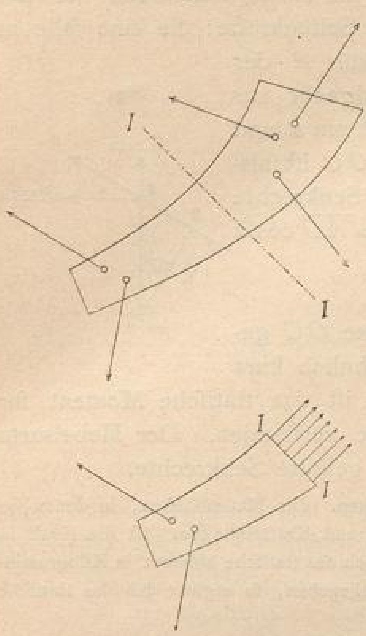
Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

a) Grundgesetze der Statik fester Körper

Fig. 1.



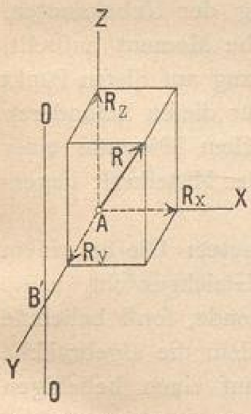
im Gleichgewichte ſein. Bringt man demnach die inneren Kräfte am linken Körpertheile an, ſo kann man auf die ſämmtlichen jetzt auf dieſen Theil wirkenden Kräfte die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen anwenden und aus dieſen die nach Gröſse und Richtung unbekannten inneren Kräfte ermitteln. Wie oben, ſtehen auch hier, falls alle Kräfte in einer Ebene liegen, drei Bedingungsgleichungen, falls die Kräfte in verſchiedenen Ebenen liegen, ſechs Bedingungsgleichungen zu Gebote; deſshalb iſt auch hier die Ermittelung der unbekannten inneren Kräfte auf dieſem Wege nur möglich, wenn dieſelben nicht mehr als drei, bezw. ſechs Unbekannte enthalten. Selbſtverſtändlich iſt das Ergebniſs das gleiche, ob man den Körpertheil an der einen oder anderen Seite der Ebene *II* unterſucht.

Die aus Vorſtehendem ſich ergebende Regel wird folgendermaſsen ausgedrückt: Man lege durch den Körper einen Schnitt, denke den Theil an der einen Seite des Schnittes fortgenommen und bringe an dem übrig bleibenden Bruchſtück alle Kräfte an, welche vor dem Durchſchneiden auf daſſelbe wirkten, d. h. die äuſseren Kräfte und die an der Schnittſtelle Seitens des anderen Bruchſtückes übertragenen inneren Kräfte. Alsdann befindet ſich daſſelbe in demſelben Zuſtande wie vor dem Durchſchneiden, d. h. im Gleichgewichte; man ſtelle nun für dieſe Kräfte die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf.

a) Grundgeſetze der Statik feſter Körper.

Obgleich die Statik feſter Körper im Allgemeinen hier als bekannt vorausgeſetzt werden kann, ſollen im Folgenden doch einige der wichtigſten anzuwendenden Sätze kurz angeführt werden, damit über die gemachten Annahmen keine Unklarheit herrſche. 5. Statiſche Momente.

Fig. 2.

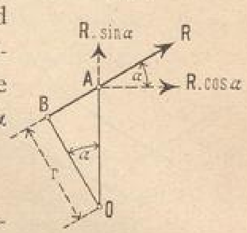


1) Satz des ſtatiſchen Momentes. Es ſei eine Kraft R und eine Axe OO gegeben (Fig. 2); man denke eine ſenkrecht zur Axe ſtehende Ebene hindurchgelegt, welche die Kraftrichtung im Punkte A ſchneidet; in dieſem Punkte zerlege man die Kraft R in drei ſenkrecht zu einander ſtehende Seitenkräfte R_x, R_y, R_z. Die eine Seitenkraft (R_z) ſei parallel zur Axe OO; die zweite (R_y) falle in die Verbindungslinie des Punktes A mit dem Punkte B', in welchem die Axe OO von der obigen Ebene geſchnitten wird; die dritte Seitenkraft (R_x) ſteht ſenkrecht zur zweiten und liegt, wie dieſe, in der ſenkrecht zur Axe OO hindurchgelegten Ebene. Alsdann nennt man das Product $R_x \, . \, \overline{AB'}$ das ſtatiſche Moment der Kraft R für die Axe OO.

Wenn alle Kräfte in derſelben Ebene wirken und die Axe OO ſenkrecht zu dieſer Kraftebene ſteht, ſo ſind für jede Kraft nur zwei Seitenkräfte (R_x und R_y) in Betracht zu ziehen; R_z iſt dann gleich Null. Der Schnittpunkt der Axe mit der

Kraftebene ſei O (Fig. 3); alsdann zerlege man R in einem beliebigen auf der Richtungslinie der Kraft gelegenen Punkte A in zwei Seitenkräfte: die eine falle in die Richtung der Verbindungslinie des Angriffspunktes A der Kraft mit dem Axenpunkt O; die andere ſtehe ſenkrecht zur erſteren. Die beiden Seitenkräfte haben die Gröſse $R \sin \alpha$ und $R \cos \alpha$. Das ſtatiſche Moment von R für die Axe OO iſt alsdann: $M = R \cos \alpha \,.\, \overline{AO}$. Fällt man von O die Senkrechte $\overline{OB} = r$ auf die Richtung der Kraft R, ſo iſt $\overline{OB} = \overline{AO} \cos \alpha = r$, alſo

Fig. 3.



$$M = R \,.\, r.$$

r wird der Hebelsarm der Kraft R für die Axe OO genannt. Bei Kräften in einer Ebene ſpricht man gewöhnlich kurz vom ſtatiſchen Moment für den Punkt O; darunter iſt das ſtatiſche Moment für die im Punkte O ſenkrecht zur Ebene errichtete Axe verſtanden. Der Hebelsarm iſt die vom Punkte O auf die Richtung der Kraft R gefällte Senkrechte.

Die ſtatiſchen Momente ſind Producte von Kräften und Längen. Die Maſseinheiten, in denen ſie ausgedrückt werden, ſind demnach gleichfalls Producte aus Längen- und Krafteinheiten. Iſt die Kraft in Kilogrammen und die Länge in Centimetern angegeben, ſo ergiebt ſich das ſtatiſche Moment in Kilogramm-Centimetern; iſt die Kraft in Tonnen und die Länge in Metern angegeben, ſo ergiebt ſich das ſtatiſche Moment in Tonnen-Metern [1]) etc.

Die Kraft R hat das Beſtreben, die Ebene um den als feſt gedachten Punkt O, bezw. um eine im Punkte O ſenkrecht zur Kraftebene errichtete Axe zu drehen, hier alſo nach rechts. Wenn die ſtatiſchen Momente mehrerer in derſelben Ebene liegender Kräfte aufzuſtellen ſind, ſo iſt zu beachten, daſs die verſchiedenen Kräfte allgemein verſchiedene Drehrichtungen haben. Welche von dieſen als poſitiv eingeführt wird, iſt gleichgiltig; iſt aber die eine Drehrichtung als poſitiv angenommen, ſo iſt die entgegengeſetzte als negativ einzuführen.

Der in Folgendem häufig anzuwendende Satz des ſtatiſchen Momentes lautet: Das ſtatiſche Moment der Mittelkraft in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene, in welcher die Kräfte liegen, iſt gleich der algebraiſchen Summe der ſtatiſchen Momente der Einzelkräfte in Bezug auf denſelben Punkt.

Dieſer Satz giebt oft ein bequemes Mittel zur Ermittelung der Unbekannten. Wählt man den Punkt, in Bezug auf welchen man das ſtatiſche Moment aufſtellt, auf der Richtungslinie der Mittelkraft, ſo hat die letztere in Bezug auf dieſen Punkt den Hebelsarm Null, alſo auch das ſtatiſche Moment Null. Für dieſen beſonderen Fall heiſst der obige Satz: Die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente einer Reihe von Kräften in Bezug auf einen auf der Richtungslinie der Mittelkraft liegenden Punkt iſt gleich Null.

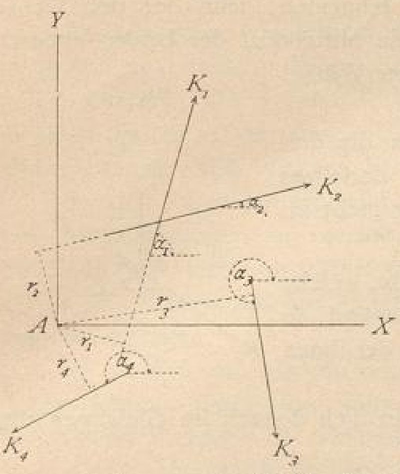
6. Gleichgewicht der Kräfte.

2) Satz vom Gleichgewicht der Kräfte. Derſelbe lautet: Die an einem Körper angreifenden, in einer Ebene liegenden Kräfte ſind im Gleichgewicht, wenn die algebraiſche Summe der in zwei ſenkrecht zu einander ſtehende, ſonſt beliebige Richtungen fallenden Seitenkräfte je gleich Null iſt und auſserdem die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente ſämmtlicher Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null iſt.

---

[1]) Ein Tonnen-Meter iſt gleich 100 Tonnen-Centimetern und gleich 100 000 Kilogramm-Centimetern. Danach kann ein Moment, welches in der einen Einheit, etwa in Tonnen-Metern, berechnet iſt, leicht in eine andere Einheit, etwa Kilogramm-Centimeter, umgerechnet werden.

Fig. 4.



Man zerlege demnach ſämmtliche Kräfte (K_1, K_2, K_3 . . . in Fig. 4) nach zwei zu einander ſenkrechten Richtungen, von denen die eine ganz willkürlich angenommen werden kann. Alsdann erhält man als Gleichgewichtsbedingungen für die ſämmtlichen Kräfte die Gleichungen:

$$\Sigma\,(K \cos \alpha) = 0, \quad \Sigma\,(K \sin \alpha) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma\,(K\,r) = 0.$$

Hier iſt A als Momentenpunkt angenommen; indeſs hätte auch jeder beliebige andere Punkt der Kraftebene gewählt werden können.

In ſehr vielen Fällen iſt die Mehrzahl aller äuſseren Kräfte lothrecht gerichtet; alsdann empfiehlt es ſich, die Kräfte K_1, K_2, K_3 . . . nach der wagrechten und lothrechten Richtung zu zerlegen. In dieſem Falle heiſsen die Bedingungsgleichungen, wenn wiederum alle Kräfte in einer Ebene liegen: Die an einem Körper angreifenden Kräfte ſind im Gleichgewicht, wenn

α) die algebraiſche Summe der wagrechten Seitenkräfte gleich Null iſt,

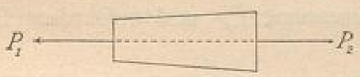
β) die algebraiſche Summe der lothrechten Seitenkräfte gleich Null iſt,

γ) die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene, gleich Null iſt.

Für Kräfte, welche nicht in derſelben Ebene wirken, lautet der Satz vom Gleichgewicht der Kräfte: Die an einem Körper angreifenden Kräfte ſind im Gleichgewichte, wenn für drei rechtwinkelig zu einander ſtehende Axen die algebraiſchen Summen der in die Axenrichtungen fallenden Seitenkräfte je gleich Null ſind und auſserdem die algebraiſchen Summen der ſtatiſchen Momente aller Kräfte, bezogen auf dieſe Axen, je gleich Null ſind.

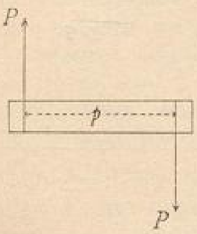
3) Zwei auf einen Körper wirkende Kräfte halten denſelben nur dann im Gleichgewicht, wenn beide der Gröſse nach genau gleich, dem Sinne nach genau einander entgegengeſetzt ſind und mit ihren Richtungslinien zuſammenfallen (Fig. 5); denn nur dann ſind alle drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt. 7. Zwei Kräfte auf einen Körper wirkſam; Kräftepaar.

Fig. 5.



Haben zwei Kräfte P (Fig. 6) parallele Richtung, gleiche Gröſse und entgegengeſetzten Sinn, fallen ſie aber mit ihren Richtungslinien nicht zuſammen, ſo iſt allerdings jede der beiden erſten Gleichgewichtsbedingungen α und β erfüllt, nicht aber die dritte. Man nennt zwei ſolche Kräfte ein **Kräftepaar** und verſteht unter dem Momente des Kräftepaares das Product aus der Gröſse der Kraft P in den ſenkrechten Abſtand der beiden Richtungslinien der Kräfte; d. h. es iſt das Moment $M = Pp$.

Fig. 6.

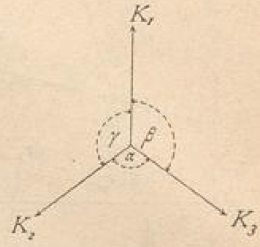


Die Summe der ſtatiſchen Momente beider zu dem Kräftepaar vereinten Kräfte hat für jeden beliebigen Punkt der Ebene die gleiche Gröſse $M = Pp$. In den Berechnungen kommt vielfach das (unter Umſtänden vorläufig noch unbekannte) Moment M eines Kräftepaares vor; wird alsdann für einen beliebigen Punkt der Ebene die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente aufgeſtellt, ſo iſt, wo **auch** der **Punkt** liege, der Beitrag des Kräftepaares mit dem Werthe M einzuführen.

8. Drei Kräfte auf einen Körper wirkſam.

4) Drei auf einen Körper wirkende Kräfte ſind nur dann im Gleichgewicht, wenn ſich ihre Richtungslinien in einem Punkte ſchneiden, jede der drei Kräfte abſolut genommen genau eben ſo groſs iſt, wie die Mittelkraft der beiden anderen Kräfte, und mit der betreffenden Mittelkraft einen Winkel von 180 Grad einſchlieſst.

Fig. 7.



Dieſe Bedingungen ſind nur erfüllbar, wenn die drei Kräfte in derſelben Ebene liegen; drei nicht in derſelben Ebene liegende Kräfte können daher mit einander nicht im Gleichgewicht ſein.

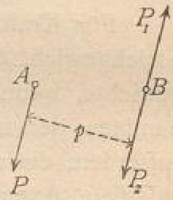
5) Wenn drei in derſelben Ebene liegende Kräfte, welche ſich in einem Punkte ſchneiden, im Gleichgewichte ſind, ſo verhalten ſich die Kräfte zu einander, wie die Sinus der ihnen gegenüber liegenden Winkel.

Die drei Kräfte K_1, K_2, K_3 (Fig. 7) befinden ſich ſonach im Gleichgewicht, wenn

$$K_1 : K_2 : K_3 = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

6) Eine in irgend einem Punkte A (Fig. 8) angreifende Kraft P kann ſtets erſetzt werden durch eine nach einem beliebigen anderen Punkte B parallel verſchobene Kraft P von gleicher Gröſse, gleicher Richtung und gleichem Sinne mit der gegebenen, und ein Kräftepaar, deſſen Moment dem Momente der gegebenen Kraft in Bezug auf den Punkt B nach Gröſse und Drehrichtung gleich iſt.

Fig. 8.



Denn es wird nichts geändert, wenn im Punkte B zwei Kräfte, P_1 und P_2, angebracht werden, welche der gegebenen Kraft in Gröſse und Richtung gleich, dem Sinne nach einander entgegen geſetzt ſind. Zwei dieſer drei Kräfte, P und P_1, ergeben ein Kräftepaar, welches für jeden Punkt der Ebene, alſo auch für B, das Moment $M = Pp$ und gleiche Drehrichtung hat, wie die urſprünglich gegebene Kraft; die dritte Kraft P_2 iſt eben die parallel verſchobene Kraft P. Jede Kraft P wirkt alſo auf einen nicht auf ihrer Richtung liegenden Punkt, deſſen ſenkrechter Abſtand von der Kraft gleich p iſt, mit einem Drehmoment Pp und auſserdem ſo, als ob ſie in ihm ſelbſt angriffe.

9. Geſetz der Wechſelwirkung.

7) Geſetz der Wechſelwirkung. Daſſelbe lautet: Wenn ein Körper auf einen anderen eine Kraft ausübt, ſo erleidet er durch dieſen Körper eine Kraft, welche der von ihm ausgeübten der Gröſse nach genau gleich, der Richtung nach genau entgegengeſetzt iſt.

Fig. 9.

Dieſes Geſetz wird in der Folge ſehr häufig angewendet werden. Es kommt unter Anderem bei den Auflagern der Träger in Betracht. Ein Träger AB (Fig. 9) übt durch ſein Eigengewicht und die wirkenden Belaſtungen auf die Auflagerpunkte A und B die Drücke K und K_1 aus; dieſelben ſind nach unten gerichtet. Genau eben ſo groſs ſind die Gegendrücke, welche die Auflager auf die Träger ausüben. Dieſe ſind nach oben gerichtet, da ſie den erſteren Drücken K und K_1 genau entgegengeſetzt gerichtet ſein müſſen.

Betrachtet man nur den Träger, ſo hat man die nach oben wirkenden Kräfte K und K_1 — als Stützendrücke — einzuführen; betrachtet man die Auflager, ſo ſind die nach unten gerichteten Drücke K und K_1 der Unterſuchung zu Grunde zu legen.