



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

1) Die Axialkraft hat die Grösse Null

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77733](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77733)

Gleichung III lautet mit dem Werthe für σ :

$$0 = \alpha \int_{-b_2}^{+b_1} y \, df + \beta \int_{-b_2}^{+b_1} y^2 \, df + \gamma \int_{-a_2}^{+a_1} y z \, df.$$

Da $\int_{-b_2}^{+b_1} y \, df = 0$ und $\int_{-a_2}^{+a_1} y z \, df = 0$ ist (siehe oben), so bleibt $0 = \beta \int_{-b}^{+b} y^2 \, df$,

woraus folgt, da $\int_{-b_2}^{+b_1} y^2 \, df$ nicht gleich Null ist,

$$\beta = 0.$$

Demnach sind die Werthe für die drei Constanten:

$$\alpha = \frac{P}{F}, \quad \beta = 0 \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{M}{\mathcal{F}_Y},$$

und es ist schliesslich

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{\mathcal{F}_Y} z \dots \dots \dots 54.$$

Wenn, wie meistens, die Axialkraft P gleich Null ist, so ergibt sich für die axiale Biegungsspannung der Ausdruck

$$\sigma = \frac{Mz}{\mathcal{F}_Y}, \dots \dots \dots 55.$$

und wenn man vereinfachend \mathcal{F} statt \mathcal{F}_Y setzt,

$$\sigma = \frac{Mz}{\mathcal{F}} \dots \dots \dots 56.$$

Gleichung 55, bzw. 56 giebt die axialen Biegungsspannungen für einen Balken mit gerader Axe an, auf welchen die äusseren Kräfte nur senkrecht zur Axe wirken und bei dem die Kraftebene alle Querschnitte in Hauptaxen schneidet. Diese Gleichung soll zunächst besprochen werden.

1) Die Axialkraft hat die Grösse Null.

Gleichung 56 enthält ausser der Ordinate z eines Querschnittspunktes auf der rechten Seite nur die Grössen M und \mathcal{F} . Bei einer bestimmten, gegebenen Belastung haben für alle Punkte desselben Querschnittes, also für alle möglichen Werthe von z , sowohl M (das Biegemoment oder das Moment der an der einen Seite des Querschnittes wirkenden äusseren Kräfte, bezogen auf die wagrechte Schweraxe desselben als Drehaxe), wie auch das Trägheitsmoment \mathcal{F} , welches nur von der Form und Grösse der Querschnittsfläche abhängt, denselben Werth. Demnach ist nach Gleichung 56 die axiale Spannung σ an den verschiedenen Stellen eines Querschnittes nur mit dem Abstände z derselben von der wagrechten Schwerpunktsaxe veränderlich. Alle Punkte eines Querschnittes, welche in gleicher Höhe z über der wagrechten Schwerpunktsaxe liegen, werden also gleich stark beansprucht. Trägt man die in den verschiedenen Höhen z für die Flächeneinheit wirkenden Axialspannungen derart graphisch auf, dass man die z als Abscissen, die zugehörigen σ als Ordinaten zeichnet, und verbindet man die Endpunkte der Ordinaten, so erhält man die Linie

96.
Balken,
bei denen die
Axialkraft
die Grösse Null
hat.

der Gleichung $\sigma = \frac{M}{\mathcal{F}} z$. Diese Linie wird eine Gerade, weil die Veränderlichen σ und z nur in der ersten Potenz vorkommen.

Für $z = 0$ wird $\sigma = 0$, d. h. in allen in der wagrechten Schwerpunktsaxe liegenden Punkten ist die Axialspannung gleich Null.

An diesen Stellen ist also auch die Verlängerung oder Verkürzung gleich Null; denn dieselbe ist $\Delta dx = \frac{\sigma}{E} dx$, also für $\sigma = 0$ ebenfalls gleich Null.

Man nennt die Linie, welche alle Querschnittspunkte enthält, in denen die Axialspannung Null ist, die Null-Linie oder neutrale Linie. Diese Linie fällt nach Vorstehendem hier mit der wagrechten Schwerpunktsaxe YY zusammen; deshalb findet statt: Bei einem geraden wagrechten Balken, dessen Querschnitte durch die Kraftebene in Hauptaxen geschnitten werden und auf den nur lothrechte Kräfte wirken, fällt in jedem Querschnitt die Null-Linie mit der wagrechten Schwerpunktsaxe zusammen.

97.
Größte
Beanspruchung. Aus Gleichung 56 folgt ferner, daß σ desto größer ist, je größer z ist, d. h. je weiter der betreffende Punkt von der wagrechten Schwerpunktsaxe entfernt ist. Die größten Werthe von σ finden also in den am weitesten entfernten Punkten statt. Es seien die Abstände der am weitesten nach oben und unten von der Null-Linie entfernten Punkte (Fig. 92) bzw. $+a_1$ und $-a_2$; alsdann ist

$$\sigma_{max} = + \frac{M}{\mathcal{F}} a_1 \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = - \frac{M}{\mathcal{F}} a_2 \quad \dots \quad 57.$$

Die Gleichungen 57 werden benutzt, um die Größe und Form des Querschnittes an den verschiedenen Stellen des Balkens zu bestimmen. Bedeutet M das größte für einen Querschnitt mögliche Moment, so ist die größte in diesem Querschnitt vorhandene Zug-, bzw. Druckspannung aus den Gleichungen 57 zu ermitteln. Ist für den betreffenden Stoff und den vorliegenden Fall die zulässige Beanspruchung für die Flächeneinheit des Querschnittes K' , bzw. $-K''$ (für Zug, bzw. Druck), so darf höchstens stattfinden:

$$\sigma_{max} = K' \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = -K'',$$

d. h. die Bedingungsgleichungen für den Querschnitt werden:

$$K' = \frac{M}{\mathcal{F}} a_1, \quad -K'' = - \frac{M}{\mathcal{F}} a_2 \quad \text{oder} \quad K'' = \frac{M}{\mathcal{F}} a_2.$$

Die beiden Gleichungen für K' und K'' können auch geschrieben werden:

$$\frac{\mathcal{F}}{a_1} = \frac{M}{K'} \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{F}}{a_2} = \frac{M}{K''} \quad \dots \quad 58.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen 58 sind bekannt; es wird weiterhin gezeigt werden, wie man für die verschiedenen Fälle die Werthe von M ermittelt; diejenigen der zulässigen Beanspruchungen, d. h. die Werthe für K' und K'' sind ebenfalls (aus den Tabellen auf S. 64) bekannt. Sollen also an den meist beanspruchten Stellen der Querschnitte die zulässigen Beanspruchungen K' und K'' nicht überschritten werden, so sind $\frac{\mathcal{F}}{a_1}$ und $\frac{\mathcal{F}}{a_2}$ so zu bestimmen, daß die Gleichungen 58 erfüllt sind. \mathcal{F} , a_1 und a_2 hängen aber nur von der Form und Größe der Querschnittsfläche ab; man kann daher durch passende Anordnung des Querschnittes diese Bedingung erfüllen. Wenn beide Gleichungen 58 erfüllt sind, so treten gleichzeitig in den am meisten gezogenen und gedrückten Punkten des

Querschnittes die zulässigen größten Beanspruchungen auf Zug und Druck ein; diese Anordnung ist für die Materialausnutzung die günstigste.

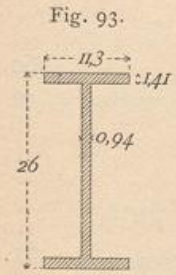
Für Baustoffe, bei denen die zulässigen Zug-, bzw. Druckbeanspruchungen (absolut genommen) nahezu gleich groß sind, ist in den Gleichungen 58 die Größe $K' = K'' = K$ zu setzen. Für diese Stoffe (Schweißseifen, Flufseifen, Stahl, Holz) ergibt sich

$$\frac{M}{\mathcal{J}} a_1 = \frac{M}{\mathcal{J}} a_2 \quad \text{oder} \quad a_1 = a_2,$$

d. h. die Querschnittsform für derartige auf Biegung beanspruchte Balken ist so zu wählen, daß die am meisten gezogenen, bzw. gedrückten Punkte gleich weit vom Schwerpunkte des Querschnittes entfernt sind, daß also der Schwerpunkt der Querschnittsfläche in halber Höhe liegt.

Bezeichnet man die halbe Höhe des Querschnittes alsdann mit a , so ist die nunmehr geltende Gleichung:

$$\frac{\mathcal{J}}{a} = \frac{M}{K} \dots \dots \dots 59.$$



Beispiel. Das Maximalmoment in einem schweißeisernen Walzbalken mit I-förmigem Querschnitt betrage $M = 280\,000$ kgcm.

Nach der Tabelle auf S. 64 ist für Schweißseifen $K' = K'' = K = 700$ kg für 1 qcm, also

$$\frac{\mathcal{J}}{a_1} = \frac{\mathcal{J}}{a_2} = \frac{\mathcal{J}}{a} = \frac{M}{K} = \frac{280\,000}{700} = 400.$$

Das neben stehende Profil Nr. 26 der »Deutschen Normal Profile für I-Eisen« (Fig. 93) hat ein Trägheitsmoment $\mathcal{J} = 5798$; ferner ist $a = \frac{26}{2} = 13$ cm, demnach $\frac{\mathcal{J}}{a} = 446$, so daß dieser Querschnitt im vorliegenden Falle genügt.

Den Quotienten $\frac{\mathcal{J}}{a}$ nennt man wohl auch das Widerstandsmoment und bezeichnet ihn mit W .

Man kann die Querschnitte der Balken mit genau bestimmbarer Elastizitätsgrenze auf ganz ähnliche Weise ermitteln, wie dies in Art. 84 u. 85 (S. 60 u. 62) für Stäbe gezeigt ist, die in ihrer Axenrichtung beansprucht werden.

58.
Neuere
Querschnitts-
bestimmung
für Schweiß-
und Flufseifen-
balken.

Derjenige Querschnittspunkt möge der Untersuchung zu Grunde gelegt werden, welcher die größte Zugbeanspruchung erleidet; was von diesem Punkte gilt, hat auch für denjenigen Punkt Gültigkeit, welcher den größten Druck erleidet. Entsprechend den Bezeichnungen in Art. 84 (S. 60) bezeichne nunmehr σ_{max} die in dem betrachteten Punkte höchstens auftretende Zugspannung; dieselbe ist

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} a_1}{\mathcal{J}};$$

desgleichen bezeichne σ_{min} die in demselben Punkte mögliche kleinste Zugspannung, d. h. es ist

$$\sigma_{min} = \frac{M_{min} a_1}{\mathcal{J}}.$$

Wie dort, ergibt sich wieder

$$\text{für Schweißseifen: } \sigma_{max} = \frac{1050}{1,5 - 0,5 \frac{M_{min}}{M_{max}}},$$

für Flusseisen: $\sigma_{max} = \frac{1350}{1,5 - 0,5 \frac{M_{min}}{M_{max}}}$,

wobei zu beachten ist, daß $\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{M_{min}}{M_{max}}$ ist.

Bedeutet M_0 das Moment, welches im Querschnitt durch Eigengewicht allein und M_1 das größte Moment, welches im Querschnitt durch zufällige oder Verkehrs- last allein hervorgerufen wird, so ist

$$M_{max} = M_0 + M_1 \quad \text{und} \quad M_{min} = M_0,$$

und man erhält für Schweisseisen:

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{M_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{M_{max}}{1050} \left(1,5 - 0,5 \frac{M_{min}}{M_{max}} \right) = \frac{1,5 M_{max} - 0,5 M_{min}}{1050},$$

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{1,5 M_0 + 1,5 M_1 - 0,5 M_0}{1050} = \frac{M_0 + 1,5 M_1}{1050},$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathcal{F}}{a} &= \frac{M_0 + 1,5 M_1}{1050}, \\ \frac{\mathcal{F}}{a} &= \frac{M_0}{1050} + \frac{M_1}{700}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 60.$$

Für Flusseisen ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathcal{F}}{a} &= \frac{M_0 + 1,5 M_1}{1350}, \\ \frac{\mathcal{F}}{a} &= \frac{M_0}{1350} + \frac{M_1}{900}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 61.$$

Beispiel: Die Größtmomente in einem Balken, der als flusseiserner Walzbalken angeordnet werden soll, betragen $M_0 = 180\,000$ kgcm und $M_1 = 230\,000$ kgcm. Alsdann muß

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{180\,000}{1350} + \frac{230\,000}{900} = 133 + 255 = 388 \text{ cm}^2$$

sein. Das deutsche Normal-Profil Nr. 24 hat $\frac{\mathcal{F}}{a} = 357 \text{ cm}^2$ und das Profil Nr. 26 $\frac{\mathcal{F}}{a} = 446 \text{ cm}^2$; letzteres ist zu wählen.

Für Gußeisen ist die zulässige Beanspruchung auf Druck doppelt so groß, als diejenige auf Zug (vergl. die Tabelle auf S. 64), also $K'' = 2 K'$, und demnach

$$\frac{M}{\mathcal{F}} a_2 = 2 \frac{M}{\mathcal{F}} a_1 \quad \text{und} \quad a_2 = 2 a_1.$$

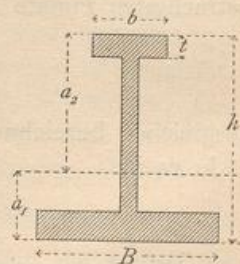
Nun ist die ganze Höhe des Querschnittes

$$h = a_1 + a_2 = 3 a_1, \quad \text{woraus} \quad a_1 = \frac{h}{3}.$$

Daraus folgt die Regel: Die Querschnitte der gußeisernen Balken (Fig. 94) sind so anzuordnen, daß der Schwerpunkt um $\frac{1}{3}$ der Gesamthöhe des Querschnittes von der am meisten gezogenen Faser entfernt liegt. Befinden sich also die gezogenen Fasern, wie meistens, unten, die gedrückten Fasern oben, so soll der Schwerpunkt im Abstände $\frac{h}{3}$ über der Grundlinie des Querschnittes liegen.

99.
Stäbe
aus
Gußeisen.

Fig. 94.



Für Gufseifen hat nach neueren Verfuchen das Proportionalitätsgefetz keine Giltigkeit; die vorstehenden Entwicklungen find demnach auch nicht als unbedingt richtig anzusehen. Für Balken verwendet man zweckmäfsig kein Gufseifen.

Die auf Biegung beanspruchten Stäbe aus Holz werden, der Natur des Materials entsprechend, mit rechteckigem Querschnitt hergestellt; der Schwerpunkt des Querschnittes liegt also in halber Höhe h , und es ist $a_1 = a_2 = \frac{h}{2}$. Demnach wird $K' = K''$, und aus der Tabelle auf S. 64 ist der kleinere der beiden Werthe, welche als zulässige Zug-, bezw. Druckbeanspruchung angegeben find, einzuführen. Wenn dieser Werth K genannt wird, so ist

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{M}{K}$$

Beispiel. Es sei etwa $M = 180000$ kgcm; alsdann muß für kieferne Balken stattfinden:

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{180000}{60} = 3000.$$

Nach Gleichung 19 ist

$$\mathcal{F} = \frac{b h^3}{12} \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{b h^3}{12 \frac{h}{2}} = \frac{b h^2}{6}.$$

Im vorliegenden Falle muß also sein

$$\frac{b h^2}{6} = 3000 \quad \text{oder} \quad b h^2 = 18000.$$

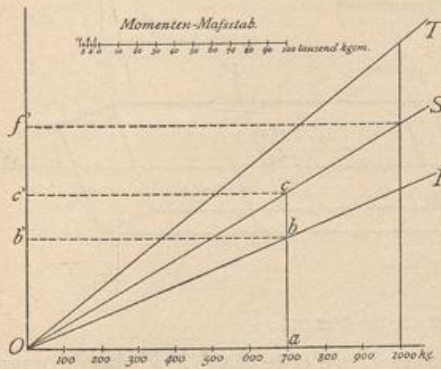
Ist $b = \frac{3}{4} h$, so wird $\frac{3}{4} h^3 = 18000$ und $h = \sqrt[3]{24000} = \approx 29$ cm, fonach $b = 22$ cm.

Bei den schweis- und flufseisernen Walzbalken I- und C-förmigen Querschnittes, welche im Handel in ganz bestimmten Kalibern erhältlich sind, kann man das für jeden Fall nothwendige Kaliber mittels einer einfachen Figur sehr leicht ermitteln. Die Bedingung für die Querschnittsbildung ist

$$M = K \frac{\mathcal{F}}{a}$$

Je nachdem man bei einem Balken mit gegebenem Querschnitt, also bekanntem

Fig. 95.



Widerstandsmoment $\frac{\mathcal{F}}{a}$, eine größere oder geringere Beanspruchung K als zulässig einführt, kann man ihn für ein größeres oder geringeres Moment M verwenden. Trägt man nun die Werthe von K als Abscissen, die zugehörigen Werthe $\frac{K \mathcal{F}}{a} = M$ als Ordinaten auf, so ergibt sich für jedes Kaliber eine Gerade, etwa OR (Fig. 95), die durch den Koordinatenanfang O geht und die Größe der Momente angiebt, welche dieses Kaliber bei den verschiedenen Beanspruchungen K ertragen

kann. In Fig. 95 sind drei solche Linien OR , OS , OT angegeben. Bei einer als zulässig erachteten Beanspruchung $K = 700$ kg würde der zu OR gehörige Balken genügen, so lange das größte Moment nicht größer als $a b = O b'$ ist; der zu OS gehörige Balken genügt hierbei noch für ein Moment $a c = O c'$. Wird eine größere Bean-

100.
Stäbe
aus Holz.

101.
Querschnitts-
bestimmung
mittels
graphischer
Tafel.

spannung K , etwa $K = 1000 \text{ kg}$, zugelassen, so genügt der Balken OS bis zu einer Momentengröße \overline{OF} . Auf der neben stehenden Tafel sind für die »Deutschen Normal-Profile« mit I- und C-Form die Linien gezogen; auf der Abszissenaxe sind die Spannungen K , auf der Ordinatenaxe die Momente abgetragen.

Wenn z. B. ein Moment von 125000 kgcm aufzunehmen ist, so würde das I-Eisen Nr. 20 dieses mit einer größten Beanspruchung $K = 580 \text{ kg}$ ertragen können, Nr. 18 mit einer Beanspruchung von 765 kg , Nr. 16 mit einer Spannung von 1060 kg . Wäre vorgeschrieben, daß K nicht größer sein solle, als 700 kg , so würde das Kaliber zu wählen sein, welches zunächst über dem Punkte P liegt, in welchem die zu $K = 700 \text{ kg}$ gehörige Ordinate den Werth $M = 125000 \text{ kgcm}$ hat. Die Verwendung dieser graphischen Tafel ist sonach sehr bequem.

2) Die Axialkraft ist nicht gleich Null.

Dieser Fall wird aus Zweckmäßigkeitsrückichten im folgenden Abschnitt, und zwar im Kapitel über »Stützen« behandelt, da er für diese besondere Wichtigkeit hat.

b) Axiale Biegungsspannungen, wenn die Kraftebene die Balkenquerschnitte nicht in Hauptaxen schneidet.

102.
Axiale
Biegungs-
spannungen.

Auf den Querschnitt II in Fig. 96a wirke das Biegemoment $M = Q \zeta$; Fig. 96b giebt die Vorderansicht des Querschnittes; die Kraftebene fällt mit der Bildebene der Fig. 96a zusammen, geht durch die Balkenaxe und ist die XZ -Ebene.

Bezeichnen UU und VV die beiden Hauptaxen des Querschnittes, so kann nach bekannten Gesetzen der Statik das in der XZ -Ebene wirkende Moment M in zwei Seitenmomente zerlegt werden, welche in der XU - und XV -Ebene wirken; das erstere ist alsdann $M_u = M \sin \alpha$, das letztere $M_v = M \cos \alpha$. Diese Zerlegung, so wie die Drehrichtung der Seitenmomente wird durch die isometrische Ansicht in Fig. 96c verdeutlicht, bei welcher, der einfacheren Zeichnung halber, ein Rechteckquerschnitt angenommen ist. Q zerlegt sich im Punkte A in $Q \cos \alpha$ und $Q \sin \alpha$, welche Kräfte bezw. in den Ebenen XV und XU wirken. Die erstere Kraft hat in Bezug auf die durch O , den Schwerpunkt des betrachteten Querschnittes, gelegte Hauptaxe UU das Moment:

$$Q \cos \alpha \cdot \zeta = Q \zeta \cos \alpha = M \cos \alpha;$$

die letztere hat in Bezug auf die gleichfalls durch O gelegte Axe VV das Moment

$$Q \sin \alpha \cdot \zeta = Q \zeta \sin \alpha = M \sin \alpha.$$

Jedes dieser beiden Theilmomente wirkt nun aber in einer Ebene, welche die sämtlichen Querschnitte in Hauptaxen schneidet; die Ebene des ersteren schneidet die Querschnitte in VV , die des letzteren in den Axen UU ; jedes dieser Momente

Fig. 96.

