Die Statik der Hochbau-Constructionen

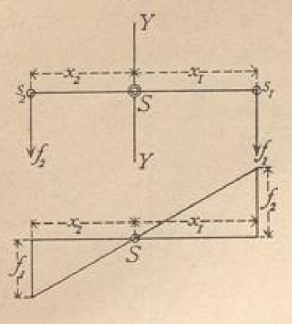
Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

2) Schwerpunkte der einfachen Figuren

urn:nbn:de:hbz:466:1-77733

Fig. 26.



dieser Linie liegen, der Gesammtschwerpunkt gleichfalls auf derselben liegt; kann man also eine Fläche in eine Anzahl Streifen zerlegen, deren Schwerpunkte auf einer geraden Linie liegen, so befindet sich auch der Schwerpunkt der gesammten Fläche auf dieser Linie.

Die Lage des Schwerpunktes auf der Linie $s_1 s_2$ (Fig. 26) ist leicht zu finden. Werden die Abstände desselben von s_1 und s_2 mit bezw. $+x_1$ und $-x_2$ bezeichnet, so muss für eine senkrecht zu $s_1 s_2$ durch den Schwerpunkt S gelegte Axe YY sein

$$0 = f_1 x_1 - f_2 x_2 \quad \text{oder} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{f_2}{f_1}.$$

Daraus ergiebt sich die nachfolgende Construction.

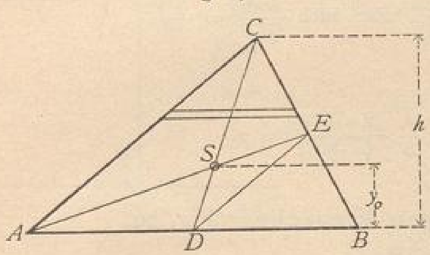
Man errichte in s_1 eine Senkrechte, welche f_2 Flächeneinheiten in beliebigem Mafsstabe enthält, in s_2 eine Senkrechte, jedoch nach entgegengesetzter Seite, welche f_1 Flächeneinheiten in demselben Mafsstabe enthält, und verbinde die Endpunkte; alsdann schneidet diese Verbindungslinie die Axe $s_1 s_2$ im Schwerpunkte S.

2) Schwerpunkte von einfachen Figuren.

α) Schwerpunkt eines Quadrates, Rechteckes, Parallelogrammes, Kreises und einer Ellipse. Jede dieser Figuren hat wenigstens zwei Symmetrie-Axen, bezw. Halbirungslinien, in deren Schnittpunkt der Schwerpunkt sich befindet. 34 Regelmäfsige Figuren.

Demnach liegt er beim Rechteck und Quadrat in der Mitte der Höhe und Breite, beim Parallelogramm im Schnittpunkte der Halbirungslinien der Seiten und beim Kreise und bei der Ellipse im Mittelpunkte.

Fig. 27.



β) Schwerpunkt eines Dreieckes (Fig. 27). 35. Dreieck.

Zerlegt man die Dreiecksfläche durch Linien, welche einer Seite (AB in Fig. 27) parallel sind, in eine Anzahl sehr schmaler Streifen, so liegt der Schwerpunkt eines jeden Streifens in der Mitte seiner Breite, und nach der Folgerung unter δ in Art. 33 liegt der Gesammtschwerpunkt auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte aller Streifen. Der Schwerpunkt liegt also auf der Linie CD, welche die Mitte D einer Dreieckseite mit der gegenüber liegenden Ecke (C) verbindet. Aus demselben Grunde liegt er auch auf der Linie AE, wenn $CE = EB$ ist. Der Schwerpunkt S ist der Schnittpunkt beider. Da aber DE und AC parallel sind, so ist

$$\frac{\overline{DS}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CA}} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \overline{DS} = \frac{\overline{SC}}{2} = \frac{\overline{CD}}{3}.$$

Daraus folgt, dafs der senkrechte Abstand des Schwerpunktes S von der Grundlinie AB des Dreieckes ein Drittel der Höhe ist, d. h. es ist

$$y_0 = \frac{h}{3}.$$

Da jede Seite des Dreieckes als Grundlinie angesehen werden kann, so liegt S auch auf einer Parallelen zu BC, deren senkrechter Abstand ein Drittel desjenigen beträgt, in welchem A von BC liegt. Das Gleiche gilt von AC, bezw. B. Mittels dieses Gesetzes können daher leicht zwei Linien gezeichnet werden, auf denen der Schwerpunkt liegt.

γ) Schwerpunkt eines Parallel-Trapezes (Fig. 28). 36. Parallel-Trapez.

Der Schwerpunkt des Trapezes in Fig. 28 liegt auf der Verbindungslinie der beiden Punkte E und F, welche die beiden parallelen Seiten halbiren. Ferner ist

$$F y_0 = \int y \, df.$$

Nennt man die Breite eines Streifens z und feine Höhe dy, fo ift

$$df = z\,dy, \quad z = b - \frac{b-a}{h}\,y \quad \text{und} \quad F = (a+b)\,\frac{h}{2};$$

fonach

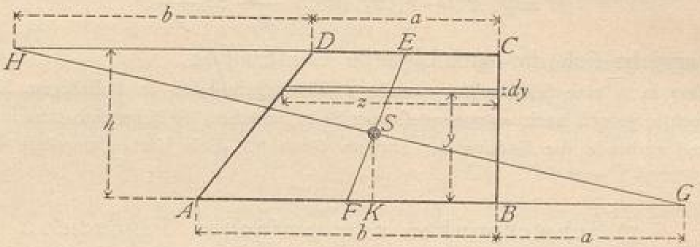
$$F y_0 = \int_0^h \left(b y - \frac{b-a}{h}\,y^2\right) dy = \frac{b h^2}{2} - \frac{(b-a)}{h}\,\frac{h^3}{3},$$

und

$$y_0 = \frac{h}{3}\,\frac{(2a+b)}{(a+b)}.$$

Daraus ergiebt fich die folgende Conftruction.

Fig. 28.



Man halbire die beiden parallelen Seiten in E und F, trage $BG = a$ und $DH = b$ nach rechts, bezw. links in den Verlängerungen der beiden parallelen Seiten auf und ziehe HG; alsdann ift der Schnittpunkt von HG mit EF der Schwerpunkt S. Denn es ift

$$\frac{\overline{SF}}{\overline{EF}} = \frac{a + \frac{b}{2}}{a + \frac{b}{2} + b + \frac{a}{2}} = \frac{2a+b}{3(a+b)}, \quad \text{aber auch} \quad \frac{SF}{EF} = \frac{\overline{SK}}{h}$$

mithin ift

$$\frac{\overline{SK}}{h} = \frac{2a+b}{3(a+b)} \quad \text{und} \quad \overline{SK} = \frac{h}{3}\,\frac{(2a+b)}{(a+b)} = y_0.$$

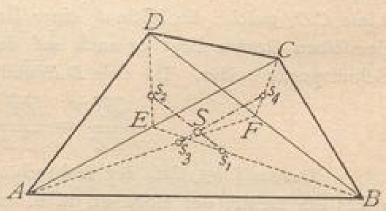
Der Punkt S ift alfo in der That der Schwerpunkt.

37. Unregelmäfsiges Viereck.

δ) Schwerpunkt eines unregelmäfsigen Viereckes (Fig. 29).

Um den Schwerpunkt des unregelmäfsigen Viereckes $ABCD$ zu beftimmen, ziehe man die Gerade AC und ermittele die Schwerpunkte s_1 und s_2 der beiden Dreiecke ACB und ACD, wie unter β gezeigt; alsdann liegt der Gefammtfchwerpunkt auf der Linie $s_1 s_2$. Nun ziehe man BD und ermittele die Schwerpunkte s_3 und s_4 der beiden Dreiecke ABD und BCD; alsdann liegt der Gefammtfchwerpunkt auch auf der Linie $s_3 s_4$. Demnach ift der Schnittpunkt der beiden Linien $s_1 s_2$ und $s_3 s_4$ der gefuchte Schwerpunkt.

Fig. 29.



In ganz ähnlicher Weife kann man weiter verfahren, wenn es fich um den Schwerpunkt eines Vieleckes handelt, welches in Dreiecke zerlegt werden kann. Doch wird in einem folchen Falle vielfach das unten vorzuführende graphifche Verfahren bequemer fein.

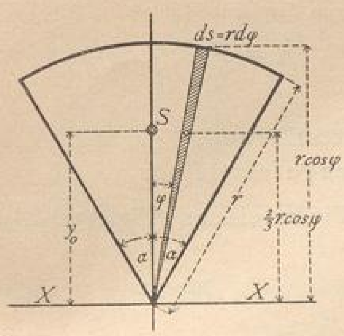
38. Kreisausfchnitt.

ε) Schwerpunkt eines Kreisausfchnittes (Fig. 30).

Der ganze zum Kreisausfchnitt gehörige Winkel fei 2α; die Halbirungslinie des Winkels ift eine Symmetrie-Axe, enthält alfo den Schwerpunkt; fomit ift nur noch der Abftand deffelben vom Kreismittelpunkte oder, was daffelbe befagt, von einer durch diefen fenkrecht zur Winkelhalbirenden gelegten Axe XX zu fuchen.

Für den zu einem Bogenftück $ds = r\,d\varphi$ gehörigen Theil des Ausfchnittes (Fig. 30), welcher als

Fig. 30.



Dreieck aufgefafft werden kann, ift der Schwerpunktsabftand von der Axe XX: $y = \frac{2}{3} r \cos \varphi$, der Flächeninhalt

$$df = ds \frac{r}{2} = \frac{r^2 d\varphi}{2};$$

mithin ift

$$y_0 = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} y\, df}{F} = \frac{2 \int_o^\alpha y\, df}{F} = \frac{\frac{2}{3} r^3 \int_o^\alpha \cos \varphi\, d\varphi}{r^2 \alpha}$$

$$y_0 = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14.$$

Für den Halbkreis wird $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\sin \alpha = 1$, fonach

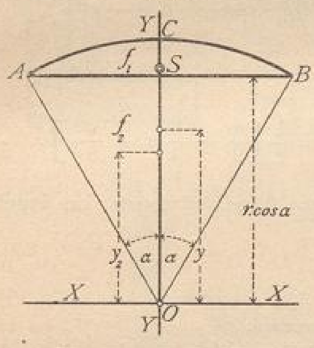
$$y_0 = \frac{4r}{3\pi} = 0{,}425\, r.$$

Für den Viertelkreis ift $\alpha = \frac{\pi}{4}$, daher $y_0 = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} r = 0{,}6\, r$.

Für den Sechftelkreis ift $\alpha = \frac{\pi}{6}$, mithin $y_0 = \frac{2}{\pi} r = 0{,}637\, r$.

ζ) Schwerpunkt eines Kreisabfchnittes (Fig. 31). 39. Kreisabfchnitt.

Fig. 31.



Der Schwerpunkt des Kreisabfchnittes liegt zunächft wieder auf der Winkelhalbirenden; ferner ift aber nach der Folgerung δ in Art. 33 (S. 26), wenn F der Flächeninhalt des Kreisausfchnittes $ACBO$, y der Abftand des Schwerpunktes diefer Fläche von XX ift, wenn ferner f_1 und f_2 die Flächeninhalte des Kreisabfchnittes ACB, bezw. des Dreieckes ABO und y_1, bezw. y_2 die Schwerpunktsabftände diefer Flächen von XX find,

$$Fy = f_1 y_1 + f_2 y_2 \quad \text{oder} \quad y_1 = \frac{Fy - f_2 y_2}{f_1}.$$

Nun ift $F = r^2 \alpha$, $y = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ und $f_2 = r^2 \sin \alpha \cos \alpha$; ferner

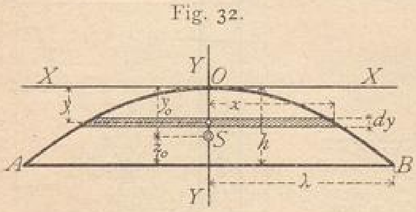
$$y_2 = \frac{2}{3} r \cos \alpha \quad \text{und} \quad f_1 = r^2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha);$$

mithin wird

$$y_1 = \frac{\frac{2}{3} r \sin^3 \alpha}{\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 15.$$

η) Schwerpunkt einer Parabelfläche (Fig. 32). 40. Parabelfläche

Fig. 32.



Die Gleichung der Parabel AOB, bezogen auf O als Anfangspunkt der Coordinaten-Axen, ift

$$\frac{x^2}{\lambda^2} = \frac{y}{h}.$$

Der Schwerpunkt der Fläche AOB liegt zunächft auf der Symmetrie-Axe YY; der Abftand deffelben von XX ift

$$y_0 = \frac{\int y\, df}{F} = \frac{\int y\, df}{\int df}.$$

Es ift $df = 2x\, dy$, $y = \frac{h x^2}{\lambda^2}$ und $dy = \frac{2xh}{\lambda^2} dx$, alfo $df = \frac{4x^2 h}{\lambda^2} dx$, fomit

$$y_0 = \frac{\frac{4h^2}{\lambda^4} \int_o^\lambda x^4 dx}{\frac{4h}{\lambda^2} \int_o^\lambda x^2 dx} = \frac{h}{\lambda^2} \frac{3}{5} \lambda^2 = \frac{3}{5} h.$$

Der Schwerpunkt liegt alfo vom Scheitel O um

$$y_0 = \frac{3}{5} h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16.$$

entfernt.

von der Linie AB um

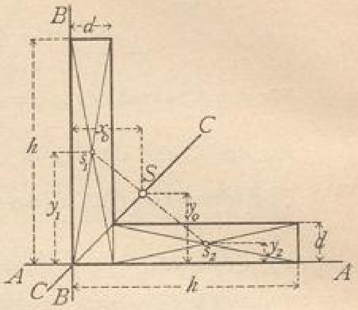
$$z_0 = \frac{2}{5} h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17.$$

3) Schwerpunkte von Querfchnittsflächen, die aus einfachen Figuren zufammengefetzt find.

41. Gleichfchenkeliges Winkeleifen.

α) Schwerpunkt des gleichfchenkeligen Winkeleifens (Fig. 33). Auf die Ausrundung im Winkel und die Abrundung der Ecken foll keine Rückficht genommen werden; diefelbe kann fowohl bei diefer, wie bei den folgenden Querfchnittsformen meiftens unbeachtet gelaffen werden.

Fig. 33.



Der Abftand des Schwerpunktes S von AA, bezw. BB ift

$$y_0 = x_0 = \frac{\Sigma(fy)}{F} = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2}{f_1 + f_2}.$$

Hierin ift f_1 der Flächeninhalt des lothrecht, f_2 derjenige des wagrecht gezeichneten Schenkels, bei letzterem nach Abzug des Flächentheiles, der mit dem lothrechten Schenkel zufammenfällt; y_1 und y_2 find die Abftände der Schwerpunkte von AA.

Eine angenäherte, faft ftets genügend genaue Formel wird folgendermafsen gefunden[13]. Es ift

$$y_0 = \frac{\frac{dh \cdot h}{2} + (h-d)\, d\, \frac{d}{2}}{2\,dh - d^2} = \frac{h^2 + (h-d)\, d}{2\,(2h-d)} = \frac{h^2 + hd - d^2}{2\,(2h-d)} = \frac{1}{2}\left[\frac{h}{2} + \frac{3}{4}\, d - \frac{d^2}{8h}\right].$$

Innerhalb der für $\frac{d}{h}$ vorkommenden Grenzen liegt $\frac{d^2}{2 \cdot 8h}$ zwifchen $0{,}0125$ und $0{,}00625$, hat fonach etwa den Mittelwerth $0{,}009$. Wird diefer eingeführt, fo erhält man

$$y_0 = x_0 = \frac{h}{4} + 0{,}366\, d.$$

Sehr leicht kann der Schwerpunkt durch Conftruction gefunden werden.

Man zerlege den Querfchnitt in zwei Rechtecke, ermittele ihre Schwerpunkte s_1 und s_2, die nach Art. 33 (unter δ) die Schnittpunkte der Diagonalen find; dann liegt der Gefammtfchwerpunkt auf der Linie $s_1 s_2$; da er auch auf der Symmetrie-Axe CC liegt, fo ift der Schnittpunkt S der genannten beiden Linien der gefuchte Schwerpunkt.

Beifpiel. Es fei die Schenkellänge $h = 10$ cm und die Dicke $d = 1$ cm; alsdann ift $f_1 = 10$ qcm, $f_2 = 9$ qcm, $y_1 = 5$ cm und $y_2 = 0{,}5$ cm; fonach

$$y_0 = \frac{10 \cdot 5 + 9 \cdot 0{,}5}{10 + 9} = 2{,}87 \text{ cm} = x_0.$$

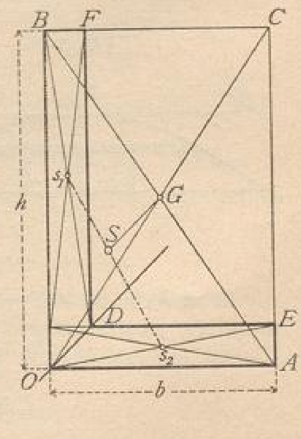
Die angenäherte Formel giebt

$$y_0 = 2{,}5 + 0{,}366 = 2{,}866 \text{ cm} = x_0.$$

42. Ungleichfchenkeliges Winkeleifen.

β) Schwerpunkt des ungleichfchenkeligen Winkeleifens (Fig. 34).

Fig. 34.



Hier ift keine Symmetrie-Axe vorhanden; man mufs alfo x_0 und y_0 getrennt berechnen. Es ift

$$x_0 = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2}{f_1 + f_2} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2}{f_1 + f_2}.$$

Die Conftruction des Schwerpunktes ift in ähnlicher Weife möglich, wie unter α[13]. Man ermittelt zunächft s_1 und s_2, wie oben; alsdann liegt der Gefammtfchwerpunkt auf $s_1 s_2$. Der Querfchnitt kann

[13] Siehe: ZIMMERMANN. Ueber Winkeleifen-Querfchnitte. Centralbl. d. Bauverw. 1885, S. 33.