Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

b) Grundlagen für die graphische Behandlung baustatischer Aufgaben

urn:nbn:de:hbz:466:1-77733

b) Grundlagen für die graphifche Behandlung bauftatifcher Aufgaben.

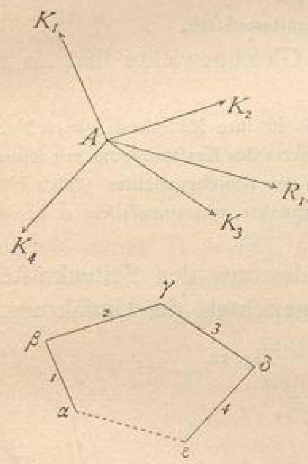
Die Aufgaben der Statik der Bau-Conftructionen können fowohl durch Rechnung (auf analytifchem Wege), als auch durch Zeichnung (auf graphifchem Wege) gelöst werden. Die graphifche Behandlung hat manche Vortheile. Diefelbe führt in vielen Fällen rafcher und leichter zum Ziele und gewährt faft immer eine klarere Ueberficht über die Wirkung der Kräfte, als die Rechnung. 10. Graphifche Methode.

In den folgenden Unterfuchungen werden beide Wege eingefchlagen werden. Um Wiederholungen zu vermeiden, follen die Grundlagen für die graphifche Behandlung hier kurz vorgeführt werden. Da bei den meiften Aufgaben die Kräfte als in einer Ebene wirkend angenommen werden können, werden wir uns auf diefen Fall befchränken.

1) Kräfte an einem Angriffspunkte. Die an einem Punkte angreifenden Kräfte können durch ihre Mittelkraft erfetzt werden. Um diefe Mittelkraft nach Gröfse und Richtung zu erhalten, zeichnet man das fog. Kraftpolygon. 11. Kraft-polygon.

Das Kraftpolygon für eine Anzahl von Kräften ift derjenige Linienzug, welchen man erhält, wenn man fämmtliche Kräfte nach irgend einem Mafsftabe fo an einander reiht, dafs die Gröfse, die Richtung und der Sinn einer jeden Kraft in diefem Linienzuge mit der Gröfse, der Richtung und dem Sinne der gegebenen Kraft übereinftimmt und dafs der Anfangspunkt jeder Kraft mit dem Endpunkte der vorhergehenden Kraft zufammenfällt.

Fig. 10.



Der Mafsftab für das Auftragen der Kräfte kann beliebig angenommen werden; doch find fämmtliche Kräfte nach demfelben Mafsftabe aufzutragen.

Um das Kraftpolygon für die Kräfte K_1, K_2, K_3, K_4 zu erhalten, welche im Punkte A (Fig. 10) angreifen, trage man zunächft von einem beliebig anzunehmenden Punkte α aus nach irgend einem Mafsftabe fo viele Krafteinheiten ab, wie K_1 enthält, und zwar nach einer Richtung $\alpha\beta$, welche mit derjenigen von K_1 übereinftimmt. Ift etwa $K_1 = 20^t$ und der Mafsftab fo gewählt, dafs $1^{cm} = 20^t$ bedeutet, fo würde man von α aus 1^{cm} abzutragen haben. Man ziehe alfo durch α eine Linie parallel zur Richtung von K_1 und trage auf diefer Linie $\alpha\beta = K_1$ ab. Daran trage man K_2 ab; zu diefem Zwecke ziehe man durch β eine Linie parallel zur Richtung von K_2 und trage auf diefer Linie $\beta\gamma = K_2$ ab. In derfelben Weife verfahre man weiter und erhält fo $\gamma\delta = K_3$, $\delta\varepsilon = K_4$. Alsdann ift $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ das Kraftpolygon für die Kräfte K_1, K_2, K_3, K_4.

Es ift oben angegeben, dafs der Sinn der Kraft im Kraftpolygon mit dem der gegebenen Kraft übereinftimmen mufs. In der gegebenen Kraft ift der Sinn durch einen Pfeil ausgedrückt, fo dafs Unklarheit über denfelben nicht beftehen kann; im Kraftpolygon ergiebt fich der Sinn ebenfalls unzweideutig, wenn man die Kräfte ftets fo aufträgt, dafs die Richtung vom früheren Buchftaben des Alphabetes bis zum höheren Buchftaben deffelben mit der Pfeilrichtung der gegebenen Kraft übereinftimmt. Die Kraft $\alpha\beta$ wirkt alfo im Sinne von α nach β, nicht im Sinne von β nach α.

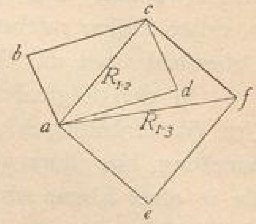
Gröfse, Richtung und Sinn der Mittelkraft aller an einem Punkte A (Fig. 10) angreifenden Kräfte werden erhalten, indem man den Anfangspunkt des für diefe Kräfte conftruirten Kraftpolygons mit feinem Endpunkte verbindet. 12. Satz I.

In Fig. 10 giebt alfo $\alpha\varepsilon$ die Gröfse, die Richtung und den Sinn der Mittelkraft der vier Kräfte K_1, K_2, K_3, K_4 an.

Die Mittelkraft der beiden Kräfte K_1 und K_2 wird nach dem bekannten Satz vom Parallelogramm der Kräfte durch die Diagonale des aus diefen beiden Kräften conftruirten Parallelogramms dargeftellt, d. h. in Fig. 11 ftellt ac die Mittelkraft von K_1 und K_2 nach Gröfse und Richtung dar, wenn

$ab = K_1$, $ad = K_2$ iſt. Die Diagonale ac theilt das Parallelogramm $abcd$ in zwei congruente Dreiecke; es wird alſo genügen, das Dreieck abc zu conſtruiren, in welchem $ab = K_1$ und $bc = K_2$ iſt. Alsdann iſt die dritte Seite ac des Dreieckes gleich der Mittelkraft R_{1-2} von K_1 und K_2. Der Linienzug abc iſt aber nach der oben gegebenen Erklärung das Kraftpolygon für die beiden Kräfte K_1 und K_2, und ac verbindet den Anfangspunkt a deſſelben mit dem Endpunkte c. Für zwei Kräfte iſt damit obiger Satz bewieſen.

Fig. 11.



Kommt eine dritte Kraft K_3 hinzu, ſo iſt die Mittelkraft R_{1-2} von K_1 und K_2 mit K_3 zu vereinen, um die Reſultirende R_{1-3} von K_1, K_2 und K_3 zu erhalten. Iſt $K_3 = ae$, ſo conſtruire man das Parallelogramm $acfe$, und ziehe die Diagonale af deſſelben; die letztere iſt die geſuchte Mittelkraft. Auch hier genügt es, um af zu erhalten, nur das Dreieck acf zu zeichnen. Man erhält alſo die Mittelkraft R_{1-3}, indem man an den Endpunkt von $R_{1-2} = ac$ die Kraft K_3 nach Gröſse und Richtung gleich cf anträgt und a mit f verbindet. Der Linienzug $abcf$ iſt aber nach obiger Erklärung das Kraftpolygon für die drei Kräfte K_1, K_2 und K_3 und af die Verbindungslinie des Anfangspunktes des Kraftpolygons mit deſſen Endpunkte. Damit iſt der Beweis unſeres Satzes auch für drei Kräfte geliefert. In derſelben Weiſe kann er ohne Schwierigkeit für eine beliebige Anzahl von Kräften geführt werden.

Das Kraftpolygon iſt nur eine Hilfsfigur, welche wohl Gröſse, Richtung und Sinn der Mittelkraft, nicht aber ihre Lage in der Ebene angiebt. Die Lage derſelben iſt aber nicht zweifelhaft, ſobald man auſser der Richtung der Kraft einen Punkt kennt, durch welchen die Kraft hindurchgeht. Die Richtung wird hier durch das Kraftpolygon gegeben. Der Durchgangspunkt für die Kraft iſt ebenfalls bekannt; denn die Mittelkraft aller Kräfte muſs durch den gemeinſchaftlichen Angriffspunkt derſelben, d. h. durch A (Fig. 10), gehen. Zieht man alſo durch A eine Linie parallel zu $\alpha\varepsilon$, ſo ergiebt dieſe die Mittelkraft nach Lage und Richtung; die Gröſse derſelben iſt $\alpha\varepsilon$.

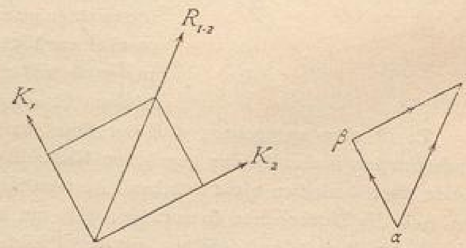
Zu jedem Kraftpolygon gehört als nothwendige Ergänzung ein Kräftemaſsſtab.

13. Satz II. Wenn die an einem Punkte angreifenden Kräfte im Gleichgewichte ſind, ſo iſt das Kraftpolygon eine geſchloſſene Figur.

Sind die auf einen Punkt wirkenden Kräfte im Gleichgewichte, ſo iſt ihre Mittelkraft gleich Null; dieſelbe wird aber nach Satz I durch die Verbindungslinie des Anfangspunktes des Kraftpolygons mit ſeinem Endpunkte dargeſtellt. Dieſe Verbindungslinie muſs alſo für den Fall des Gleichgewichtes gleich Null ſein; demnach muſs der Anfangspunkt des Kraftpolygons mit ſeinem Endpunkte zuſammenfallen, d. h. das Kraftpolygon muſs eine geſchloſſene Figur ſein.

14. Satz III. Der Sinn der Mittelkraft iſt vom Anfangspunkte des aus den Seitenkräften conſtruirten Kraftpolygons nach dem Endpunkte deſſelben gerichtet; der Umfahrungsſinn des ganzen Polygons mit Einſchluſs der Mittelkraft erleidet alſo am Endpunkte der Einzelkräfte eine Unterbrechung.

Fig. 12.



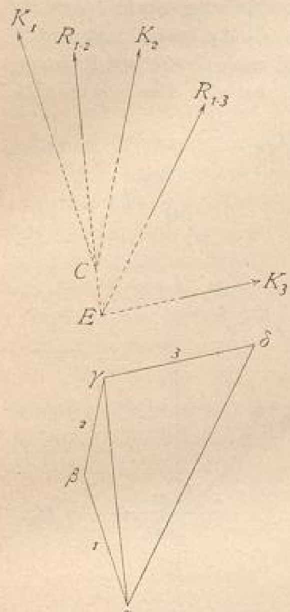
Um dieſen Satz zu beweiſen, genügt es, die Mittelkraft zweier Kräfte aufzuſuchen. Iſt in Fig. 12 $\alpha\beta = K_1$ und $\beta\gamma = K_2$, ſo haben beide den durch die Pfeile angedeuteten Umfahrungsſinn, welcher, wenn noch eine beliebige Anzahl von Kräften hinzukommt, immer derſelbe bleibt, d. h. er iſt ſtets vom Anfangspunkte des Kraftpolygons nach dem Endpunkte desſelben gerichtet. Der Sinn der Reſultirenden $R_{1-2} = \alpha\gamma$ iſt aber, wie ſich aus der Parallelogramm-Conſtruction in Fig. 12 ergiebt, von α nach γ gerichtet; er iſt alſo dem Umfahrungsſinne der Einzelkräfte direct entgegengeſetzt. Damit iſt der Satz für zwei Kräfte bewieſen. Jede dritte Kraft K_3 läſſt ſich aber mit R_{1-2} in derſelben Weiſe, wie bei K_1 und K_2 gezeigt iſt, zuſammenſetzen; es handelt ſich dabei auch ſtets nur um zwei Kräfte, und deſshalb gilt das Geſagte auch für R_{1-2} und K_3, d. h. für K_1, K_2, K_3. Die Mittelkraft der durch das Kraftpolygon $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ dargeſtellten Kräfte (Fig. 10) iſt $\alpha\varepsilon$, der Sinn iſt von α nach ε gerichtet; der Umfahrungsſinn erleidet ſonach bei ε eine Unterbrechung.

15. Satz IV. Sind die an einem Punkte angreifenden Kräfte im Gleichgewichte, ſo iſt für das ganze Kraftpolygon der Umfahrungsſinn derſelbe.

Denn alsdann iſt die Mittelkraft gleich Null, und dieſe iſt nach Satz III die einzige Kraft, welche einen anderen Umfahrungsſinn hat, als die übrigen Kräfte. Dieſe einzige Kraft fällt hier fort; mithin haben in dieſem Falle alle Kräfte denſelben Umfahrungsſinn.

2) Kräfte an verſchiedenen Angriffspunkten. Wenn die auf einen Körper wirkenden Kräfte an verſchiedenen Punkten deſſelben angreifen, ſo iſt zunächſt die Ermittelung der Gröſse und Richtung der Mittelkraft genau, wie unter 1 angegeben, vorzunehmen. 16. Kräfte an verſchiedenen Angriffspunkten.

Fig. 13.



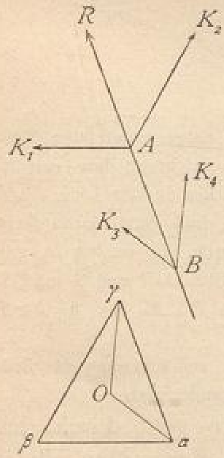
Denn man kann (Fig. 13) zunächſt die beiden Kräfte K_1 und K_2 auf ihren Richtungslinien beliebig verſchieben, alſo auch bis zu dem Schnittpunkte C derſelben. Für die beiden im Punkte C angreifenden Kräfte liegt nun die Aufgabe genau ſo, wie oben entwickelt iſt. Iſt $K_1 = \alpha\beta$ und $K_2 = \beta\gamma$, ſo iſt $\alpha\gamma$ die Mittelkraft R_{1-2} von K_1 und K_2.

Dieſe Mittelkraft R_{1-2} greift in C, dem Schnittpunkte der beiden Kräfte K_1 und K_2, an und hat die durch $\alpha\gamma$ beſtimmte Richtung, d. h. ſie iſt parallel zu $\alpha\gamma$. Um jetzt die Mittelkraft von R_{1-2} und K_3, d. h. diejenige von K_1, K_2, K_3 zu finden, verfährt man genau ſo, wie bei der Zuſammenſetzung von K_1 und K_2. Man verſchiebt R_{1-2} und K_3 bis zum Schnittpunkte E ihrer Richtungslinien; in dieſem muſs die geſuchte Mittelkraft R_{1-3} angreifen. Die Zuſammenſetzung von R_{1-2} ($= \alpha\gamma$ im Kraftpolygon) und K_3 ($= \gamma\delta$ im Kraftpolygon) kann nun wiederum genau in der oben gezeigten Weiſe erfolgen, indem man $\gamma\delta = K_3$ an γ anträgt und $\alpha\delta$ zieht. $\alpha\delta$ giebt die Gröſse und Richtung der Mittelkraft R_{1-3} von K_1, K_2, K_3 an; dieſelbe geht durch den Punkt E. In der gleichen Weiſe kann man auch bei mehreren Kräften weiter verfahren.

Wenn Gröſse und Richtung der Mittelkraft gefunden ſind, iſt auch die Lage derſelben bekannt, ſobald ein Punkt bekannt iſt, durch welchen ſie gehen muſs; denn durch dieſen Punkt läſst ſich nur eine Parallele zu der im Kraftpolygon gefundenen Richtung der Mittelkraft legen. Ein ſolcher Punkt iſt in Fig. 13 bei R_{1-2} der Punkt C, bei R_{1-3} der Punkt E etc.

Bei einer gröſseren Anzahl von Kräften würde die gezeigte Ermittelung der Lage der Mittelkraft ſehr umſtändlich ſein; deſshalb hat man zur Erleichterung eine Hilfsconſtruction eingeführt, das ſog. Seilpolygon. Daſſelbe ergiebt ſich durch die folgende Betrachtung. 17. Seilpolygon.

Fig. 14.



Wie man die Gröſse und Richtung der Mittelkraft zweier Kräfte K_1 und K_2 in der dritten Seite $\alpha\gamma$ (Fig. 14) des für die beiden Kräfte conſtruirten Kraftpolygons $\alpha\beta\gamma$, hier der Schluſsſeite des Kraftdreieckes, findet, ſo kann man auch irgend eine gegebene Kraft R als Mittelkraft zweier Kräfte K_1 und K_2 auffaſſen. Dieſe beiden Kräfte müſſen nur zwei Bedingungen genügen, und zwar:

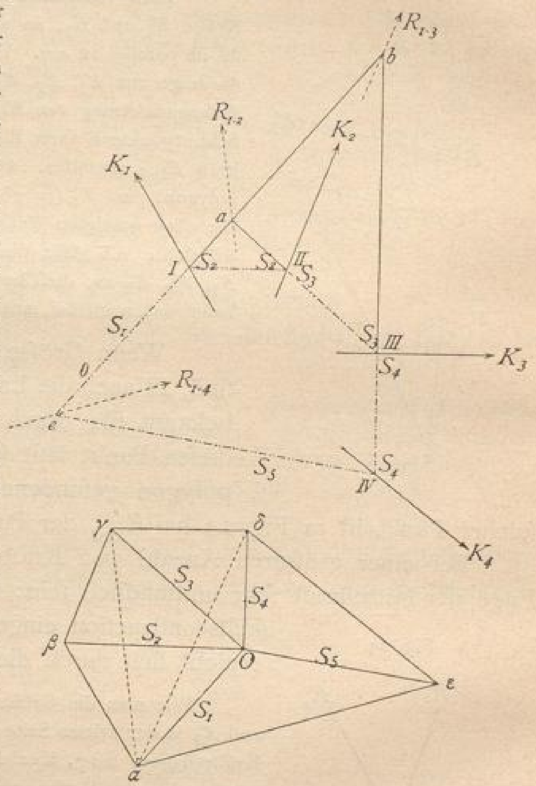
α) Das aus ihnen conſtruirte Kraftpolygon muſs als dritte Seite die gegebene Kraft nach Gröſse und Richtung enthalten, und

β) die beiden Kräfte müſſen ſich auf einem Punkte der gegebenen Kraftrichtung ſchneiden.

Man kann alſo R als Mittelkraft der beiden Kräfte K_1 und K_2 auffaſſen, die im Kraftpolygon durch bezw. $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ dargeſtellt ſind und deren Richtungslinien ſich auf dem Punkte A der Kraftrichtung R ſchneiden. In gleicher Weiſe kann R auch als Mittelkraft der beiden Kräfte K_3 und K_4 angeſehen werden, denen das Kraftdreieck $\alpha O \gamma$ entſpricht, die alſo im Kraftpolygon durch bezw. αO und $O\gamma$ dargeſtellt werden und deren Richtungslinien ſich im Punkte B der gegebenen Kraftrichtung ſchneiden. Man kann demnach die gegebene Kraft R ſowohl durch die Kräfte K_1 und K_2, wie durch K_3 und K_4 erſetzen. Daraus folgt, daſs man für die Zerlegung einer gegebenen Kraft den Punkt O ganz beliebig, den Punkt B auf der Richtungslinie der gegebenen Kraft beliebig wählen kann.

Ift eine gröfsere Anzahl von Kräften K_1, K_2, K_3, K_4 .... gegeben (Fig. 15), fo kann man zunächft K_1 in der angegebenen Weife zerlegen. K_1 werde im Kraftpolygon durch $\alpha\beta$ dargeftellt und möge in $\alpha O = S_1$ und $O\beta = S_2$ zerlegt werden. Nach Früherem ift, da K_1 den Sinn von α nach β hat, S_1 von α nach O, S_2 von O nach β gerichtet. Als Schnittpunkt diefer beiden Seitenkräfte von K kann der Punkt I auf der Richtungslinie von K_1 beliebig angenommen werden. Ferner kann K_2, welches im Kraftpolygon durch $\beta\gamma$ dargeftellt wird, ebenfalls in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, welche mit $\beta\gamma$ zufammen ein Dreieck bilden müffen. Die Spitze des Dreieckes kann wiederum beliebig gewählt werden; man kann alfo den Punkt O als diefe Spitze annehmen. Sodann erhält man als die beiden Seitenkräfte von K_2 $(= \beta\gamma)$ die Kraftlinien βO und $O\gamma$. Die erfte diefer Seitenkräfte ift nach Gröfse und Richtung der zweiten Seitenkraft von K_1 genau gleich, da diefe $O\beta$ war. $S_2 = \beta O$ hat den Sinn von β nach O, $S_3 = O\gamma$ den Sinn von O nach γ. Wählt man jetzt als Zerlegungspunkt der Kraft K_2 den Punkt II, in welchem die Richtungslinie der Kraft K_2 von der zweiten Seitenkraft S_2 der Kraft K_1 gefchnitten wird, fo greifen in diefem Punkte die beiden Kräfte S_2 und S_3 an. In der Richtungslinie $I\ II$ wirken alfo die beiden Kräfte S_2, deren eine in I, deren andere in II angreift. Beide find, wie eben entwickelt ift, der Gröfse nach einander gleich; fie haben diefelbe Richtung, aber entgegengefetzten Sinn, heben fich alfo gegenfeitig auf. Die beiden gegebenen Kräfte K_1 und K_2 find alfo durch vier neue Kräfte erfetzt, nämlich durch S_1, S_2, S_2, S_3; zwei von diefen Kräften heben einander auf, nämlich die beiden S_2; es bleiben alfo zwei Kräfte S_1 und S_3, welche die gegebenen Kräfte K_1 und K_2 vollftändig erfetzen. Die Mittelkraft von K_1 und K_2 ift demnach derjenigen von S_1 und S_3 gleich in der Gröfse, in der Richtung, im Sinn und in der Lage. Die Mittelkraft von S_1 und S_3 geht aber durch den Schnittpunkt a der Richtungslinien derfelben; durch diefen Punkt a mufs alfo auch die Mittelkraft von K_1 und K_2 gehen.

Fig. 15.



Verfährt man nun mit der dritten Kraft K_3 eben fo, wie mit K_2, d. h. zerlegt man K_3 in zwei Seitenkräfte fo, dafs der Punkt O als Spitze des Kraftdreieckes für die Zerlegung von $K_3 = \gamma\delta$ gewählt wird, fo werden die beiden Seitenkräfte $S_3 = \gamma O$ und $S_4 = O\delta$ fein. Die erfte diefer beiden Seitenkräfte ift wiederum gleich der zweiten Seitenkraft von K_2, hat aber entgegengefetzten Sinn. Wählt man ferner als Zerlegungspunkt von K_3 den Punkt III, in welchem die Richtungslinie von K_3 durch die Richtungslinie der Seitenkraft S_3 der Kraft K_2 gefchnitten wird, fo wirken in der Linie $II\ III$ zwei Kräfte S_3, welche einander wiederum aufheben. Die Kräfte K_1, K_2, K_3 find jetzt durch fechs Kräfte erfetzt, nämlich durch S_1, S_2, S_2, S_3, S_3, S_4, von denen fich die vier mittleren, die beiden S_2 und die beiden S_3, gegenfeitig aufheben, fo dafs nur S_1 und S_4 übrig bleiben. Die Mittelkraft von S_1 und S_4 ift alfo auch diejenige von K_1, K_2 und K_3. Daraus folgt, dafs die Mittelkraft von K_1, K_2 und K_3 durch den Schnittpunkt der Kraftrichtungen S_1 und S_4, alfo durch den Punkt b geht.

Verfährt man fo weiter, fo erhält man einen Linienzug $O\ I\ II\ III\ IV$..., welchen man das Seilpolygon nennt. Aus der vorftehenden Erklärung der Entftehung ergiebt fich folgender Satz:

18. Satz V. Die Mittelkraft einer Anzahl auf einander folgender Kräfte geht durch den Schnittpunkt der Richtung derjenigen Seilpolygonfeite, welche der erften diefer Kräfte vorhergeht, mit der Richtung derjenigen Seilpolygonfeite, welche auf die letzte diefer Kräfte folgt.

Denn die in den mittleren Seilpolygonſeiten wirkenden Kräfte heben ſich ſämmtlich gegenſeitig auf, und es bleiben nur die in den äuſseren Seilpolygonſeiten wirkenden Kräfte übrig, deren Mittelkraft mit derjenigen der gegebenen Kräfte in jeder Beziehung übereinſtimmt[2]).

Den Punkt O (Fig. 15) nennt man den **Pol** des Seilpolygons.

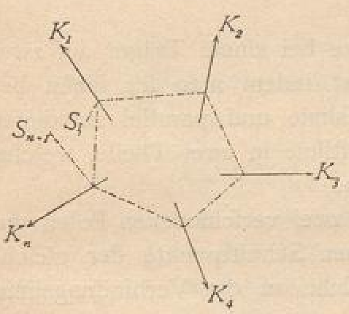
Durch das Kraft- und Seilpolygon iſt die Mittelkraft ganz beliebig in einer Ebene wirkender Kräfte beſtimmt. Die Gröſse, die Richtung und den Sinn derſelben giebt das Kraftpolygon, die Lage in der Ebene giebt das Seilpolygon an, da daſſelbe einen Punkt der Richtungslinie der Mittelkraft ergiebt. Zieht man durch dieſen die Parallele zu der mit Hilfe des Kraftpolygons gefundenen Richtung der Mittelkraft, ſo erhält man die wirkliche Lage derſelben, über welche ein Zweifel nicht mehr herrſchen kann, da durch einen Punkt nur eine Parallele zu einer gegebenen Richtung möglich iſt.

Aus dem Vorſtehenden folgt, daſs Kraft- und Seilpolygon nicht nur die Mittelkraft der ſämmtlichen wirkenden Kräfte, ſondern auch diejenige einer beliebigen Gruppe dieſer Kräfte ergeben. So iſt die Mittelkraft von K_1 und K_2 (Fig. 15) nach Gröſse und Richtung gleich $\alpha\gamma$ und geht durch a. Zieht man alſo durch a eine Linie parallel zu $\alpha\gamma$, ſo erhält man dieſe Mittelkraft R_{1-2}. So iſt ferner die Mittelkraft von K_1, K_2 und K_3 nach Gröſse und Richtung gleich $\alpha\delta$ und geht durch b; eine durch b parallel zu $\alpha\delta$ gezogene Linie ergiebt R_{1-3}. Die Mittelkraft von K_1, K_2, K_3 und K_4 iſt nach Gröſse und Richtung gleich $\alpha\varepsilon$ und geht durch c etc.

Wenn die an verſchiedenen Punkten eines Körpers angreifenden Kräfte im Gleichgewicht ſind, ſo iſt ſowohl das Kraftpolygon, wie auch das Seilpolygon eine geſchloſſene Figur. 19. Satz VI.

Daſs das Kraftpolygon in dem angegebenen Falle eine geſchloſſene Figur ſein muſs, geht aus dem Früheren hervor; denn es iſt nachgewieſen, daſs das Kraftpolygon für an verſchiedenen Punkten angreifende Kräfte genau eben ſo conſtruirt wird und genau dieſelbe Bedeutung hat, wie für an einem Punkte angreifende Kräfte. Nach Satz II muſs alſo das Kraftpolygon eine geſchloſſene Figur ſein, auch wenn die im Gleichgewicht befindlichen Kräfte an verſchiedenen Punkten angreifen.

Fig. 16.



Daſs ſich auch das Seilpolygon ſchlieſsen muſs, ergiebt ſich folgendermaſsen.

Conſtruirt man das Seilpolygon für eine beliebige Anzahl von Kräften, ſo heben ſich, wie oben auseinandergeſetzt, die ſämmtlichen in den mittleren Seilpolygonſeiten wirkenden Kräfte auf, und es bleiben als einzig wirkende Kräfte diejenigen übrig, welche in den beiden äuſserſten Seilpolygonſeiten wirken, d. h. diejenige, welche der erſten Kraft K_1 vorangeht, und diejenige, welche auf die letzte Kraft K_n folgt, alſo S_1 und S_{n+1} (Fig. 16). Dieſe beiden Kräfte erſetzen alle gegebenen Kräfte $K_1, K_2, K_3 \ldots K_n$. Die letzteren ſind nach der Vorausſetzung im Gleichgewicht; folglich müſſen auch S_1 und S_{n+1} im Gleichgewicht ſein. Gleichgewicht zwiſchen zwei Kräften iſt aber nur möglich, wenn ihre Richtungslinien in dieſelbe Gerade fallen. Sonach muſs diejenige Seilpolygonſeite, welche der erſten Kraft K_1 vorhergeht, mit derjenigen Seilpolygonſeite, welche auf die letzte Kraft K_n folgt, zuſammenfallen, d. h. das Seilpolygon muſs eine geſchloſſene Figur ſein.

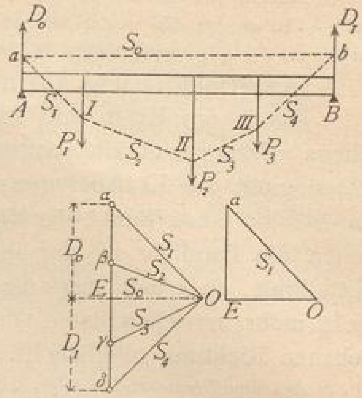
Die ſchlieſsende Seilpolygonſeite nennt man die **Schluſslinie des Seilpolygons**.

In der Statik der Bau-Conſtructionen kommt ſehr häufig der Fall vor, daſs alle wirkſamen Kräfte parallel ſind. In dieſem Falle wird das Kraftpolygon eine Gerade. Sind dieſe Kräfte im Gleichgewicht, ſo ſchlieſst ſich nach Satz VI das Kraftpolygon; ſomit fallen alsdann Anfangs- und Endpunkt des Kraftpolygons auch hier zuſammen.

---

[2]) Kehrt man die Richtungen der in einem Eckpunkte des Seilpolygons wirkenden zwei Seitenkräfte S um, ſo halten ſich dieſelben offenbar mit der auf den Eckpunkt wirkenden Kraft K im Gleichgewicht. In jedem Eckpunkte eines Seilpolygons befindet ſich demnach die äuſsere Kraft K mit den im entgegengeſetzten Sinne genommenen Spannungen S im Gleichgewicht.

Fig. 17.



Für neben ſtehenden Balken AB (Fig. 17) ſei im Kraftpolygon $P_1 = \alpha\beta$, $P_2 = \beta\gamma$, $P_3 = \gamma\delta$; das Kraftpolygon muſs ſich ſchlieſsen, wenn die auſserdem noch wirkenden Kräfte D_1 und D_0, die Stützendrücke, an δ angetragen werden, d. h. es müſſen D_0 und D_1, welche, eben ſo wie P_1, P_2, P_3, lothrecht ſind, mit $\delta\alpha$ zuſammenfallen, und der Endpunkt von D_0 muſs auf α fallen. Unbekannt iſt zunächſt noch der Punkt E im Kraftpolygon, welcher die Grenze zwiſchen D_1 und D_0 bildet. Da aber Gleichgewicht ſtattfindet, ſo muſs ſich auch das Seilpolygon ſchlieſsen, welches für einen beliebigen Pol und die fünf Kräfte P_1, P_2, P_3, D_1, D_0 conſtruirt wird. Es ſei der Pol O, das Seilpolygon $I\,II\,III$ und a der Schnittpunkt der erſten Seilpolygonſeite mit der Richtungslinie von D_0, b der Schnittpunkt der letzten Seilpolygonſeite mit der Richtungslinie von D_1; alsdann müſſen nach dem Satze VI die vor D_0 liegende und die auf D_1 folgende Seilpolygonſeite, d. h. S_0 und S_{n+1} zuſammenfallen; es muſs alſo ab die ſchlieſsende Seilpolygonſeite, d. h. die Schluſslinie des Seilpolygons ſein.

Nach der Erklärung des Seilpolygons in Art. 17 (S. 13) ſtellen die von den Ecken des Kraftpolygons nach dem Pol O laufenden Strahlen die in den Seilpolygonſeiten auftretenden Kräfte oder, wie man ſagt, die Spannungen im Seilpolygon vor, natürlich in demſelben Maſsſtabe, in welchem die Kräfte P aufgetragen ſind. Im Punkte a des Seilpolygons halten ſich nun folgende Kräfte das Gleichgewicht: der Stützendruck D_0, die Spannung in der Seilpolygonſeite $a\,I$ und diejenige in der Schluſslinie ab (beide in dem gleichen Sinne, wie in Fuſsnote 2 [S. 15] genommen). Von dieſen drei Kräften ſind die Richtungen bekannt, von einer — der Seilpolygonſpannung in $a\,I$ — auch die Gröſse; dieſelbe iſt gleich αO. Man kann alſo für dieſe drei Kräfte das Kraftpolygon, hier das Kraftdreieck, conſtruiren, indem man durch den einen Endpunkt der bekannten Kraft αO, durch α, die Parallele zur Richtung von D_0, durch den anderen Endpunkt, durch O, die Parallele zur Schluſslinie ab zieht. Dann iſt $OE\alpha$ das geſuchte Kraftdreieck, $E\alpha = D_0$ und OE gleich der Seilſpannung in der Schluſslinie. Gewöhnlich benutzt man zu dieſer Conſtruction unmittelbar das Kraftpolygon $\alpha\beta\gamma\delta$. Selbſtverſtändlich iſt dann auch ſofort $\delta E = D_1$, da $D_0 + D_1 = P_1 + P_2 + P_3$ iſt.

Hieraus ergiebt ſich die Regel: Die Stützendrücke bei einem Träger auf zwei Stützen mit nur lothrechten Kräften werden erhalten, indem man für einen beliebigen Pol O das Seilpolygon conſtruirt, die Schluſslinie und parallel zu dieſer eine Linie durch den Pol zieht; letztere theilt die Kraftlinie in zwei Theile, welche nach Gröſse und Richtung die Stützendrücke darſtellen.

20. Satz VII. Conſtruirt man für eine Anzahl von Kräften aus zwei verſchiedenen Polen die entſprechenden Seilpolygone, ſo liegen die ſämmtlichen Schnittpunkte der gleichvielten Seilpolygonſeiten auf einer geraden Linie, welche zu der Verbindungslinie beider Pole parallel iſt.

Das aus einem beliebigen Pole O (Fig. 18) conſtruirte Seilpolygon ſei $o\,I\,II\,III\,4$, das aus einem anderen Pole O' conſtruirte ſei $o_1\,I_1\,II_1\,III_1\,4_1$. Alsdann ſchneiden ſich die beiden erſten Seiten $o\,I$ und $o_1\,I_1$ in a, die beiden zweiten Seiten $I\,II$ und $I_1\,II_1$ in b, die dritten Seiten $II\,III$ und $II_1\,III_1$ in c etc. Die ſämmtlichen Punkte $a, b, c, d \ldots$ liegen auf einer geraden Linie, welche zu der Verbindungslinie der Pole, d. h. zu $O\,O'$ parallel iſt.

Nach der Erklärung des Seilpolygons iſt $K_1 = \alpha\beta$ im erſten Seilpolygon in zwei Seitenkräfte S_1 und S_2 zerlegt, deren Gröſse und Richtung ſich im Kraftpolygon zu bezw. αO und $O\beta$ ergiebt; dieſelbe Kraft iſt im zweiten Seilpolygon in zwei Seitenkräfte S_1' und S_2' zerlegt, deren Gröſse und Richtung bezw. $\alpha O'$ und $O'\beta$ iſt. Denkt man nun den Sinn der beiden Seitenkräfte S_1' und S_2' umgekehrt, ſo ſind dieſe beiden Kräfte die Seitenkräfte einer Kraft K_1, welche mit der gegebenen Kraft K_1 nach Gröſse und Richtung genau übereinſtimmt, deren Sinn aber demjenigen der gegebenen gerade entgegengeſetzt iſt. Dieſe neue Kraft K_1 muſs ſich alſo mit der gegebenen Kraft K_1 im Gleichgewicht halten; folglich müſſen auch die vier Seitenkräfte dieſer beiden Kräfte K_1 im Gleichgewicht ſein. Verbindet man S_1 und S_1' zu einer, S_2 und S_2' zur anderen Mittelkraft, ſo geht die erſtere durch den Schnittpunkt a dieſer beiden Kräfte, die zweite durch den Schnittpunkt b der beiden Kräfte S_2 und S_2'. Beide Mittelkräfte halten