Kraftpolygons nach dem Pol $O$ laufenden Strahlen die in den Seilpolygonſeiten auftretenden Kräfte oder, wie man ſagt, die Spannungen im Seilpolygon vor, natürlich in demſelben Maſsſtabe, in welchem die Kräfte $P$ aufgetragen ſind. Im Punkte $a$ des Seilpolygons halten ſich nun folgende Kräfte das Gleichgewicht: der Stützendruck $D_0$, die Spannung in der Seilpolygonſeite $a\,I$ und diejenige in der Schluſslinie $ab$ (beide in dem gleichen Sinne, wie in Fuſsnote 2 [S. 15] genommen). Von dieſen drei Kräften ſind die Richtungen bekannt, von einer — der Seilpolygonſpannung in $a\,I$ — auch die Gröſse; dieſelbe iſt gleich $\alpha O$. Man kann alſo für dieſe drei Kräfte das Kraftpolygon, hier das Kraftdreieck, conſtruiren, indem man durch den einen Endpunkt der bekannten Kraft $\alpha O$, durch $\alpha$, die Parallele zur Richtung von $D_0$, durch den anderen Endpunkt, durch $O$, die Parallele zur Schluſslinie $ab$ zieht. Dann iſt $OE\alpha$ das geſuchte Kraftdreieck, $E\alpha = D_0$ und $OE$ gleich der Seilſpannung in der Schluſslinie. Gewöhnlich benutzt man zu dieſer Conſtruction unmittelbar das Kraftpolygon $\alpha\beta\gamma\delta$. Selbſtverſtändlich iſt dann auch ſofort $\delta E = D_1$, da $D_0 + D_1 = P_1 + P_2 + P_3$ iſt.

Hieraus ergiebt ſich die Regel: Die Stützendrücke bei einem Träger auf zwei Stützen mit nur lothrechten Kräften werden erhalten, indem man für einen beliebigen Pol $O$ das Seilpolygon conſtruirt, die Schluſslinie und parallel zu dieſer eine Linie durch den Pol zieht; letztere theilt die Kraftlinie in zwei Theile, welche nach Gröſse und Richtung die Stützendrücke darſtellen.

20. Satz VII. Conſtruirt man für eine Anzahl von Kräften aus zwei verſchiedenen Polen die entſprechenden Seilpolygone, ſo liegen die ſämmtlichen Schnittpunkte der gleichvielten Seilpolygonſeiten auf einer geraden Linie, welche zu der Verbindungslinie beider Pole parallel iſt.

Das aus einem beliebigen Pole $O$ (Fig. 18) conſtruirte Seilpolygon ſei $o\,I\,II\,III\,4$, das aus einem anderen Pole $O'$ conſtruirte ſei $o_1\,I_1\,II_1\,III_1\,4_1$. Alsdann ſchneiden ſich die beiden erſten Seiten $o\,I$ und $o_1\,I_1$ in $a$, die beiden zweiten Seiten $I\,II$ und $I_1\,II_1$ in $b$, die dritten Seiten $II\,III$ und $II_1\,III_1$ in $c$ etc. Die ſämmtlichen Punkte $a, b, c, d \ldots$ liegen auf einer geraden Linie, welche zu der Verbindungslinie der Pole, d. h. zu $O\,O'$ parallel iſt.

Nach der Erklärung des Seilpolygons iſt $K_1 = \alpha\beta$ im erſten Seilpolygon in zwei Seitenkräfte $S_1$ und $S_2$ zerlegt, deren Gröſse und Richtung ſich im Kraftpolygon zu bezw. $\alpha O$ und $O\beta$ ergiebt; dieſelbe Kraft iſt im zweiten Seilpolygon in zwei Seitenkräfte $S_1'$ und $S_2'$ zerlegt, deren Gröſse und Richtung bezw. $\alpha O'$ und $O'\beta$ iſt. Denkt man nun den Sinn der beiden Seitenkräfte $S_1'$ und $S_2'$ umgekehrt, ſo ſind dieſe beiden Kräfte die Seitenkräfte einer Kraft $K_1$, welche mit der gegebenen Kraft $K_1$ nach Gröſse und Richtung genau übereinſtimmt, deren Sinn aber demjenigen der gegebenen gerade entgegengeſetzt iſt. Dieſe neue Kraft $K_1$ muſs ſich alſo mit der gegebenen Kraft $K_1$ im Gleichgewicht halten; folglich müſſen auch die vier Seitenkräfte dieſer beiden Kräfte $K_1$ im Gleichgewicht ſein. Verbindet man $S_1$ und $S_1'$ zu einer, $S_2$ und $S_2'$ zur anderen Mittelkraft, ſo geht die erſtere durch den Schnittpunkt $a$ dieſer beiden Kräfte, die zweite durch den Schnittpunkt $b$ der beiden Kräfte $S_2$ und $S_2'$. Beide Mittelkräfte halten