Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

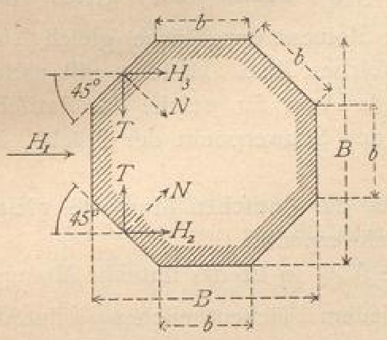
1) Schwerpunkte von ebenen Figuren

urn:nbn:de:hbz:466:1-77733

Die Kraft H liegt in der lothrechten Ebene der Axe XX und greift in halber Höhe des Cylinders an.

c) Winddruck gegen ein regelmäfsiges achtfeitiges Prisma (Fig. 25). Die Breite des umfchriebenen Quadrates fei B, die Seitenlänge der achteckigen Grundfläche fei b; dann ift $b = 0,414\ B$. Der Winddruck gegen die fenkrecht getroffene Fläche ift für die Längeneinheit der Höhe

Fig. 25.



$$H_1 = p\,b,$$

derjenige gegen die unter 45 Grad getroffenen Seitenflächen je

$$N = p\,b \sin 45^0,$$

und die in die Windrichtung fallende Seitenkraft von N ift

$$H_2 = p\,b \sin^2 45^0 = \frac{p\,b}{2}.$$

Eben fo grofs ift H_3; mithin wird die gefammte Kraft, welche ein Umfturz-Moment erzeugt, für das fteigende Meter fein

$$H = H_1 + H_2 + H_3 = 2\,p\,b.$$

Die Mittelkraft aller H greift, wie oben, in halber Höhe des Prismas an und liegt in der durch die Axe des Prismas und H_1 beftimmten lothrechten Ebene.

Die bisher ganz allgemein und auch in vorftehenden Entwickelungen gemachte Annahme einer gleichmäfsigen Vertheilung des Winddruckes über eine getroffene ebene Fläche fcheint nach den neueren Verfuchen und theoretifchen Ermittelungen nicht ganz richtig zu fein; demnach ift auch nicht ohne Weiteres richtig, dafs die Mittelkraft durch den Schwerpunkt der getroffenen Fläche geht. Es fcheint, dafs der Druck an den Rändern am kleinften ift und nach der Mitte der Ebene hin zunimmt. Bis über die Gefetzmäfsigkeit genauere Angaben vorliegen, wird man jedoch für die Zwecke des Hochbaues unbedenklich die vorgeführten Annahmen den Berechnungen zu Grunde legen können.

b) Schwerpunkte und ftatifche Momente.

1) Schwerpunkte von ebenen Figuren.

Um den Schwerpunkt einer beliebigen ebenen Figur zu finden, genügt es, zwei Linien zu beftimmen, auf deren jeder der Schwerpunkt liegen mufs; alsdann ift der Schnittpunkt beider Linien der gefuchte Schwerpunkt. Werden in der Ebene, in welcher die betreffende Figur liegt, zwei Coordinaten-Axen OX und OY beliebig angenommen, fo erhält man die Abftände x_0 und y_0 des Schwerpunktes von den beiden Axen OY und OX aus den Gleichungen 32. Grund-gleichungen.

$$x_0 = \int \frac{x\,df}{F} \quad \text{und} \quad y_0 = \int \frac{y\,df}{F}, \qquad \ldots \ldots \quad 10.$$

in denen F die ganze Querfchnittsfläche, df den Flächeninhalt eines beliebigen Theilchens mit den Coordinaten x und y bedeutet und die Summirung über die ganze Fläche auszudehnen ift. Die vorftehenden beiden Gleichungen können hier als aus der Mechanik bekannt vorausgefetzt werden. Man kann ftatt der unendlich kleinen Theilchen df Flächentheile f von endlicher Gröfse einführen, alfo die obigen Gleichungen fchreiben:

$$x_0 = \frac{\Sigma\,(f\,x)}{F} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{\Sigma\,(f\,y)}{F}, \qquad \ldots \ldots \quad 11.$$

wenn x und y die Schwerpunkts-Coordinaten der Flächentheile f bedeuten.

Die Zähler der Gleichungen nennt man die ftatifchen Momente der Fläche, bezogen auf die Y- und X-Axe; denn denkt man in jedem Theile der Fläche den Inhalt deffelben als Kraft fenkrecht zur Ebene der Figur wirkend, fo find die ftatifchen Momente diefer Kräfte für die beiden Axen eben die Zählergröfsen obiger Gleichungen.

33. Folgerungen.

Aus den Schwerpunktsgleichungen folgt:

α) x_0 wird gleich Null, wenn der Zähler $\Sigma\ (fx)$, bezw. $\int x\,df$ gleich Null wird, d. h. für eine Axe, für welche das ftatifche Moment der Fläche gleich Null wird. Der Schwerpunkt liegt demnach auf einer folchen Axe. Daffelbe gilt natürlich für y_0, fo dafs man allgemein fagen kann: Jede Axe, für welche das ftatifche Moment einer Fläche gleich Null ift, geht durch den Schwerpunkt der Fläche, ift alfo, wie man fagt, eine Schwerpunktsaxe.

Man fuche daher zwei Axen auf, für welche die ftatifchen Momente gleich Null find; alsdann ift ihr Schnittpunkt auch der Schwerpunkt.

β) Liegt eine Figur fymmetrifch zu einer Axe XX, fo ift das ftatifche Moment $\int y\,df$ der Figur für diefe Axe gleich Null; denn jedem Flächentheilchen f_1 im Abftande y_1 von der Axe entfpricht ein eben fo grofses Theilchen f_1 im Abftand $-y_1$ von der Axe; der Beitrag beider Theile zum ftatifchen Momente ift alfo $f_1 y_1 - f_1 y_1 = 0$. Das Gleiche gilt von je zwei anderen Theilen, fo dafs alfo das gefammte ftatifche Moment gleich Null wird. Daraus folgt: Jede Symmetrie-Axe einer Fläche ift eine Schwerpunktsaxe.

Hat fonach ein Querfchnitt eine Symmetrie-Axe, fo ift nur noch die Lage des Schwerpunktes auf derfelben zu beftimmen; hat ein Querfchnitt zwei Symmetrie-Axen, fo ift der Schnittpunkt beider auch der Schwerpunkt.

γ) Nach Gleichung 10 ift $Fx_0 = \int x\,df$. Ift es möglich, die ganze Fläche in eine Anzahl Gruppen $F_1, F_2, F_3 \ldots$ zu zerlegen, von deren jeder der Schwerpunktsabftand ($x_1, x_2, x_3 \ldots$) bekannt ift, fo mufs für diefe fein

$$F_1 x_1 = \left(\int x\,df_1\right), \quad F_2 x_2 = \left(\int x\,df_2\right), \quad F_3 x_3 = \left(\int x\,df_3\right), \quad . \quad 12.$$

in welchen Ausdrücken fich die Einzelintegrale auf die einzelnen Gruppen beziehen. Dann ift fonach

$$F x_0 = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \ldots + F_n x_n ,$$

und es wird

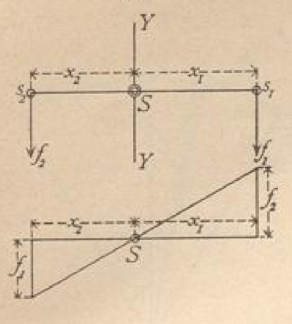
$$x_0 = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \ldots + F_n x_n}{F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13.$$

Es ift fehr oft möglich, die gegebene Figur in Rechtecke, bezw. folche kleinere Figuren zu zerlegen, deren Schwerpunkte bekannt find und alsdann mit Hilfe obiger Formel die Lage des Gefammtfchwerpunktes zu finden.

δ) Der Schwerpunkt S zweier Flächen F_1 und F_2 (Fig. 26) mit den Schwerpunkten s_1 und s_2 liegt auf der Verbindungslinie $s_1 s_2$ beider Schwerpunkte. Nennt man nämlich den Abftand des Gefammtfchwerpunktes von diefer Verbindungslinie y_0, fo ift $Fy_0 = F_1 y_1 + F_2 y_2$. Die Abftände y_1 und y_2 der beiden Schwerpunkte s_1 und s_2 von derfelben Axe find aber gleich Null, weil die Axe durch diefe Schwerpunkte gelegt ift. Demnach ift für diefe Axe $Fy_0 = 0$, alfo auch $y_0 = 0$.

Hieraus folgt weiter, dafs, wenn die Schwerpunkte noch weiterer Flächen auf

Fig. 26.



dieser Linie liegen, der Gesammtschwerpunkt gleichfalls auf derselben liegt; kann man also eine Fläche in eine Anzahl Streifen zerlegen, deren Schwerpunkte auf einer geraden Linie liegen, so befindet sich auch der Schwerpunkt der gesammten Fläche auf dieser Linie.

Die Lage des Schwerpunktes auf der Linie $s_1 s_2$ (Fig. 26) ist leicht zu finden. Werden die Abstände desselben von s_1 und s_2 mit bezw. $+x_1$ und $-x_2$ bezeichnet, so muss für eine senkrecht zu $s_1 s_2$ durch den Schwerpunkt S gelegte Axe YY sein

$$0 = f_1 x_1 - f_2 x_2 \quad \text{oder} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{f_2}{f_1}.$$

Daraus ergiebt sich die nachfolgende Construction.

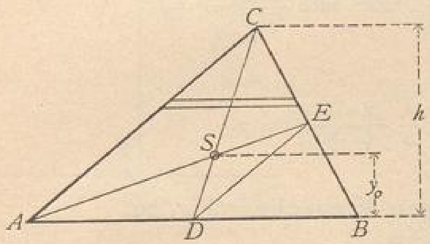
Man errichte in s_1 eine Senkrechte, welche f_2 Flächeneinheiten in beliebigem Maßstabe enthält, in s_2 eine Senkrechte, jedoch nach entgegengesetzter Seite, welche f_1 Flächeneinheiten in demselben Maßstabe enthält, und verbinde die Endpunkte; alsdann schneidet diese Verbindungslinie die Axe $s_1 s_2$ im Schwerpunkte S.

2) Schwerpunkte von einfachen Figuren.

α) Schwerpunkt eines Quadrates, Rechteckes, Parallelogrammes, Kreises und einer Ellipse. Jede dieser Figuren hat wenigstens zwei Symmetrie-Axen, bezw. Halbirungslinien, in deren Schnittpunkt der Schwerpunkt sich befindet. 34. Regelmäßige Figuren.

Demnach liegt er beim Rechteck und Quadrat in der Mitte der Höhe und Breite, beim Parallelogramm im Schnittpunkte der Halbirungslinien der Seiten und beim Kreise und bei der Ellipse im Mittelpunkte.

Fig. 27.



β) Schwerpunkt eines Dreieckes (Fig. 27). 35. Dreieck.

Zerlegt man die Dreiecksfläche durch Linien, welche einer Seite (AB in Fig. 27) parallel sind, in eine Anzahl sehr schmaler Streifen, so liegt der Schwerpunkt eines jeden Streifens in der Mitte seiner Breite, und nach der Folgerung unter δ in Art. 33 liegt der Gesammtschwerpunkt auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte aller Streifen. Der Schwerpunkt liegt also auf der Linie CD, welche die Mitte D einer Dreieckseite mit der gegenüber liegenden Ecke (C) verbindet. Aus demselben Grunde liegt er auch auf der Linie AE, wenn $CE = EB$ ist. Der Schwerpunkt S ist der Schnittpunkt beider. Da aber DE und AC parallel sind, so ist

$$\frac{\overline{DS}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CA}} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \overline{DS} = \frac{\overline{SC}}{2} = \frac{\overline{CD}}{3}.$$

Daraus folgt, dass der senkrechte Abstand des Schwerpunktes S von der Grundlinie AB des Dreieckes ein Drittel der Höhe ist, d. h. es ist

$$y_0 = \frac{h}{3}.$$

Da jede Seite des Dreieckes als Grundlinie angesehen werden kann, so liegt S auch auf einer Parallelen zu BC, deren senkrechter Abstand ein Drittel desjenigen beträgt, in welchem A von BC liegt. Das Gleiche gilt von AC, bezw. B. Mittels dieses Gesetzes können daher leicht zwei Linien gezeichnet werden, auf denen der Schwerpunkt liegt.

γ) Schwerpunkt eines Parallel-Trapezes (Fig. 28). 36. Parallel-Trapez.

Der Schwerpunkt des Trapezes in Fig. 28 liegt auf der Verbindungslinie der beiden Punkte E und F, welche die beiden parallelen Seiten halbiren. Ferner ist

$$F y_0 = \int y \, df.$$