



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

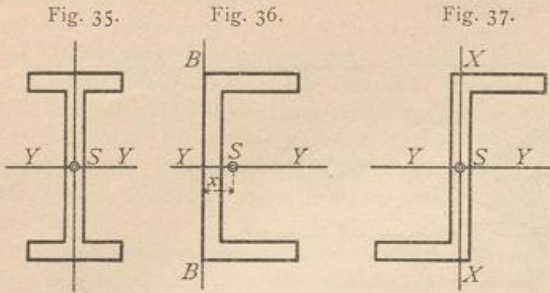
Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

4) Graphische Ermittlung der statischen Momente und der Schwerpunkte
von Flächen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77733](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77733)



Parallele zu OD ; alsdann ist der Schnittpunkt dieser mit $s_1 s_2$ der gefuchte Schwerpunkt.

Fig. 38.

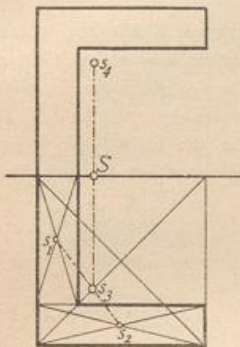


Fig. 39.

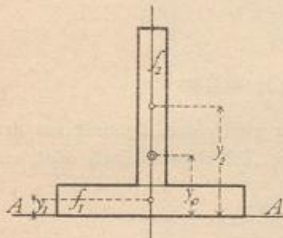
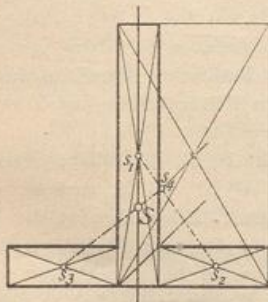


Fig. 40.



Abstände der Schwerpunkte derselben von der Axe XX bzw. $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$; alsdann ist das statische Moment der ganzen Fläche nach Obigem

$$M = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + \dots + f_n y_n.$$

ferner als Differenz der beiden Rechtecke $OACB$ und $DECF$ betrachtet werden; der Schwerpunkt liegt also auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte dieser beiden Rechtecke; da diese Schwerpunkte jedoch sehr nahe zusammenfallen, so ergibt sich die Richtung der Verbindungslinie nicht genügend genau. Nun muß aber die Verbindungslinie zur Linie OD parallel sein; man ziehe also durch den Schwerpunkt G des umschriebenen Rechteckes $OACB$ die

γ) Schwerpunkt des I-Eisens (Fig. 35).

Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt beider Symmetrie-Axen.

δ) Schwerpunkt des C-Eisens (Fig. 36 u. 38).

Der Schwerpunkt liegt auf der wagrechten Symmetrie-Axe im Abstände x_0 von BB ; x_0 ist nach obiger Gleichung aufzufinden, durch Construction wie folgt. Die wagrechte Symmetrie-Axe theilt das C-Eisen in zwei Theile, deren jeder einen Winkeleisen-Querschnitt darstellt. Man ermittelt ihre Schwerpunkte s_3 und s_4 ; wie eben gezeigt wurde, ist der Gesamtschwerpunkt der Schnittpunkt der Linie $s_3 s_4$ mit der Symmetrie-Axe.

ε) Schwerpunkt des Z-Eisens (Fig. 37).

Der Schwerpunkt fällt mit demjenigen des lothrechten Rechteckes, des sog. Steges, zusammen; denn fowohl für die Axe XX , wie für die Axe YY ist das statische Moment der beiden wagrechten Rechtecke zusammen gleich Null; dieselben sind also ohne Einfluß auf die Schwerpunktlage. Dabei ist vorausgesetzt, daß dieselben gleichen Flächeninhalt haben.

ζ) Schwerpunkt des T-Eisens (Fig. 39 u. 40).

Der Schwerpunkt liegt auf der Symmetrie-Axe im Abstände y_0 von der Axe AA , und es ist

$$y_0 = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2}{f_1 + f_2}.$$

Durch Construction ist derselbe folgendermaßen zu finden. Man zerlege den Querschnitt in drei Rechtecke, ein lothrecht und zwei wagrechte. Die Schwerpunkte seien s_1, s_2, s_3 . Das lothrechte und das eine wagrechte Rechteck bilden zusammen einen Winkeleisenquerschnitt, dessen Schwerpunkt s_4 , wie unter β angegeben, zu finden ist. Dann liegt der Gesamtschwerpunkt auf der Linie $s_3 s_4$, ferner auch auf der lothrechten Symmetrie-Axe, also auf dem Schnittpunkt S dieser beiden Linien.

4) Graphische Ermittlung der statischen Momente und der Schwerpunkte von Flächen.

Wenn die Figur, deren statisches Moment, bzw. deren Schwerpunkt ermittelt werden soll, eine unregelmäßige Form hat, so ist die graphische Behandlung der Aufgabe zu empfehlen.

Man zerlege die ganze Figur in Streifen, welche derjenigen Axe parallel laufen, für welche das statische Moment gefucht wird (Fig. 41).

Es seien die Flächeninhalte der einzelnen Streifen $f_1, f_2, f_3 \dots f_n$, die

Abstände der Schwerpunkte derselben von der Axe XX bzw. $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$; alsdann ist das statische Moment der ganzen Fläche nach Obigem

$$M = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + \dots + f_n y_n.$$

43-
I-Eisen.

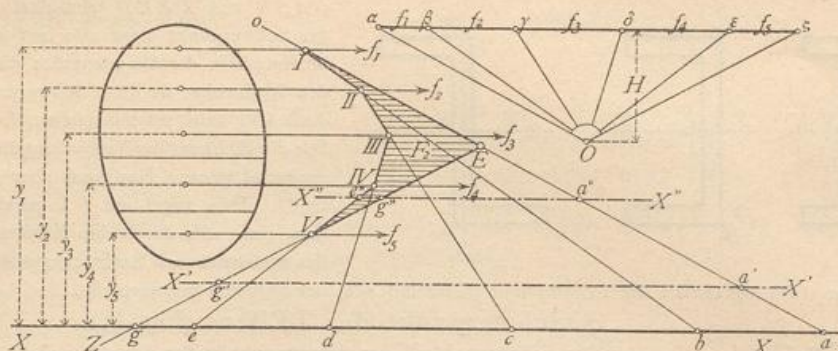
44-
C-Eisen.

45-
Z-Eisen.

46-
T-Eisen.

47-
Statisches
Moment.

Fig. 41.



Man führe nun die einzelnen Flächengrößen als parallel zur Axe XX wirkende Kräfte ein, welche in den Einzelschwerpunkten angreifen, füge sie zu einer Kraftlinie zusammen, indem man sie nach einem beliebigen, jedoch für alle gleichen Maßstabe aufrägt. Es sei $\alpha\beta = f_1$, $\beta\gamma = f_2$, $\gamma\delta = f_3 \dots$. Nun nehme man im Abstände H von dieser Kraftlinie einen Pol O an und konstruiere das den Werthen $f_1, f_2, f_3 \dots$ und diesem Pol entsprechende Seilpolygon $oI II III \dots$. Verlängert man die Seilpolygon-Seiten, welche die erste Kraft f_1 begrenzen, bis zum Schnitte mit der Axe XX , so erhält man ein Dreieck Iab , und es ist

$$\triangle Iab \sim \triangle O\alpha\beta,$$

da die Seiten dieser Dreiecke einander bzw. parallel sind; in Folge dessen ist

$$\frac{\overline{ab}}{y_1} = \frac{\overline{\alpha\beta}}{H} = \frac{f_1}{H}, \text{ d. h. } H \cdot \overline{ab} = f_1 y_1.$$

Der Abschnitt \overline{ab} der die Kraft f_1 begrenzenden Seilpolygon-Seiten auf der Axe XX multiplicirt mit dem Polabstand H giebt sonach das statische Moment von f_1 für diese Axe.

Eben so ist

$$\triangle IIbc \sim \triangle O\beta\gamma;$$

also

$$\frac{\overline{bc}}{y_2} = \frac{\overline{\beta\gamma}}{H} = \frac{f_2}{H}, \text{ } H \cdot \overline{bc} = f_2 y_2 \text{ und } H \cdot \overline{cd} = f_3 y_3 \text{ u. s. w.}$$

Das statische Moment der ganzen Fläche für die Axe XX ist daher gleich dem Product aus dem Stück ag , welches von den beiden äußersten Seilpolygon-Seiten auf der Axe XX abgechnitten wird, und dem Polabstand H , oder es ist

$$H \cdot \overline{ag} = \Sigma (f y).$$

Für die Anwendung ist zu beachten: Die Abschnitte $ab, bc, cd \dots$ auf der Axe XX liegen in den Dreiecken $Iab, IIbc$, bedeuten demnach Längen; die Werthe von H dagegen sind auf dieselbe Einheit zu beziehen, wie die Größen $f_1, f_2, f_3 \dots$, bedeuten also Flächen. Daher ist H auf dem Flächenmaßstabe, $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd} \dots$ hingegen sind auf dem Längenmaßstabe zu messen.

Beim Zerlegen der betreffenden Figur in parallele Streifen müssen dieselben so schmal gewählt werden, daß man mit genügender Genauigkeit die einzelnen Streifen als Rechtecke, Parallelogramme, Paralleltrapeze, überhaupt als solche einfache Figuren ansehen kann, deren Flächeninhalte und Schwerpunktlagen leicht bestimmt werden können.

Handelt es sich um das statische Moment der Fläche für die Axe $X'X'$, so ist dasselbe offenbar gleich $H \cdot \overline{a'g'}$. Rückt aber die Axe zwischen die Kräfte f , etwa nach $X''X''$, so ist zunächst das statische Moment der oberhalb liegenden Flächentheile gleich $H \cdot \overline{a''e''}$; im statischen Moment der gesammten Fläche ist aber auch der Beitrag der an der anderen Seite der Axe gelegenen Theile enthalten, welche einen negativen Beitrag liefern, weil die y -Werthe für dieselben von der Axe $X''X''$ aus nach unten gerechnet werden müssen; die von der Axe nach oben gerechneten Werthe der y sind ja positiv eingeführt. Demnach liefert hier f_5 ein statisches Moment gleich $-H \cdot \overline{g''e''}$, und daher ist das statische Moment der ganzen Fläche, bezogen auf die Axe $X''X''$, gleich $H \cdot \overline{a''g''}$.

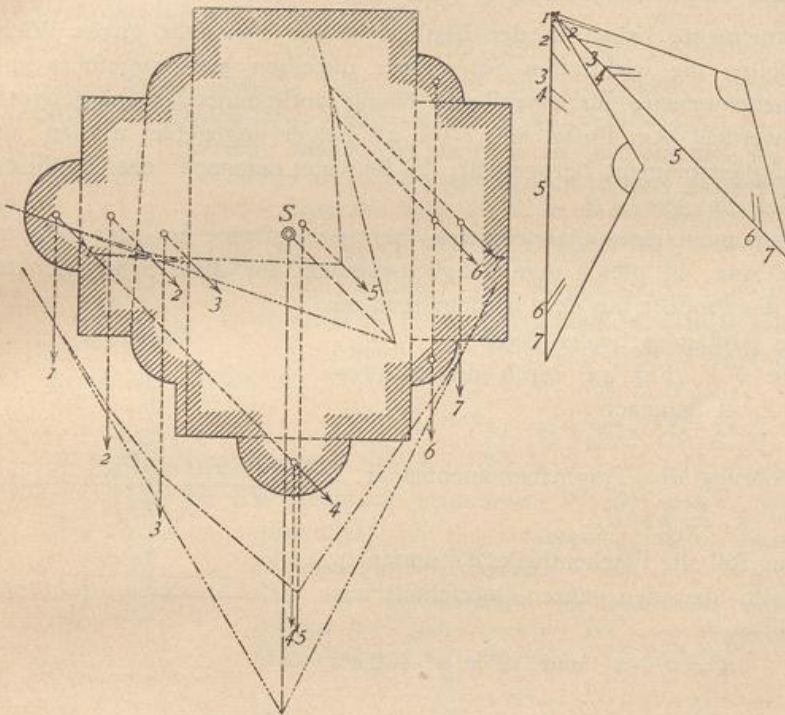
Demnach ist allgemein nachgewiesen: Das statische Moment einer Fläche F , bezogen auf eine Axe XX , wird erhalten, wenn man das von den beiden äußersten Seilpolygon-Seiten auf dieser Axe ab-

geschnittene Stück (ag , bzw. $a'g'$, $a''g''$) mit dem Polabstand H multiplicirt. Dabei muß das Stück ag auf dem Längenmaßstabe, der Polabstand H auf dem Flächenmaßstabe gemessen werden, nach welchem die Werthe von f aufgezeichnet sind.

Rückt die Axe XX weiter nach oben, so wird das von den äußersten Seilpolygon-Seiten auf derselben abgeschnittene Stück immer kleiner; geht die Axe durch den Schnittpunkt E der äußersten Seilpolygon-Seiten, so ist das abgeschnittene Stück gleich Null; also wird auch das statische Moment in Bezug auf diese Axe gleich Null; dieselbe ist also eine Schwerpunktsaxe. Hieraus folgt: Die durch den Schnittpunkt E der äußersten Seilpolygon-Seiten parallel zu XX gelegte Axe enthält den Schwerpunkt der Fläche.

Das soeben gefundene Ergebnis folgt auch mit Nothwendigkeit aus nachstehender Ueberlegung. Da die Flächen als Kräfte eingeführt sind, so kann man annehmen, diese Kräfte seien die Gewichte der einzelnen Theile einer an allen Stellen gleich starken Platte, welche dieselbe Form hat, wie die gegebene

Fig. 42.



Fläche, und in eben solche Theile getheilt ist, wie diese. Um die wirklichen Gewichte zu erhalten, braucht man nur alle Werthe f mit demselben Factor γ , dem Gewichte der Flächeneinheit, zu multipliciren. Da man aber die Platte aus beliebigem Material hergestellt und beliebig stark annehmen kann, so ist γ ganz beliebig, kann also auch gleich 1 gesetzt werden; die Werthe f können demnach auch als die Gewichte selbst angesehen werden. Die Mittelkraft aller dieser parallel gerichteten Kräfte geht demnach durch den Schwerpunkt der Fläche; sie geht aber auch durch den Schnittpunkt der äußersten Seilpolygon-Seiten und

ist der Richtung der anderen Kräfte parallel. Die durch diesen Schnittpunkt parallel zur Axe XX gezogene Linie ist also die Mittelkraft nach Richtung und Lage und geht durch den Schwerpunkt. Das Gleiche gilt von jeder anderen beliebigen Lage, welche für die Richtung der Axe, also auch der Kräfte angenommen wird. Man kann demnach leicht noch eine zweite Axe finden, auf welcher der Schwerpunkt liegt; der Schnittpunkt beider Axen ist dann der gesuchte Schwerpunkt.

Die gezeigte graphische Ermittlung des Schwerpunktes ist besonders bei unregelmäßigen Querschnitten empfehlenswerth; Fig. 42 zeigt diese Bestimmung für den Querschnitt eines Vierungspfeylers.

c) Trägheitsmomente und Centrifugalmomente.

Wird jedes Theilchen df einer Querschnittsfläche F mit dem Product uv seiner senkrecht genommenen Abstände von zwei Axen AA und BB multiplicirt (Fig. 43) und die Summe aller dieser Producte gezogen, so erhält man einen Ausdruck

$$\mathcal{F}_{AB} = \int uv df,$$