



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik der Hochbau-Constructions

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

d) Darstellung der Trägheits- und Centrifugalmomente mit Hilfe von
Kreisen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77733](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77733)

Nun ist $\int yz \, df = \mathcal{F}_{YZ}$, $\int df = F$, $\int z \, df = 0$ und $\int y \, df = 0$; die letzteren beiden Werthe ergeben sich, weil SY und SZ Schwerpunktsaxen sind (vergl. Art. 33, S. 26, unter α). Es wird somit

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = \mathcal{F}_{YZ} + F y_0 z_0 \dots \dots \dots 27.$$

Wenn die Schwerpunktsaxen Hauptaxen sind, so ist $\mathcal{F}_{YZ} = 0$, demnach

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = F y_0 z_0 \dots \dots \dots 28.$$

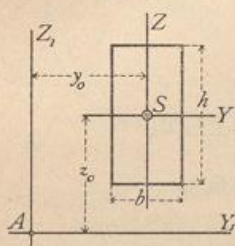
Diese Formel ist sehr bequem. Soll beispielsweise das Centrifugalmoment für die Axen AY_1 und AZ_1 (Fig. 64) und den Rechtecksquerschnitt ermittelt werden, dessen Seiten parallel zu den Axen sind, so lege man durch den Schwerpunkt zwei den ersteren bzw. parallele Axen SY und SZ ; alsdann wird

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = F y_0 z_0.$$

Fällt etwa A mit einer Ecke zusammen, so wird

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = \frac{b^2 h^2}{4}.$$

Fig. 64.



Beispiel. Es soll das Centrifugalmoment eines ungleichschenkeligen Winkelblechs (Fig. 65) für zwei durch seinen Schwerpunkt gelegte Axen ermittelt werden, welche den Winkelbleichschenkeln parallel sind.

Zerlegt man den Querschnitt in zwei Rechtecke, deren eines den ganzen lothrechten Schenkel enthält, deren anderes den wagrechten Schenkel nach Abzug des schon beim ersten mitberechneten Rechteckes in der Ecke bildet, und nennt man die Flächeninhalte F_1 und F_2 , so wie die Abstände der Einzelschwerpunkte von den Axen bzw. y_0', z_0', y_0'', z_0'' , so ist

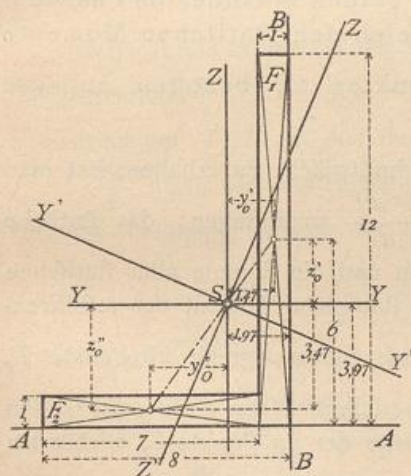
$$\mathcal{F}_{YZ} = F_1 y_0' z_0' + F_2 y_0'' z_0''.$$

Die Länge des großen und kleinen Schenkels sei bzw. 12 und 8 cm, die Stärke beider Schenkel 1,0 cm (Deutsches Normal-Profil Nr. 8/12) und der Abstand des Schwerpunktes von der äußeren Kante des langen, bzw. kurzen Schenkels 1,97 cm, bzw. 3,97 cm; alsdann ist

$$\mathcal{F}_{YZ} = 12 \cdot 1 \cdot 1,47 (6 - 3,97) + 7 \cdot 1 \cdot 3,47 (4,5 - 1,97) = 97,26 \text{ cm}^4.$$

Die Einheit, in welcher die Centrifugalmomente erhalten werden, ist dieselbe, wie bei den Trägheitsmomenten, und es wird auf das hierüber in Art. 57 (S. 37) Gefagte verwiesen. Besondere Aufmerksamkeit ist aber hier auf die Vorzeichen der Coordinaten y_0 und z_0 zu verwenden. In obigem Beispiel sind für das erste Rechteck beide positiv, für das zweite Rechteck beide negativ einzuführen; das Product ist hier also für jedes der Theilrechtecke positiv.

Fig. 65.



d) Darstellung der Trägheits- und Centrifugalmomente mit Hilfe von Kreisen.

Ein Flächentheilchen df hat für die beiden einander im Punkte P schneidenden Axen AA und BB das Centrifugalmoment $d\mathcal{F}_{AB} = uv \cdot df$, wenn u und v die senkrecht gemessenen Abstände des Theilchens df von den Axen bedeuten (Fig. 66). Bezeichnet man den Abstand desselben von dem Punkte P mit ρ , so wird $i_p = \rho^2 df$ das polare Trägheitsmoment von df für Punkt P genannt. Man lege durch P einen Kreis mit beliebigem Mittelpunkt M und beliebigem Halbmesser r , welcher die beiden Axen AA und BB ausser in P noch in den Punkten A'

65.
Grundlage.

und B' schneidet, verlängere die Linie df . P bis zum zweiten Schnittpunkte C' mit dem Kreise, ziehe die Sehne $B'A'$ und fälle von C' die Senkrechte $C'D'$ auf die Sehne $B'A'$; alsdann ergibt sich aus den Beziehungen zwischen Peripherie-, Tangenten- und Centriwinkeln

$$\begin{aligned} u &= \rho \sin \varphi_1, & v &= \rho \sin \varphi_2, \\ B'C' &= 2r \sin \varphi_2, & C'D' &= B'C' \sin \varphi_1, \\ \frac{C'D'}{C'D'} &= 2r \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2, \\ \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 &= \frac{C'D'}{2r}. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$d\mathcal{F}_{AB} = uv \cdot df = df \cdot \rho^2 \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 = \frac{\rho^2 df}{2r} \overline{C'D'},$$

und, wenn der Kreisdurchmesser mit d bezeichnet wird, ergibt sich

$$d\mathcal{F}_{AB} = \frac{\rho^2 df}{d} \overline{C'D'}$$

oder

$$d\mathcal{F}_{AB} = \frac{i_p}{d} \overline{C'D'}.$$

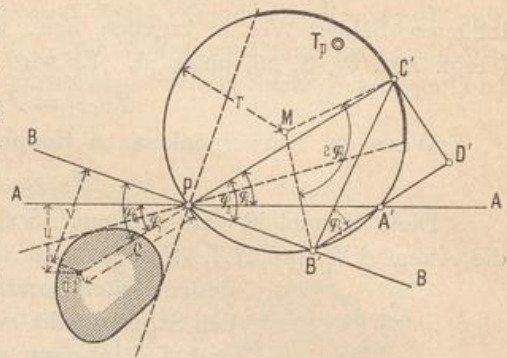
Das Centrifugalmoment von df für die beiden einander im Punkte P schneidenden Axen AA und BB ist also gleich dem statischen Momente des mit der Masse $\frac{i_p}{d}$ belasteten Kreispunktes C' , bezogen auf die Sehne $B'A'$ als Drehaxe.

Um das Centrifugalmoment der ganzen Querschnittsfläche zu erhalten, hat man in jedem Kreispunkte C' die betreffende Masse $\frac{\rho^2 df}{d}$ anzubringen, das statische Moment derselben für die Sehne $B'A'$ zu ermitteln und die Summe aller statischen Momente zu ziehen. Diese Summe ist gleich dem statischen Momente der resultierenden Masse, d. h. der Gesamtmasse $\int \frac{\rho^2 df}{d}$. Diese Summe greife im Punkte T_p an; alsdann folgt: Das Centrifugalmoment der Querschnittsfläche F für die beiden Axen AA und BB ist gleich dem statischen Momente der im Punkte T_p wirkenden Masse $\int \frac{\rho^2 df}{d}$ für die Sehne $B'A'$.

$\int \rho^2 df = \mathcal{F}_p$ ist das polare Trägheitsmoment der ganzen Querschnittsfläche für den Schnittpunkt P der Axen AA und BB . Man nennt den Punkt T_p den Trägheits-Hauptpunkt (auch wohl Trägheits-Schwerpunkt); den Punkt P heißt man den Pol.

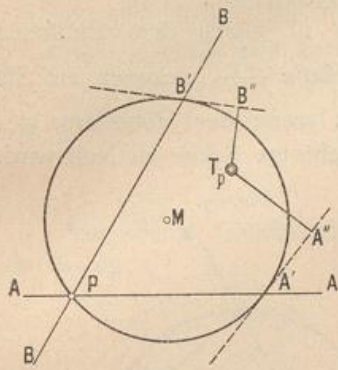
Fallen beide Axen zusammen, so geht das Centrifugalmoment in das Trägheitsmoment für die gemeinsame Axe über; die Sehne $B'A'$ wird alsdann zur Tangente in demjenigen Punkte, in welchem die gemeinsame Axe den Kreis zum zweiten Male schneidet. Demnach ist bewiesen:

Fig. 66.



Das Trägheitsmoment einer Fläche F für eine beliebige durch den Pol P gehende Axe BB ist gleich dem statischen Momente der im Trägheits-Hauptpunkte vereinigten Masse $\int \frac{\rho^2 df}{d}$, bezogen auf die Tangente im Punkte B' des Kreifes.

Fig. 67.



Demnach ist (Fig. 67)

$$\text{für Axe } AA: \mathcal{I}_A = \frac{\mathcal{I}_p}{d} T_p A'';$$

$$\text{für Axe } BB: \mathcal{I}_B = \frac{\mathcal{I}_p}{d} T_p B''.$$

Nach Annahme des Kreifes und des Punktes P (falls es sich um Trägheitsmomente handelt) sind die Massen $\frac{\rho^2 df}{d}$ ganz bestimmte, an bestimmten Kreispunkten wirkende Werthe; alsdann ist auch der Punkt T_p seiner Lage nach genau bestimmt. Aendern die Axen gleichfalls ihre Lage, so bleibt doch der Punkt T_p unverändert an seiner Stelle. Man kann das Ziehen der Tangenten vermeiden. Für die Axe AA ist (Fig. 68)

$$\mathcal{I}_A = \frac{\mathcal{I}_p}{d} \overline{T_p E}.$$

Man verbinde A' mit dem Mittelpunkte M des Kreifes, falle von T_p die Senkrechte auf MA' ; alsdann erhält man F als Fußpunkt dieser Senkrechten, und es ist

$$\overline{FA'} = \overline{T_p E}.$$

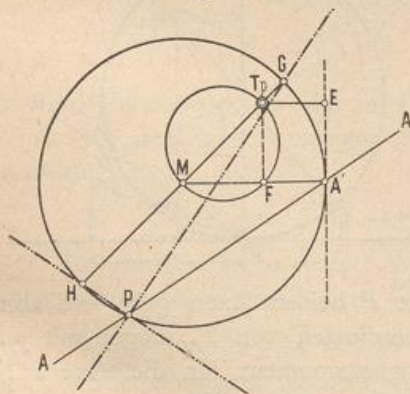
FA' ist die Projection des Strahles $T_p A'$ auf den Radius MA' ; mithin ist das Trägheitsmoment \mathcal{I}_A für die beliebige Axe AA gleich $\frac{\mathcal{I}_p}{d}$, multiplicirt mit der Projection von $T_p A'$ auf den durch A' gezogenen Kreisdurchmesser.

$\frac{\mathcal{I}_p}{d}$ ist für die verschiedenen Lagen der Axen unverändert; mithin verhalten sich die Trägheitsmomente für die verschiedenen durch P gelegten Axen wie die Werthe FA' . Das größte Trägheitsmoment wird sich also für diejenige Axe ergeben, für welche die Projection FA' den größtmöglichen Werth erreicht, das kleinste Trägheitsmoment für diejenige Axe, für welche die Projection FA' ihren kleinstmöglichen Werth hat. Verbindet man den Trägheits-Hauptpunkt T_p mit dem Mittelpunkt M des Kreifes, so schneidet dieser Durchmesser die Peripherie in den beiden Punkten G und H . Man sieht leicht, dass $T_p G$ der kleinste und $T_p H$ der größte mögliche Werth der Projection FA' ist; demnach wird

$$\mathcal{I}_{max} = \frac{\mathcal{I}_p}{d} \overline{T_p H} \text{ und } \mathcal{I}_{min} = \frac{\mathcal{I}_p}{d} \overline{T_p G}.$$

Die zugehörigen Axen sind PH , bzw. PG ; diese Axen sind in Art. 62 (S. 41) als Hauptaxen, die betreffenden Trägheitsmomente als Hauptträgheitsmomente bezeichnet worden; daher sind PH und PG die Hauptaxen.

Fig. 68.



66.
Größe des Trägheitsmomentes; Hauptaxen, Hauptträgheitsmomente.

Um die Haupttaxen zu erhalten, verlängere man demnach die Linie MT_p bis zu den Schnittpunkten G , bzw. H mit der Kreis-
peripherie und ziehe die Geraden PG und PH .

\overline{HG} ist ein Kreisdurchmesser; daher ist der Winkel HPG ein rechter Winkel, d. h. die Haupttaxen stehen auf einander senkrecht (vergl. Art. 62, S. 41).

67.
Conjugirte
Axen.

Das Centrifugalmoment für die Axen A und B ist gleich dem statischen Moment der im Trägheits-Hauptpunkt T_p vereinigten Masse $\frac{\mathcal{J}_p}{d}$, bezogen auf die Sehne $A'B'$ (Fig. 66); dasselbe wird zu Null werden, wenn der Hebelsarm der in T_p wirkenden Gesamtmasse für die zu den Axen gehörige Sehne zu Null wird. Dies findet für alle Sehnen, welche durch den Trägheits-Hauptpunkt gehen, statt. Daher ergeben sich für alle durch T_p gehenden Sehnen zwei Axen, deren Centrifugalmoment gleich Null ist. Man nennt solche Axen conjugirte Axen.

Conjugirte Axen sind beispielsweise PX und PY in Fig. 69; die zu den beiden Haupttaxen gehörige Sehne GH in Fig. 68 geht gleichfalls durch T_p , so dass folgt: Die beiden Haupttaxen sind conjugirte Axen.

Für die Haupttaxen ist das Centrifugalmoment gleich Null.

68.
Lage des
Trägheits-
hauptpunktes.

Nach Vorstehendem ist vor Allem wichtig, die Lage des Trägheits-Hauptpunktes T_p zu kennen. Man nehme zwei senkrecht zu einander stehende, im Punkte P einander schneidende Coordinatenaxen PY und PZ (Fig. 70) an und ermittle für diese Axen die Trägheitsmomente \mathcal{J}_Y , \mathcal{J}_Z und das Centrifugalmoment \mathcal{J}_{YZ} des Querschnittes. Dadurch ist auch das polare Trägheitsmoment \mathcal{J}_p bekannt; denn für rechtwinkelige Coordinatenaxen ist

$$\mathcal{J}_p = \int \rho^2 df = \int (y^2 + z^2) df = \int y^2 df + \int z^2 df = \mathcal{J}_z + \mathcal{J}_y;$$

also

$$\mathcal{J}_p = \mathcal{J}_z + \mathcal{J}_y.$$

Nunmehr sollen die Coordinaten des Trägheits-Hauptpunktes T_p für einen Kreis gefucht werden, welcher durch den Schnittpunkt P beider Axen geht und von der Axe PY im Punkte P berührt wird; die Coordinaten von T_p mögen mit y_p , bzw. z_p bezeichnet werden. Dann ist das Trägheitsmoment für die Axe PY gleich dem statischen Moment der in T_p vereinigten Masse $\frac{\mathcal{J}_p}{d}$ für diejenige Tangente, welche im Schnittpunkte der Axe PY mit dem Kreise gezogen ist; dieser Schnittpunkt fällt aber hier mit P zusammen, da PY Tangente an den Kreis

Fig. 69.

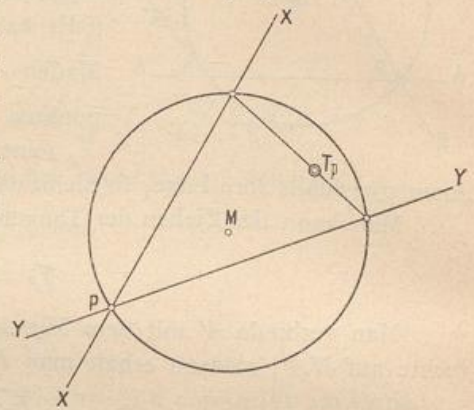
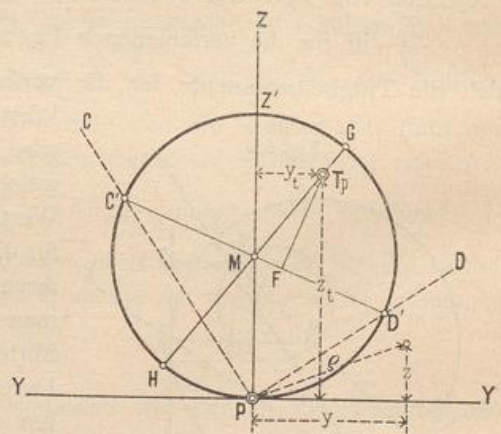


Fig. 70.



fein foll; daher ist das statische Moment für PY selbst gleich dem Trägheitsmoment \mathcal{F}_Y . Mithin wird

$$\mathcal{F}_Y = \frac{\mathcal{F}_p}{d} z_t.$$

Das Centrifugalmoment für die Axen PY und PZ ist gleich $\frac{\mathcal{F}_p}{d}$, multiplicirt mit dem Abstände des Punktes T_p von der zu den genannten Axen gehörigen Sehne. Diese Sehne ist aber die Axe PZ selbst, weil die beiden in Betracht kommenden Schnittpunkte der Axen Y und Z mit dem Kreise bzw. P und Z' sind; daher ist

$$\mathcal{F}_{ZY} = \frac{\mathcal{F}_p}{d} y_t.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Coordinaten des Trägheits-Hauptpunktes zu

$$\left. \begin{aligned} y_t &= \mathcal{F}_{YZ} \frac{d}{\mathcal{F}_p} \\ z_t &= \mathcal{F}_Y \frac{d}{\mathcal{F}_p} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 29.$$

Da man d beliebig annehmen kann, so steht auf der rechten Seite beider Gleichungen nur Bekanntes. Wählt man d so, daß $\frac{\mathcal{F}_p}{d} = 1 \text{ cm}^3$ wird¹⁴⁾, d. h. macht man $d \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm}^3 = \mathcal{F}_p \text{ cm}^4$, so vereinfachen sich obige Gleichungen für y_t und z_t , und man erhält

$$\left. \begin{aligned} y_t &= \mathcal{F}_{YZ} \\ z_t &= \mathcal{F}_Y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 30.$$

Die Regel für die Auffuchung des Trägheits-Hauptpunktes lautet demnach: Man lege durch den Pol (bzw. wenn man die Trägheitsmomente für die Schwerpunktsaxen haben will, durch den Schwerpunkt) zwei senkrecht zu einander stehende Axen PY und PZ (in Fig. 70 sind sie nach rechts, bzw. oben positiv, nach links, bzw. unten negativ angenommen), schlage mit \mathcal{F}_p als Durchmesser einen Kreis, welcher durch P geht und von PY berührt wird, dessen Mittelpunkt also auf der Axe PZ liegt; man mache weiters $y_t = \mathcal{F}_{YZ}$ und $z_t = \mathcal{F}_Y$. Alsdann erhält man T_p .

Die im Punkte T_p vereinigte Masse ist nunmehr

$$\frac{\mathcal{F}_p}{d} = 1 \text{ cm}^3,$$

und die Hebelsarme für die in Betracht kommenden Tangenten geben nunmehr sofort, auf dem angenommenen Maßstab abgegriffen, die Größen der Trägheitsmomente. Es ist demnach

$$\mathcal{F}_{max} = \overline{T_p H} \cdot 1 \text{ cm}^3 \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_{min} = \overline{T_p G} \cdot 1 \text{ cm}^3.$$

Für zwei beliebige andere Axen \overline{PC} und \overline{PD} , welche rechtwinkelig zu einander stehen, erhält man

$$\mathcal{F}_C = \overline{FC'} \cdot 1 \text{ cm}^3 \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_D = \overline{FD'} \cdot 1 \text{ cm}^3;$$

das Centrifugalmoment für diese Axen ist

$$\mathcal{F}_{CD} = \overline{T_p F} \cdot 1 \text{ cm}^3.$$

¹⁴⁾ Die Trägheitsmomente gehören der vierten Dimension, die Längen der ersten Dimension an; deshalb ist auf der rechten Seite als Benennung cm^3 hinzuzufügen.

In der Regel sind die Werthe \mathcal{F}_x , \mathcal{F}_y und \mathcal{F}_{yz} zu groß, als daß man sie unmittelbar auftragen könnte; man macht deshalb zweckmäßig $\frac{\mathcal{F}_x}{d}$ nicht gleich 1 cm^3 , sondern giebt diesem Quotienten einen bequemen Werth, etwa 100 cm^3 , 200 cm^3 u. f. w. Wählt man

$$\frac{\mathcal{F}_x}{d} = 100 \text{ cm}^3,$$

so wird

$$\left. \begin{aligned} d &= \frac{\mathcal{F}_x}{100 \text{ cm}^3} \\ y_i &= \frac{\mathcal{F}_{yz}}{100 \text{ cm}^3} \\ z_i &= \frac{\mathcal{F}_y}{100 \text{ cm}^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 31.$$

Alsdann sind die Werthe für \overline{FC} , $\overline{FD'}$, $\overline{T_pH}$, $\overline{T_pG}$, $\overline{T_pF}$ ebenfalls mit 100 cm^3 zu multipliciren, um die betreffenden Trägheits- und Centrifugalmomente zu erhalten.

Wenn \mathcal{F}_{yz} gleich Null ist, z. B. wenn die Axe \mathcal{F}_y oder \mathcal{F}_z eine Symmetrieaxe ist, so wird auch y_i gleich Null; also dann liegt T_p auf der Z-Axe; wenn \mathcal{F}_{yz} negativ ist, so wird auch y_i negativ, ist also dann nach links abzutragen.

69.
Maximal- und
Minimal-
Trägheits-
momente für:
Winkelblei.

Für einige häufig vorkommende Querschnittsformen sollen im Nachstehenden die Maximal- und Minimal-Trägheitsmomente, so wie die Trägheitskreise vorgeführt werden.

α) Maximal- und Minimal-Trägheitsmoment für ein gleichschenkeliges Winkelblei (Fig. 71).

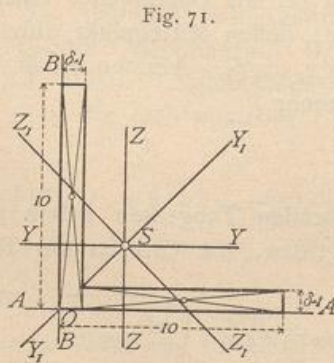


Fig. 71.

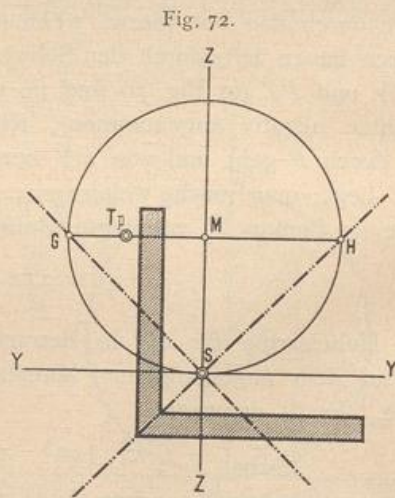


Fig. 72.

Hauptaxen sind die Symmetrieaxe $Y_1 Y_1$, welche den Winkel halbirt, und die zu dieser im Schwerpunkte senkrechte Axe $Z_1 Z_1$. Die erstere bildet mit der Axe $Y Y$ den Winkel $\alpha = 45$ Grad. Somit ist nach Gleichung 22

$$\mathcal{F}_{Y_1} = \mathcal{F}_Y \cos^2 \alpha + \mathcal{F}_Z \sin^2 \alpha - \mathcal{F}_{YZ} \sin 2 \alpha,$$

und, da $\alpha = 45$ Grad ist,

$$\mathcal{F}_{Y_1} = \frac{\mathcal{F}_Y + \mathcal{F}_Z}{2} - \mathcal{F}_{YZ}.$$

Die Werthe auf der rechten Seite vorstehender Gleichung sind leicht zu finden.

Für ein Winkelblei mit 10 cm Schenkellänge, 1 cm Schenkelfstärke (Deutsches Normal-Profil Nr. 10) ist $y_0 = z_0 = 2,87$ cm; mithin

$$\mathcal{I}_Y = \mathcal{I}_A - F y_0^2 \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_Z = \mathcal{I}_B - F z_0^2;$$

$$\mathcal{I}_Y = \frac{1 \cdot 10^3}{3} + \frac{9 \cdot 1^3}{3} - (10 + 9) 1 \cdot 2,87^2 = 179,83 \text{ cm}^4; \text{ eben so groß ist } \mathcal{I}_Z = 179,83 \text{ cm}^4;$$

$$\mathcal{I}_{YZ} = -10 \cdot 1 \cdot (5 - 2,87) (2,87 - 0,5) - 9 \cdot 1 \cdot (5,5 - 2,87) (2,87 - 0,5) = -106,58 \text{ cm}^4.$$

(Die Werthe der y und z sind nach rechts, bezw. oben als positiv eingeführt.) Es wird ferner

$$\mathcal{I}_{Y_1} = 179,83 + 106,58 = 286,41 \text{ cm}^4$$

$$\text{und } \mathcal{I}_{Z_1} = \mathcal{I}_Y \sin^2 \alpha + \mathcal{I}_Z \cos^2 \alpha + \mathcal{I}_{YZ} \sin 2\alpha = \frac{\mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_Z}{2} + \mathcal{I}_{YZ} = 179,83 - 106,58 = 73,25 \text{ cm}^4.$$

Mithin ist

$$\mathcal{I}_{Y_1} = A = 286,41 \text{ cm}^4 \text{ (Maximum),}$$

$$\mathcal{I}_{Z_1} = B = 73,25 \text{ cm}^4 \text{ (Minimum).}$$

Um den Trägheitskreis zu schlagen, ermittelt man

$$\mathcal{I}_p = \mathcal{I}_Z + \mathcal{I}_Y = 2 \cdot 179,83 = 359,66 \text{ cm}^4 = \infty 360 \text{ cm}^4,$$

$$\text{und mit } \frac{\mathcal{I}_p}{d} = 100 \text{ cm}^3 \text{ wird}$$

$$d = 3,6 \text{ cm}, \quad s_t = \frac{\mathcal{I}_Y}{100 \text{ cm}^3} = 1,798 = \infty 1,8 \text{ cm},$$

$$y_t = \frac{\mathcal{I}_{YZ}}{100 \text{ cm}^3} = -1,066 \text{ cm} = \infty -1,07 \text{ cm}.$$

Man erhält T_p in Fig. 72, ferner

$$\mathcal{I}_{max} = T_p H \cdot 100 \text{ cm}^3 = 2,86 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm}^3$$

$$\mathcal{I}_{min} = T_p G \cdot 100 \text{ cm}^3 = 0,73 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm}^3.$$

β) Maximal- und Minimal-Trägheitsmoment für ein ungleichschenkeliges Winkelblei (Fig. 65, S. 43).

Zunächst ist die Lage der Hauptachsen aufzufuchen. Da hier keine Symmetrie-Axe vorhanden ist, so ist dieselbe nach Formel 24

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_{max} = \frac{2 \mathcal{I}_{YZ}}{\mathcal{I}_Z - \mathcal{I}_Y}$$

zu berechnen.

Für das in Fig. 65 dargestellte Winkelblei (Deutsches Normal-Profil Nr. 8/12) ist

$$\mathcal{I}_Y = \mathcal{I}_A - F z_0^2 = \frac{1}{3} [1,0 \cdot 12^3 + 7,0 \cdot 1,0^3] - (12 + 7) 1,0 \cdot 3,97^2 = 278,87 \text{ cm}^4,$$

$$\mathcal{I}_Z = \mathcal{I}_B - F y_0^2 = \frac{1}{3} [1,0 \cdot 8^3 + 11 \cdot 1,0^3] - (12 + 7) 1,0 \cdot 1,97^2 = 100,59 \text{ cm}^4,$$

$$\mathcal{I}_{YZ} = 97,26 \text{ cm}^4 \text{ (siehe Art. 64, S. 42).}$$

Hiernach ist

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_{max} = \frac{2 \cdot 97,26}{100,59 - 278,87} = -1,09109.$$

Nun ist, wenn man $2 \alpha_{max} = 180 - 2\beta$ setzt, $\operatorname{tg} 2 \alpha_{max} = -\operatorname{tg} 2\beta$; somit $\operatorname{tg} 2\beta = 1,09109$ und $2\beta = 47^\circ 29' 40''$, woraus $\beta = 23^\circ 44' 50''$; mithin

$$\alpha_{max} = 90 - \beta, \text{ bzw. } 180 - \beta.$$

Hieraus ergibt sich

$$\alpha_{max} = 156^\circ 15' 10'' \text{ und } \alpha_{min} = 66^\circ 15' 10''.$$

Die Axen $Y'Y'$ und $Z'Z'$ sind demnach die Hauptachsen; man erhält nach Gleichung 22

$$\mathcal{I}_{Y_1} = \mathcal{I}_Y \cos^2 156^\circ 15' 10'' + \mathcal{I}_Z \sin^2 156^\circ 15' 10'' - \mathcal{I}_{YZ} \sin 312^\circ 30' 20'',$$

$$= \mathcal{I}_Y \cos^2 23^\circ 44' 50'' + \mathcal{I}_Z \sin^2 23^\circ 44' 50'' + \mathcal{I}_{YZ} \sin 47^\circ 29' 40'' = 321,43 \text{ cm}^4 = A;$$

$$\mathcal{I}_{Z_1} = \mathcal{I}_Y \cos^2 66^\circ 45' 10'' + \mathcal{I}_Z \sin^2 66^\circ 15' 10'' - \mathcal{I}_{YZ} \sin 47^\circ 29' 40'' = 57,80 \text{ cm}^4 = B.$$

Wesentlich einfacher gestaltet sich die Ermittlung mit Hilfe des Trägheitskreises (Fig. 73). Es ist $\mathcal{I}_Y = 278,87 \text{ cm}^4$, $\mathcal{I}_Z = 100,59 \text{ cm}^4$ und $\mathcal{I}_{YZ} = 97,26 \text{ cm}^4$; ferner $\mathcal{I}_p = \mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_Z = 278,87 + 100,59 = 379,46 \text{ cm}^4$, und mit $\frac{\mathcal{I}_p}{d} = 100 \text{ cm}^3$

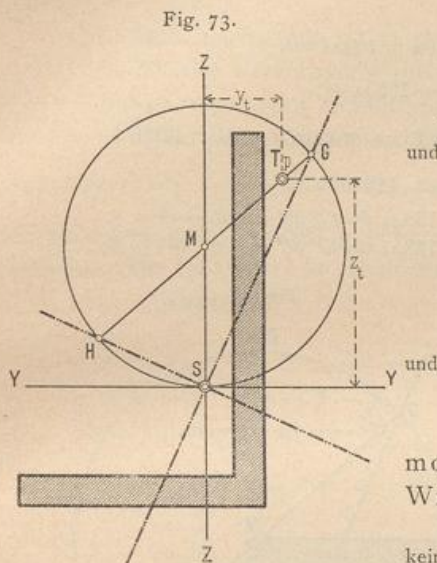


Fig. 73.

$$y_t = \frac{\mathcal{F}_{XY}}{100} = 0,97 \text{ cm}, \quad z_t = \frac{\mathcal{F}_Y}{100} = 2,79 \text{ cm} \quad \text{und} \quad d = \frac{\mathcal{F}_p}{100} = 3,79 \text{ cm}.$$

Man trägt auf SZ die Länge $\overline{SM} = \frac{3,79 \text{ cm}}{2}$ auf, schlägt von M aus mit $\frac{3,79}{2}$ als Halbmesser den Kreis, verzeichnet T_p aus den Koordinaten $y_t = 0,97 \text{ cm}$ und $z_t = 2,79 \text{ cm}$, zieht $T_p M$; alsdann geben SH und SG die Maximal-, bzw. Minimal-Trägheitsachsen. Es ist

$$\mathcal{F}_{max} = T_p H \cdot 100 \text{ cm}^3 = 3,2 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm}^3 \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_{min} = T_p G \cdot 100 \text{ cm}^3 = 0,58 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm}^3.$$

γ) Maximal- und Minimal-Trägheitsmoment für ein Z-Eisen.

Die Ermittlung soll für das Deutsche Normal-Profil Nr. 12 (Fig. 74) vorgenommen werden.

Es ist
$$\mathcal{F}_Y = \frac{0,7 \cdot 12^3}{12} + 2 \frac{5,3 (6^3 - 5,1^3)}{3} = 395,3 \text{ cm}^4,$$

$$\mathcal{F}_Z = \frac{10,2 \cdot 0,7^3}{12} + 2 \frac{(5,65^3 + 0,35^3)}{3} \cdot 0,9 = 108,53 \text{ cm}^4,$$

$$\mathcal{F}_{YZ} = 0 - 0,9 \cdot 5,3 \cdot 5,65 \cdot 3,0 \cdot 2 = -158,84 \text{ cm}^4,$$

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_{max} = -\frac{2 \cdot 158,84}{108,53 - 395,3} = \frac{2 \cdot 158,84}{286,77} = 1,1078, \quad \text{woraus} \quad 2 \alpha_{max} = 47^\circ 56';$$

fomit
$$\alpha_{max} = 23^\circ 58' \quad \text{und} \quad \alpha_{min} = 113^\circ 58'.$$

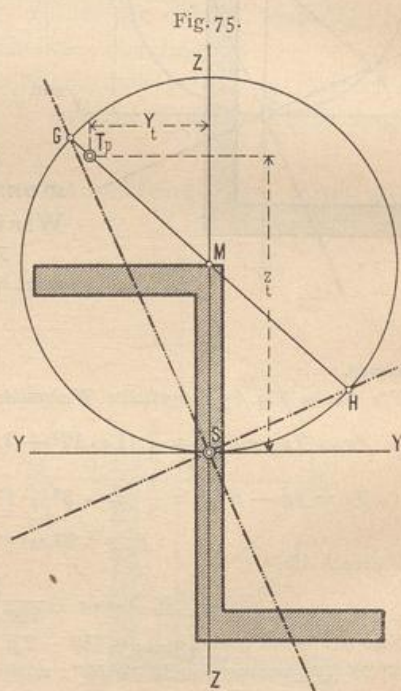
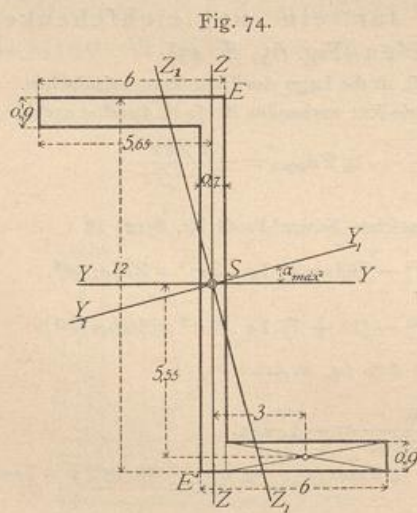
$$\mathcal{F}_{Y_1} = 395,3 \cos^2 23^\circ 58' + 108,53 \sin^2 23^\circ 58' + 158,84 \sin 47^\circ 56' = 465,9 \text{ cm}^4 = A,$$

$$\mathcal{F}_{Z_1} = 395,3 \sin^2 23^\circ 58' + 108,53 \cos^2 23^\circ 58' - 158,84 \sin 47^\circ 56' = 38,1 \text{ cm}^4 = B.$$

Fig. 75 zeigt die Construction des Trägheitskreises. Es ist

$$\mathcal{F}_p = 395,3 + 108,53 = 503,83 \text{ cm}^4;$$

mithin



$$z_t = \frac{\mathcal{F}_Y}{100} = 3,95 \text{ cm}, \quad y_t = \frac{\mathcal{F}_{YZ}}{100} = -\frac{158,8}{100} = -1,59 \text{ cm}$$

und

$$d = \frac{\mathcal{F}_p}{100} = 5,04 \text{ cm};$$

ferner

$$\mathcal{F}_{max} = \overline{T_p H} \cdot 100 \text{ cm}^3 = 4,6 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm}^3$$

und

$$\mathcal{F}_{min} = \overline{T_p G} \cdot 100 \text{ cm}^3 = 0,58 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm}^3.$$

Bedeutet \mathcal{J} das Trägheitsmoment für eine beliebige Axe, so kann man $\mathcal{J} = FR^2$ setzen, in welcher Gleichung F die Querschnittsfläche bedeutet. Alsdann ist

71.
Trägheitsradius.

$$R = \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{F}}$$

und es wird R der Trägheitsradius für die betreffende Axe genannt. Beispielsweise würden sich die Trägheitsradien für die Hauptaxen aus den Gleichungen:

$$A = FR_1^2 \quad \text{und} \quad B = FR_2^2 \quad \text{zu} \quad R_1 = \sqrt{\frac{A}{F}} \quad \text{und} \quad R_2 = \sqrt{\frac{B}{F}}$$

ergeben.

Die den Gleichungen 22 u. 23 entsprechende Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes mit der Veränderung des Winkels α kann man graphisch auch veranschaulichen, indem man vom Schnittpunkte der Axen aus auf jeder Axe eine Länge abträgt, welche dem Trägheitsmoment für diese Axe entspricht. Wählt man die Hauptaxen als Coordinatenaxen und trägt auf jeder Axe $\frac{K}{\sqrt{\mathcal{J}}}$ ab, in welcher Gleichung K eine zunächst beliebige Constante, \mathcal{J} das Trägheitsmoment für die betreffende Axe bedeutet, so erhält man als Endpunkt einer Linie etwa den Punkt P (Fig. 76). Alsdann ist

72.
Ellipse der Trägheitsmomente.

$$r = \frac{K}{\sqrt{\mathcal{J}_{Y_1}}}, \quad \cos \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y \sqrt{\mathcal{J}_{Y_1}}}{K} \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \frac{z}{r} = \frac{z \sqrt{\mathcal{J}_{Y_1}}}{K}.$$

Nach Gleichung 26 ist

$$\mathcal{J}_{Y_1} = A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha = \frac{A y^2 \mathcal{J}_{Y_1}}{K^2} + \frac{B z^2 \mathcal{J}_{Y_1}}{K^2}.$$

$$K^2 = A y^2 + B z^2 \quad \text{und} \quad 1 = \frac{y^2}{\left(\frac{K}{\sqrt{A}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{K}{\sqrt{B}}\right)^2} \quad \dots \quad 32.$$

Gleichung 32 ist die Gleichung der Curve für die Punkte P ; die Endpunkte der Fahrstrahlen liegen also auf einer Ellipse, deren beide Halbaxen $\frac{K}{\sqrt{A}}$ und $\frac{K}{\sqrt{B}}$ sind; $\frac{K}{\sqrt{A}}$ ist die Länge auf der Hauptaxe OY , $\frac{K}{\sqrt{B}}$ diejenige auf der Hauptaxe OZ .

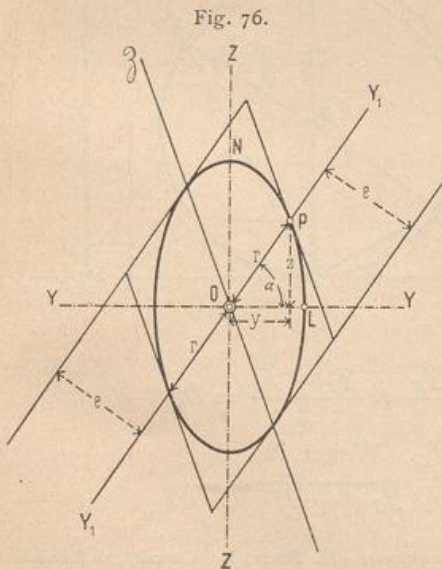


Fig. 76.

Man nennt diese Ellipse die Ellipse der Trägheitsmomente. Dieselbe kann für jeden beliebigen Punkt der Ebene als Mittelpunkt construirt werden; gehen sämmtliche Axen, wie hier, durch den Schwerpunkt des Querschnittes, so nennt man dieselbe die Centralellipse.

Der Werth K kann beliebig angenommen werden. Wählt man $K = \sqrt{\frac{AB}{F}}$, so wird die Länge des Fahrstrahles auf der Hauptaxe OY

$$\overline{OL} = \frac{K}{\sqrt{A}} = \sqrt{\frac{AB}{FA}} = \sqrt{\frac{B}{F}} = \sqrt{\frac{Fb^2}{F}} = b;$$

die Länge des Fahrstrahles auf der Hauptaxe OZ wird

$$\overline{ON} = \frac{K}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{AB}{FB}} = \sqrt{\frac{A}{F}} = \sqrt{\frac{Fa^2}{F}} = a.$$

a und b sind die Trägheitsradien, welche zu den Hauptträgheitsmomenten A und B gehören. Man erhält also die Ellipse der Trägheitsmomente, indem man auf der ersten Hauptaxe den Trägheitsradius b , auf der zweiten Hauptaxe den Trägheitsradius a aufträgt und für diese als Halbachsen der Ellipse die Curve conftruirt.

Für eine beliebige Axe Y, Y , ziehe man an die Ellipse die vier Tangenten, welche dem Durchmesser Y, Y , und dem zugehörigen conjugirten Durchmesser $3O$ entsprechen; die von diesem eingeschlossene Fläche ist $4re$, aber bekanntlich auch gleich $4ab$. Es ist also auch $re = ab$, fomit

$$e = \frac{ab}{r}.$$

Nun ist

$$a = \sqrt{\frac{A}{F}}, \quad b = \sqrt{\frac{B}{F}}, \quad r = \frac{K}{\sqrt{\mathcal{J}_{Y_1}}} = \sqrt{\frac{AB}{F\mathcal{J}_{Y_1}}};$$

mithin

$$e = \frac{ab}{r} = \sqrt{\frac{ABF\mathcal{J}_{Y_1}}{F^2 AB}} = \sqrt{\frac{\mathcal{J}_{Y_1}}{F}},$$

d. h.

$$\mathcal{J}_{Y_1} = Fe^2.$$

Demnach ist e der Trägheitsradius für die Axe $V_1 V_1$.

Wird also $K = \sqrt{\frac{AB}{F}}$ gewählt, so ist für jede Axe der Trägheitsradius ohne Weiteres durch Ziehen der parallelen Tangente und Abmessen des senkrechten Abstandes der Tangente von der Axe zu ermitteln.

73.
Weitere einfache
Ausdrücke
für die
Hauptträgheits-
momente.

Mit Hilfe des in Art. 65 (S. 43) vorgeführten Trägheitskreises ergeben sich folgende einfache Ausdrücke für die Hauptträgheitsmomente A und B ¹⁵⁾. In Fig. 77 seien OY und OZ zwei senkrecht zu einander gerichtete Axen, für welche die Trägheitsmomente \mathcal{J}_Y und \mathcal{J}_Z , so wie das Centrifugalmoment \mathcal{J}_{YZ} bekannt sind.

Dann ist $\overline{OL} = d = \mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z$, und der Halbmesser des Kreifes

$$r = \overline{MH} = \overline{MG} = \overline{MO} = \frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2}.$$

Ferner ist

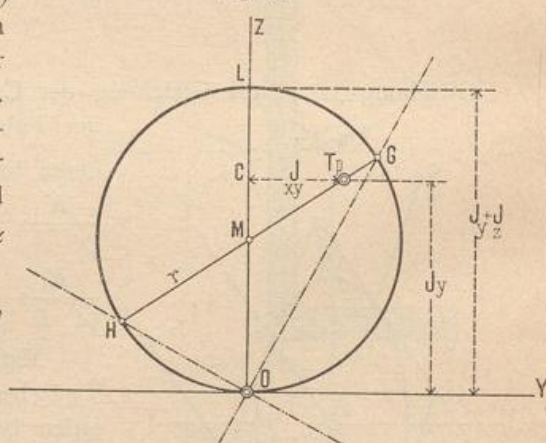
$$\overline{MC} = \overline{OC} - \overline{OM} = \mathcal{J}_Z - \frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} = \frac{\mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_Z}{2} = D,$$

d. h. D ist der halbe Unterschied von \mathcal{J}_Y und \mathcal{J}_Z . Weiter ist

$$\overline{MT_p} = \sqrt{\overline{CT_p}^2 + \overline{MC}^2} = \sqrt{\mathcal{J}_{YZ}^2 + D^2}.$$

¹⁵⁾ Angegeben von LAND (Die Bestimmung der Haupt-Trägheitsmomente einer Fläche) in: Centralbl. d. Bauverw. 1898, S. 22.

Fig. 77.



Nun ist aber

$$A = \overline{T_p H} = \overline{MH} + \overline{MT_p} = \frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} + \sqrt{\mathcal{J}_{YZ}^2 + D^2},$$

$$B = \overline{T_p G} = \overline{MG} - \overline{MT_p} = \frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} - \sqrt{\mathcal{J}_{YZ}^2 + D^2};$$

daher

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} + \sqrt{\mathcal{J}_{YZ}^2 + \left(\frac{\mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_Z}{2}\right)^2} \\ B &= \frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} - \sqrt{\mathcal{J}_{YZ}^2 + \left(\frac{\mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_Z}{2}\right)^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 33.$$

Die Benutzung dieser Formeln setzt nur die Kenntniss von \mathcal{J}_Y , \mathcal{J}_Z und \mathcal{J}_{YZ} voraus; es ist nicht erforderlich, wie bei Verwendung der Formeln 22 und 23, mit Winkelfunctionen zu rechnen, um die Hauptträgheitsmomente zu ermitteln¹⁶⁾.

Beispiel. Bei dem Z-Eisen in Art. 70 (S. 50) war

$$\mathcal{J}_Y = 395,3 \text{ cm}^4, \quad \mathcal{J}_Z = 108,83 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad \mathcal{J}_{YZ} = -158,84 \text{ cm}^4;$$

daher ist

$$\frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} = 251,9 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_Z}{2} = D = 143,4 \text{ cm}^4;$$

fomit

$$A = 251,9 + \sqrt{158,8^2 + 143,4^2} = 251,9 + 214 = 465,9 \text{ cm}^4,$$

$$B = 251,9 - \sqrt{158,8^2 + 143,4^2} = 251,9 - 214 = 37,9 \text{ cm}^4.$$

¹⁶⁾ Ueber die Darstellung der Trägheitsmomente mit Hilfe von Kreisen vergl.:

MOHR. Ueber die Bestimmung und die graphische Darstellung von Trägheitsmomenten ebener Flächen. Civiling. 1887, S. 43.

LAND, R. Einfache Darstellung der Trägheits- und Centrifugalmomente von Flächen etc. Zeitschr. f. Bauw. 1892, S. 549. —

Auch als Sonderabdruck erschienen: Berlin 1892. — Auszug daraus: Centralbl. d. Bauverw. 1893, S. 11.

Beigabe zum Deutschen Baukalender 1894 u. ff. Berlin 1893 u. ff.

Des Ingenieurs Taschenbuch. Herausg. v. akad. Verein »Hütten«. 16. Aufl. Abth. I. Berlin 1896. S. 177.