Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

b) Axiale Biegungsspannungen, wenn die Kraftebene die Balkenquerschnitte nicht in Hauptaxen schneidet

urn:nbn:de:hbz:466:1-77733

ſpruchung K, etwa $K = 1000^{kg}$, zugelaſſen, ſo genügt der Balken OS bis zu einer Momentengröſse $\overline{Of'}$. Auf der neben ſtehenden Tafel ſind für die »Deutſchen Normal-Profile« mit I- und ⊏-Form die Linien gezogen; auf der Abſciſſenaxe ſind die Spannungen K, auf der Ordinatenaxe die Momente abgetragen.

Wenn z. B. ein Moment von 125000^{kgcm} aufzunehmen iſt, ſo würde das I-Eiſen Nr. 20 dieſes mit einer gröſsten Beanſpruchung $K = 580^{kg}$ ertragen können, Nr. 18 mit einer Beanſpruchung von 765^{kg}, Nr. 16 mit einer Spannung von 1060^{kg}. Wäre vorgeſchrieben, daſs K nicht gröſser ſein ſolle, als 700^{kg}, ſo würde das Kaliber zu wählen ſein, welches zunächſt über dem Punkte P liegt, in welchem die zu $K = 700^{kg}$ gehörige Ordinate den Werth $M = 125000^{kgcm}$ hat. Die Verwendung dieſer graphiſchen Tafel iſt ſonach ſehr bequem.

2) Die Axialkraft iſt nicht gleich Null.

Dieſer Fall wird aus Zweckmäſsigkeitsrückſichten im folgenden Abſchnitt, und zwar im Kapitel über »Stützen« behandelt, da er für dieſe beſondere Wichtigkeit hat.

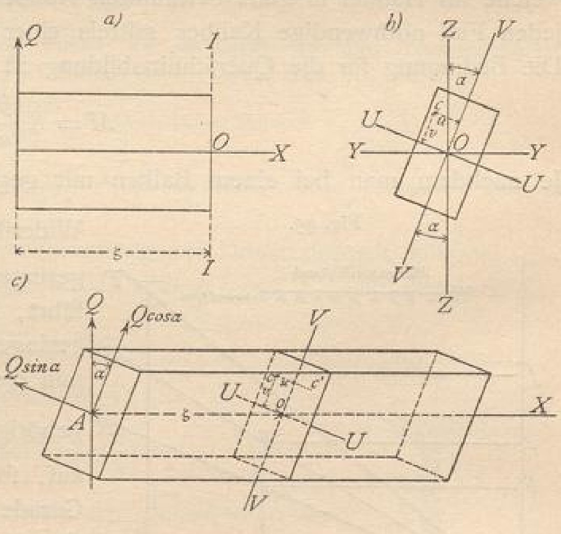
b) Axiale Biegungsſpannungen, wenn die Kraftebene die Balkenquerſchnitte nicht in Hauptaxen ſchneidet.

102. Axiale Biegungs-ſpannungen.

Auf den Querſchnitt II in Fig. 96a wirke das Biegungsmoment $M = Q\zeta$; Fig. 96b giebt die Vorderanſicht des Querſchnittes; die Kraftebene fällt mit der Bildebene der Fig. 96a zuſammen, geht durch die Balkenaxe und iſt die XZ-Ebene.

Bezeichnen UU und VV die beiden Hauptaxen des Querſchnittes, ſo kann nach bekannten Geſetzen der Statik das in der XZ-Ebene wirkende Moment M in zwei Seitenmomente zerlegt werden, welche in der XU- und XV-Ebene wirken; das erſtere iſt alsdann $M_u = M \sin \alpha$, das letztere $M_v = M \cos \alpha$. Dieſe Zerlegung, ſo wie die Drehrichtung der Seitenmomente wird durch die iſometriſche Anſicht in Fig. 96c verdeutlicht, bei welcher, der einfacheren Zeichnung halber, ein Rechteckquerſchnitt angenommen iſt. Q zerlegt ſich im Punkte A in $Q \cos \alpha$ und $Q \sin \alpha$, welche Kräfte bezw. in den Ebenen XV und XU wirken. Die erſtere Kraft hat in Bezug auf die durch O, den Schwerpunkt des betrachteten Querſchnittes, gelegte Hauptaxe UU das Moment:

Fig. 96.

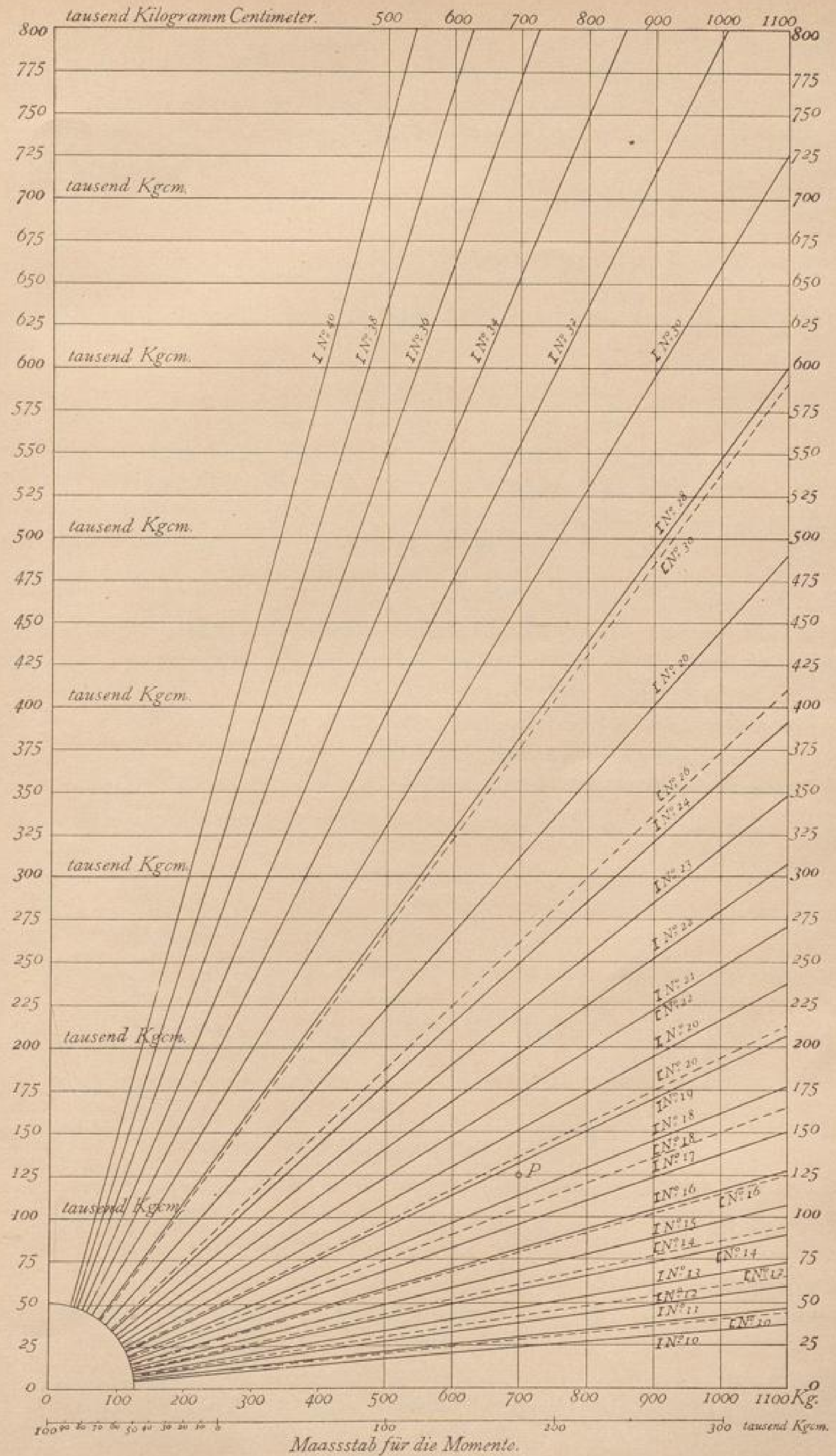


$$Q \cos \alpha \,.\, \zeta = Q \zeta \cos \alpha = M \cos \alpha;$$

die letztere hat in Bezug auf die gleichfalls durch O gelegte Axe VV das Moment

$$Q \sin \alpha \,.\, \zeta = Q \zeta \sin \alpha = M \sin \alpha.$$

Jedes dieſer beiden Theilmomente wirkt nun aber in einer Ebene, welche die ſämmtlichen Querſchnitte in Hauptaxen ſchneidet; die Ebene des erſteren ſchneidet die Querſchnitte in VV, die des letzteren in den Axen UU; jedes dieſer Momente



Graphische Tafel

für die Querschnittsermittelung von I- und [-förmigen Walzbalken.
(Deutsche Normal-Profile.)

erzeugt ſonach für ſich allein Biegungsſpannungen, welche nach Gleichung 56 zu berechnen ſind. Das Trägheitsmoment des Querſchnittes bezogen auf die Hauptaxe *UU* ſoll mit *A*, dasjenige bezogen auf die Hauptaxe *VV* mit *B* bezeichnet werden; dann erhält man die Spannungen in einem Punkte *C* mit den Coordinaten *u* und *v* mit Rückſicht auf Gleichung 56 wie folgt.

Wirkte nur $M \cos \alpha$, ſo wäre die Spannung $\sigma_1 = \frac{M \cos \alpha \,.\, v}{A}$;

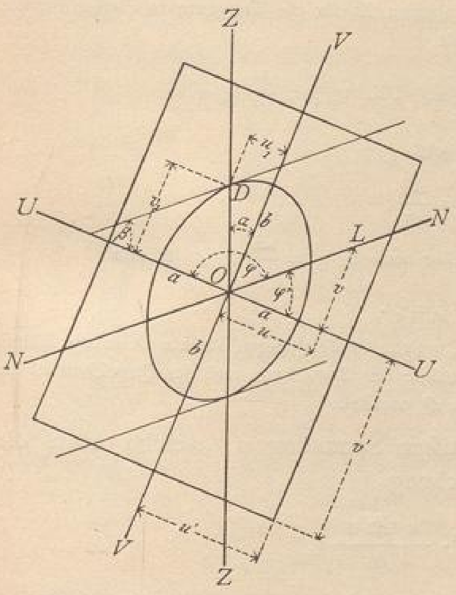
wirkte nur $M \sin \alpha$, ſo wäre die Spannung $\sigma_2 = \frac{M \sin \alpha \,.\, u}{B}$.

Die wirkliche Spannung ſetzt ſich aus beiden Einzelwerthen zuſammen, d. h. es wird ſein

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = M\left(\frac{v \cos \alpha}{A} + \frac{u \sin \alpha}{B}\right).$$

Bei der angenommenen Kraft- und Drehrichtung der Momente, ſo wie bei der Lage des Punktes *C* werden, falls man die Coordinaten *v* und *u* nach oben, bezw. links als poſitiv einführt, ſowohl σ_1 wie σ_2 poſitive, im vorliegenden Falle Druckbeanſpruchungen bedeuten; wenn der Punkt an der anderen Seite von *VV* liegt, etwa in *C'*, ſo würde *u* negativ, demnach $\sigma_2 = -\frac{M \sin \alpha \,.\, u}{B}$ werden. Man ſieht leicht, daſs alle Punkte, die in denjenigen von beiden Hauptaxen gebildeten Vierteln des Querſchnittes liegen, welche von *Q* geſchnitten werden, durch beide Momente Druck, bezw. Zug erhalten, daſs dagegen in den beiden anderen Vierteln die Spannungen σ_1 und σ_2 verſchiedene Vorzeichen haben.

Fig. 97.



Nach Vorſtehendem iſt allgemein 103. Null-Linie.

$$\sigma = M\left(\frac{v \cos \alpha}{A} + \frac{u \sin \alpha}{B}\right) \quad . \quad 62.$$

σ kann nur für diejenigen Querſchnittspunkte Null werden, für welche der Klammerfactor Null wird (der Fall $M = 0$ iſt belanglos); alle Punkte des Querſchnittes, in welchen die Spannung den Werth Null hat, genügen alſo der Gleichung

$$\frac{v \cos \alpha}{A} + \frac{u \sin \alpha}{B} = 0.$$

Dies iſt hier demnach die Gleichung der Null-Linie (ſiehe Art. 96, S. 75).

Löst man dieſe Gleichung nach *v* auf, ſo erhält man

$$v = -\frac{A}{B}\, u \operatorname{tg} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad 63.$$

Die beiden Veränderlichen *u* und *v* kommen nur in der erſten Potenz vor; mithin iſt die Linie eine Gerade.

Für $u = 0$ wird auch $v = 0$, woraus folgt, daſs die Null-Linie bei den gemachten Annahmen durch den Punkt *O*, den Schwerpunkt des Querſchnittes, geht.

In Fig. 97 ſei *NN* die Null-Linie. Die Werthe *u*, bezw. *v* ſind nach links, bezw. oben als poſitiv, nach rechts, bezw. unten als negativ eingeführt. Der

Winkel φ, welchen die Linie NN mit der positiven U-Axe einschliesst, hat nach Gleichung 63 die Tangente

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha .$$

Nach Fig. 97 ist aber auch $\operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{tg} \varphi'$; demnach ist

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 64.$$

Die Lage der Null-Linie ist also nur von der Querschnittsbildung (darauf weist der Quotient $\frac{A}{B}$ hin) und der Lage der Kraftebene zu den Hauptaxen (d. h. von α) abhängig, nicht aber von der Gröfse des Momentes.

Gleichung 64 giebt ein bequemes Mittel, die Lage der Null-Linie zu construiren. Zeichnet man (Fig. 97) für den betreffenden Querschnitt die Ellipse der Trägheitsmomente (siehe Art. 72, S. 51), so sind die beiden Halbaxen a und b derselben bezw.

$$a = \frac{K}{\sqrt{A}} \quad \text{und} \quad b = \frac{K}{\sqrt{B}} .$$

Die Gleichung der Ellipse ist bekanntlich $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$, und die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die geometrische Tangente an die Ellipse in einem Punkte, dessen Coordinaten u und v sind, mit der U-Axe einschliesst, ist

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u b^2}{v a^2} .$$

Die Coordinaten des Punktes D seien u_1 und v_1; alsdann ist für die Tangente in diesem Punkte der Winkel mit der positiven U-Axe gleich $180 - \beta$, somit

$$\frac{dv}{du} = -\operatorname{tg} \beta = -\frac{b^2 u_1}{a^2 v_1} = -\frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \alpha , \quad \text{d. h.} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \alpha .$$

Aus den oben stehenden Gleichungen für a und b folgt

$$A = \frac{K^2}{a^2} \quad \text{und} \quad B = \frac{K^2}{b^2} ;$$

Demnach ist $\operatorname{tg} \beta = \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha$. Nach Gleichung 64 ist aber auch $\operatorname{tg} \varphi' = \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha$; sonach

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \varphi' \quad \text{und} \quad \beta = \varphi' .$$

Die Null-Linie ist sonach parallel zu der Tangente, welche in demjenigen Punkte D an die Ellipse der Trägheitsmomente gelegt wird, in welchem die Schnittlinie der Kraftebene und des Querschnittes die Ellipse schneidet. Die Null-Linie ist also zur Tangente in D parallel.

Alle Querschnittspunkte mit gleich grofser Spannung σ, welche etwa die Gröfse $\sigma = C$ haben möge, genügen der Gleichung

$$C = M \left(\frac{v \cos \alpha}{A} + \frac{u \sin \alpha}{B} \right),$$

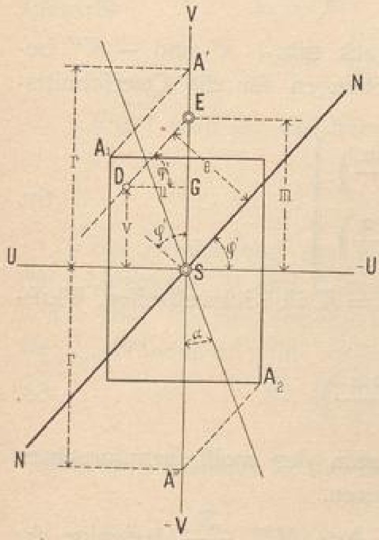
aus welcher folgt

$$v = \frac{A}{M} \frac{C}{\cos \alpha} - u \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 65.$$

Dies ist ebenfalls die Gleichung einer Geraden, und zwar einer solchen, welche den gleichen Winkel mit der UU-Axe einschliesst, wie die Null-Linie, auf deren sämmtlichen Punkten ja auch die Spannung gleich grofs (d. h. gleich Null) ist. Demnach folgt: Alle Querschnittspunkte, in welchen gleiche axiale Spannung herrscht, liegen auf einer zur Null-Linie parallelen Geraden; die Spannung σ iſt alſo direct proportional dem ſenkrechten Abſtande der Geraden von der Null-Linie.

Für die Spannung σ in einem beliebigen Punkte D des Querſchnittes mit den Coordinaten u und v ergiebt ſich durch Umformung der Gleichung 62 ein ſehr einfacher Ausdruck. Nach Gleichung 62 iſt

Fig. 98.



$$\sigma = M\left(\frac{v \cos \alpha}{A} + \frac{u \sin \alpha}{B}\right),$$

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{A}\left(v + \frac{u\,A}{B} \operatorname{tg} \alpha\right) = \frac{M}{A} \cos \alpha \,(v + u \operatorname{tg} \varphi').$$

Legt man parallel zur Null-Linie NN durch D eine Linie, welche die Hauptaxe VV im Punkte E ſchneidet, ſo iſt $\overline{SE} = \overline{SG} + \overline{GE}$, $\overline{SG} = v$ und $\overline{GE} = u \operatorname{tg} \varphi'$, alſo $\overline{SE} = v + u \operatorname{tg} \varphi'$. Wird $\overline{SE} = m$ geſetzt, ſo erhält man

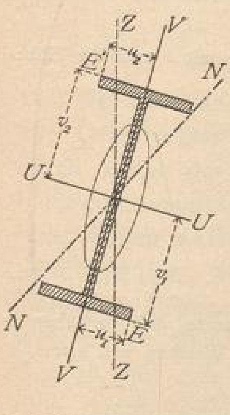
$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{A}\, m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 66.$$

Fällt man von S die Senkrechte auf die durch D gezogene Parallele zur Null-Linie, ſo iſt ihre Länge $e = m \cos \varphi'$ und

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{A \cos \varphi'}\, e.$$

Der Fall, daſs die Kraftebene die Balkenquerſchnitte nicht in Hauptaxen ſchneidet, kommt im Hochbau ſehr häufig vor, ſo z. B. bei den Dachpfetten, welche nach Fig. 99 mit einer Querſchnittsſeite in die Dachſchräge gelegt ſind, ferner bei I- oder ⊏-förmigen Walzbalken, welche Gewölbe tragen, falls der wagrechte Gewölbeſchub nicht vollſtändig (durch Anker etc.) aufgehoben iſt; auſserdem bei einer Anzahl von Querſchnittsformen, deren lothrechte Schwerpunktsaxe keine Hauptaxe iſt, wie bei gleichſchenkeligen und ungleichſchenkeligen Winkeleiſen, Z-Eiſen etc., falls die Belaſtung lothrecht iſt; auch die Gratſparren der Dächer gehören hierher. In allen dieſen Fällen darf man nicht nach der einfachen Formel 56 rechnen, muſs vielmehr die gröſste Beanſpruchung aus Gleichung 62 entnehmen und dann den Querſchnitt ſo beſtimmen, daſs die gröſste Beanſpruchung die zuläſſige Grenze nicht überſchreite. 104. Gröſste axiale Spannung; Querſchnitts-ermittelung.

Fig. 99.



Die Hauptaxen theilen den Querſchnitt in vier Quadranten; die gröſste Beanſpruchung wird in der Regel in denjenigen Querſchnittspunkten ſtattfinden, welche in den von der Kraftebene geſchnittenen Quadranten des Querſchnittes liegen. Allgemein kann man mittels der Verzeichnung der Null-Linie leicht diejenigen Punkte finden, welche die gröſste Beanſpruchung erleiden; denn da die Beanſpruchung der ſenkrechten Entfernung von der Null-Linie proportional iſt, ſo iſt ſie am gröſsten in denjenigen Querſchnittspunkten, welche, ſenkrecht zur Null-Linie gemeſſen, am weiteſten von derſelben entfernt liegen. So werden in Fig. 99 die Punkte E und E' am meiſten beanſprucht werden, erſterer bei der gewöhnlichen Drehrichtung der Momente auf

Zug, letzterer auf Druck. Werden die Coordinaten der meist beanspruchten Punkte mit $+u_1$, $+v_1$ und $-u_2$, $-v_2$ bezeichnet, wobei dieselben nach denjenigen Seiten als positiv gerechnet sind, an welchen die Einzelmomente $M \cos \alpha$, bezw. $M \sin \alpha$ Zug erzeugen, so ergiebt sich mit Rücksicht auf Gleichung 62

$$\sigma_{max} = M\left(\frac{v_1 \cos \alpha}{A} + \frac{u_1 \sin \alpha}{B}\right) \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = -M\left(\frac{v_2 \cos \alpha}{A} + \frac{u_2 \sin \alpha}{B}\right).$$

Falls die zulässigen Beanspruchungen auf Zug und Druck mit $+K'$ und $-K''$ bezeichnet werden, so erhält man als Bedingungsgleichungen für die Querschnittsbildung:

$$\left.\begin{aligned} K' &= M\left(\frac{v_1 \cos \alpha}{A} + \frac{u_1 \sin \alpha}{B}\right) \\ K'' &= M\left(\frac{v_2 \cos \alpha}{A} + \frac{u_2 \sin \alpha}{B}\right) \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad 67.$$

Bei denjenigen Baustoffen, für welche nahezu $K' = K'' = K$ ist (Schweisseisen, Flusseisen, Holz), vereinfachen sich die Gleichungen 67 in

$$K = M\left(\frac{v' \cos \alpha}{A} + \frac{u' \sin \alpha}{B}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 68.$$

Im letzten Ausdruck bedeuten v' und u' die Coordinaten des meist beanspruchten Punktes, bezogen auf die Hauptaxen als Coordinatenaxen.

$\frac{A}{v'}$ nennt man das Widerstandsmoment für die Axe UU, $\frac{B}{u'}$ dasjenige für die Axe VV; man setzt abkürzungsweise

$$\frac{A}{v'} = W_u \quad \text{und} \quad \frac{B}{u'} = W_v,$$

so dass Gleichung 68 nunmehr lautet:

$$K = \frac{M \cos \alpha}{W_u} + \frac{M \sin \alpha}{W_v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 69.$$

Für den rechteckigen Querschnitt ergiebt sich sehr einfach, wenn die Breite mit b und die Höhe mit h bezeichnet wird,

$$A = \frac{b h^3}{12}, \quad v' = \frac{h}{2}, \quad \frac{A}{v'} = W_u = \frac{b h^2}{6},$$

$$B = \frac{h b^3}{12}, \quad u' = \frac{b}{2}, \quad \frac{B}{u'} = W_v = \frac{h b^2}{6};$$

mithin aus Gleichung 69

$$K = \frac{6M}{bh}\left(\frac{\cos \alpha}{h} + \frac{\sin \alpha}{b}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 70.$$

Für einen bestimmten Fall sind K, M, α gegeben; b und h sind so zu bestimmen, dass vorstehende Gleichung erfüllt ist. Meistens wird ein mehrmaliges Versuchen mit verschiedenen Werthen von b und h erforderlich sein. Man kann der Gleichung 70 auch die Form geben:

$$K = \frac{6M}{b h^2}\left[\cos \alpha + \frac{h}{b} \sin \alpha\right];$$

im Mittel ist $\frac{h}{b} = 1{,}5$ und dann

$$K = \frac{6M}{b h^2}\left[\cos \alpha + 1{,}5 \sin \alpha\right].$$

Die Gleichung für die Querschnittsbestimmung lautet alsdann:

$$b h^2 = \frac{6M(\cos \alpha + 1{,}5 \sin \alpha)}{K} \quad \text{oder} \quad h^3 = \frac{6M(\cos \alpha + 1{,}5 \sin \alpha)}{K}.$$

In dieſem Ausdruck iſt auf der rechten Seite nur Bekanntes; man findet daraus leicht h und danach

$$b = \frac{2}{3} h .$$

Bezeichnet man die beiden in die Hauptaxenebenen fallenden Momente kurz mit M_1 und M_2, alſo

$$M_1 = M \cos \alpha \quad \text{und} \quad M_2 = M \sin \alpha ,$$

ſo wird

$$K = \frac{M_1}{W_u} + \frac{M_2}{W_v} = \frac{1}{W_u} \left(M_1 + M_2 \frac{W_u}{W_v} \right).$$

Führt man die abkürzende Bezeichnung $c = \frac{W_u}{W_v}$ ein, ſo wird [23])

$$K = \frac{1}{W_u} (M_1 + c\, M_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 71.$$

Zur Ermittelung des erforderlichen Querſchnittes kann dieſe Formel bequem für rechteckige, I- und ⊏-förmige Querſchnittsformen verwendet werden. Die Werthe von c ſind für die verſchiedenen Kaliber der Deutſchen Normal-Profile (I und ⊏) wenig veränderlich; für vorläufige Berechnungen kann man

für I-Eiſen	für ⊏-Eiſen
$c = 7$	$c = 5$

einführen. Alsdann iſt die Bedingungsgleichung für den Querſchnitt

$$W_u = \frac{M_1 + c\, M_2}{K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 72.$$

Man beſtimmt nach Gleichung 72 das erforderliche W_u und wählt danach aus den Tabellen das Profil; hat dieſes einen anderen Werth, als derjenige, welcher angenommen war, ſo nimmt man eine zweite, genauere Rechnung vor [24]).

Bezüglich der einfachen Behandlung unſymmetriſcher Querſchnittsformen (Z-Eiſen, Γ-Eiſen u. dergl.) wird auf Art. 114 verwieſen.

Für die Berechnung bequem iſt auch Gleichung 66:

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{A} m ,$$

weil ſie nur das Seitenmoment in der Ebene der einen Hauptaxe enthält. Für alle Querſchnittspunkte, welche in der Hauptaxe VV liegen, iſt die Spannung durch das in der Ebene der UU wirkende Seitenmoment gleich Null; für alle dieſe Querſchnittspunkte kommt alſo nur das Seitenmoment ($M \cos \alpha$) in Frage. Mit den Spannungen dieſer Punkte kennt man aber auch die Spannungen derjenigen Querſchnittspunkte, welche in bezw. gleichen, ſenkrecht gemeſſenen Abſtänden von der Null-Linie liegen, wie dieſe. Gröſste Beanſpruchung findet in den Punkten ſtatt, welche den weiteſten Abſtand (ſenkrecht gemeſſen) von der Null-Linie haben. In Fig. 98 ſind dies die Punkte A_1 und A_2. Um ihre Spannungen zu ermitteln, lege man durch dieſelben Parallele zur Null-Linie, welche die VV-Axe bezw. in A' und A'' ſchneiden. Alsdann iſt in A_1, bezw. A_2, ſo wie in A' und A''

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \pm \frac{M \cos \alpha}{A} r .$$

[23]) Siehe: Land, R. Profilbeſtimmung von I- und ⊏-Trägern bei ſchiefer Belaſtung. Zeitſchr. d. Ver. deutſch. Ing. 1895, S. 293.

[24]) In Theil III, Band 2, Heft 4 (Abth. III, Abſchn. 2, E, Kap. 34, unter a) dieſes »Handbuches« werden die Tabellen für c vorgeführt und einige Beiſpiele durchgerechnet werden.