Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

c) Allgemeine Untersuchung der Biegungsspannungen mit Zuhilfenahme der Trägheitskreise

c) Allgemeine Unterſuchung der Biegungsſpannungen mit Zuhilfenahme der Trägheitskreiſe.

105. Spannungen an beliebiger Stelle des Querſchnittes.

Für den allgemeinen Fall, der durch Fig. 100 dargeſtellt iſt, ſchneide die an der einen Seite des Querſchnittes wirkende Mittelkraft R den Querſchnitt im Punkte E (bezw. E'); S ſei der Schwerpunkt des Querſchnittes; die Kraftebene ſchneide den Querſchnitt nicht in einer Hauptaxe. Wie in Art. 95 (S. 73) wird die Annahme gemacht, daſs die axialen Spannungen σ der einzelnen Querſchnittspunkte in linearer Abhängigkeit von ihrer Lage ſtehen. Trägt man alſo in jedem Querſchnittspunkte die axiale Spannung ſenkrecht zum Querſchnitt als Ordinate auf, ſo liegen die Endpunkte aller Ordinaten auf einer Ebene, der Spannungsebene. Die Gleichung dieſer Ebene iſt auch die Gleichung für σ. Spannungsebene und Querſchnittsebene ſchneiden einander in einer Geraden; in allen Punkten dieſer Geraden hat die Spannung, d. h. die Ordinate der Spannungsebene, den Werth Null. Dieſe Linie iſt die ſog. Null-Linie (neutrale Linie). Fig. 101 zeigt die Spannungsebene, den Querſchnitt (welcher der Einfachheit halber rechtwinkelig eingetragen iſt) und die Null-Linie NN. Eine ſenkrecht zur Querſchnittsebene parallel zur Linie NN hindurch gelegte Ebene ſchneidet den Querſchnitt und die Spannungsebene in zwei Parallelen $1\,1$ und $2\,2$. Daraus folgt: Alle Punkte des Querſchnittes, welche auf einer Geraden liegen, die parallel zur Null-Linie iſt, haben gleiche Spannung σ (vergl. auch Art. 103, S. 81). Die Spannung in den einzelnen Punkten der Linie $1\,1$ iſt alſo unabhängig von der beſonderen Lage des Punktes in der Linie; ſie hängt nur von dem Abſtande der Linie $1\,1$ und der Null-Linie ab. Bezeichnet man dieſen Abſtand, rechtwinkelig gemeſſen, mit η, ſo iſt $\sigma = C\eta$. In dieſem Ausdruck iſt C eine noch zu beſtimmende Conſtante.

Fig. 100.

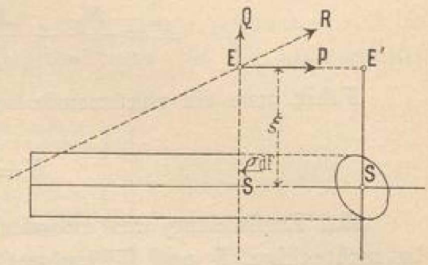
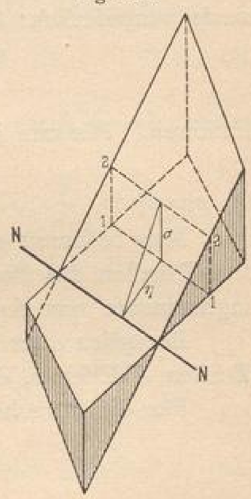
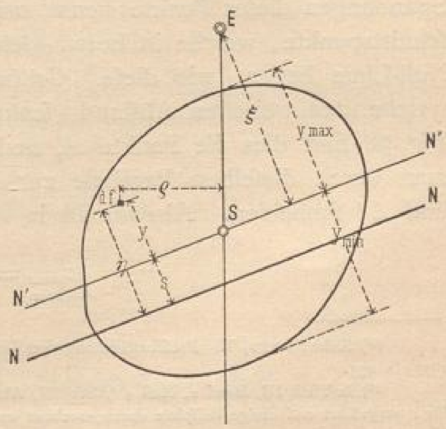


Fig. 101.



Durch den Schwerpunkt S des Querſchnittes (Fig. 102) werde eine Axe $N'N'$ parallel zur Null-Linie NN gelegt; der Abſtand beider Axen ſei s. Alsdann ſei $\eta = y + s$, d. h. der ſenkrechte Abſtand eines beliebigen Querſchnittspunktes von der Null-Linie ſei gleich η und von der Linie $N'N' = y$. Die an der einen Seite des Querſchnittes auf den Balken wirkende Mittelkraft R (Fig. 100) ſchneide den Querſchnitt im Punkte E. Die Linie ES, in welcher die Kraftebene den Querſchnitt ſchneidet, wird die Kraftlinie genannt. Die Beziehungen, welche zwiſchen der Lage der Kraftlinie und Null-Linie beſtehen, ſo wie die Gröſse von σ

Fig. 102.



ergeben ſich aus den Gleichgewichtsbedingungen. Die Mittelkraft R (Fig. 100) wird in die Axialkraft P und in die Querkraft Q zerlegt; ſie muſs mit den im Querſchnitt anzubringenden Spannungen im Gleichgewicht ſein, d. h. es muſs ſtattfinden:

I) $0 = P - \int \sigma \, df$ (algebraiſche Summe der Kräfte, welche in der Richtung der Axe wirken, gleich Null).

II) $0 = P\xi - \int \sigma y \, df$ (algebraiſche Summe der Momente für die Axe $N'N'$ gleich Null).

III) $0 = \int \sigma \rho \, df$ (algebraiſche Summe der Momente für die Kraftlinie, d. h. für die Axe ES, gleich Null).

Unter ρ iſt der normal gemeſſene Abſtand eines Querſchnittspunktes von der Kraftlinie ES verſtanden. Beachtet man, daſs $\sigma = C\eta = C(y+s)$ iſt, ſo erhält man aus Gleichung I

$$P = C \int (y+s)\, df = C \int y \, df + C \int s \, df.$$

Da $N'N'$ eine Schwerpunktsaxe iſt, ſo iſt

$$\int y \, df = 0, \quad \text{alſo} \quad P = Cs \int df = CsF, \ \text{d. h.}$$

IV) $$C = \frac{P}{sF}.$$

Aus Gleichung II ergiebt ſich

$$P\xi = C \int y^2 \, df + Cs \int y \, df \quad \text{und mit} \quad \int y \, df = 0$$

$$P\xi = C \, . \int y^2 \, df.$$

$\int y^2 \, df$ iſt das Trägheitsmoment der Querſchnittsfläche für die zur Null-Linie parallele Schwerpunktsaxe; daſſelbe ſoll kurz mit $\mathcal{J}$ bezeichnet, eben ſo $P\xi = M$ geſetzt werden. Dann wird $M = C\mathcal{J}$ und

V) $$C = \frac{M}{\mathcal{J}}.$$

Die Gleichſetzung von IV und V ergiebt

$$s = \frac{P}{F} \frac{\mathcal{J}}{M} = \frac{P\mathcal{J}}{F.P\xi} = \frac{\mathcal{J}}{F\xi},$$

VI) $$s = \frac{\mathcal{J}}{F\xi}.$$

Nach Art. 71 (S. 51) iſt $\mathcal{J} = Fi^2$, worin i den Trägheitsradius bezeichnet, d. h.

VI a) $$s = \frac{i^2}{\xi}.$$

Gleichung VI a beſagt: i iſt die mittlere geometriſche Proportionale zwiſchen s und ξ. Wenn ξ und i bekannt ſind, ſo kann man daraus leicht den Abſtand s der Null-Linie vom Schwerpunkt finden.

Aus Gleichung III folgt endlich:

$$\int \sigma \rho \, df = C \int (y+s) \rho \, df = 0,$$

$$\int y \rho \, df + s \int \rho \, df = 0.$$

$\int \rho \, df$ ift das ftatifche Moment der Querfchnittsfläche für die Schwerpunktsaxe ES, d. h. es ift $\int \rho \, df = 0$, mithin auch

VII) $$\int \eta \rho \, df = 0 .$$

Gleichung VII befagt, dafs das Centrifugalmoment für die beiden Axen: Kraftlinie $\overline{ES}$ und die zur Null-Linie parallele Schwerpunktsaxe, gleich Null ift, d. h. beide Axen find conjugirt (fiehe Art. 67, S. 46). Demnach ift bewiefen: Die Kraftlinie und die durch den Schwerpunkt des Querfchnittes parallel zur Null-Linie gezogene Axe $N'N'$ find conjugirte Axen. Daraus ergiebt fich eine fehr einfache, unten folgende Conftruction.

Aus der Gleichung $s = \frac{P}{M} \frac{\mathfrak{J}}{F}$ folgt noch, dafs falls die Axialkraft P gleich Null ift, ohne dafs auch M gleich Null ift, dann der Abftand s der Null-Linie vom Schwerpunkt ebenfalls Null ift. Alfo: Wenn die Axialkraft gleich Null ift, fo geht die Null-Linie durch den Schwerpunkt des Querfchnittes (fiehe auch Art. 96, S. 75).

Es war $\sigma = C \eta = C (y + s)$, und mit Rückficht auf Gleichung V u. VI wird

$$\sigma = \frac{M}{\mathfrak{J}} y + \frac{M}{\mathfrak{J}} \frac{\mathfrak{J}}{F \xi} = \frac{M}{\mathfrak{J}} y + \frac{P \xi \mathfrak{J}}{\mathfrak{J} F \xi} = \frac{M}{\mathfrak{J}} y + \frac{P}{F} .$$

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{\mathfrak{J}} y \quad \ldots \ldots \ldots \quad 73.$$

Dies ift genau derfelbe Ausdruck, welcher in Art. 95 (S. 73) für den Fall gefunden ift, dafs die Kraftebene alle Querfchnitte in Hauptaxen fchneidet; nur beziehen fich in der hier entwickelten Gleichung M und $\mathfrak{J}$ auf diejenige Schwerpunktsaxe, welche der Kraftlinie conjugirt (d. h. parallel zur Null-Linie) ift. In der früheren Gleichung bezogen fich M und $\mathfrak{J}$ auf die eine Hauptaxe, wenn die Kraftlinie die andere Hauptaxe war. Man fieht, dafs die frühere Gleichung ein Sonderfall der foeben entwickelten allgemein giltigen Gleichung ift.

Aus Gleichung 73 folgt:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{P}{F} + \frac{M}{\mathfrak{J}} y_{max} \\ \sigma_{min} &= \frac{P}{F} - \frac{M}{\mathfrak{J}} y_{min} \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 74.$$

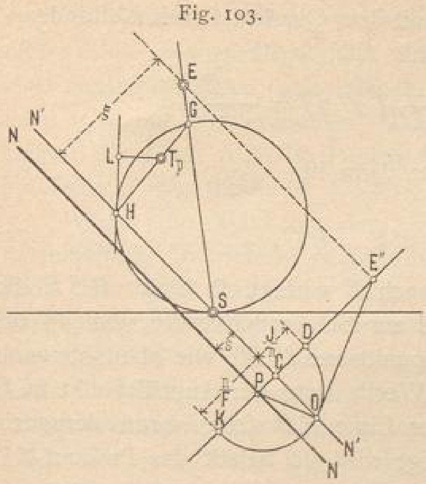
Maximum und Minimum der Spannungen ergeben fich in denjenigen Querfchnittspunkten, durch welche die weiteft gezogenen Parallelen zur Null-Linie möglich find.

106. Lage der Null-Linie; graphifche Ermittelung mittels des Trägheitskreifes.

Da die Kraftlinie ES und die zur Null-Linie parallele Schwerpunktsaxe $N'N'$ conjugirt find, fo ergiebt fich die folgende Conftruction (Fig. 103).

Man conftruire den Trägheitskreis des Querfchnittes mit dem Durchmeffer $\mathfrak{J}_p$ (fiehe Art. 68, S. 46), fuche T_p, den Trägheitshauptpunkt, ziehe die Kraftlinie $\overline{SE}$ und verbinde den Schnittpunkt G der Kraftlinie und des Trägheitskreifes mit T_p. Die Linie $\overline{GT_p}$ fchneide den Kreis zum zweiten Male in H; alsdann ift $\overline{SH}$ die zu $\overline{SE}$ conjugirte Axe, weil das Centrifugalmoment des Querfchnittes für beide Axen SE und SH Null ift (fiehe Art. 67, S. 46). Die Linie $\overline{SH}$ ift alfo zur Null-Linie NN parallel; der fenkrechte Abftand beider ift s, und es ift $s = \frac{\mathfrak{J}}{F \xi}$. In Fig. 103 wird $\mathfrak{J}$, bezogen auf die Axe $N'N'$, dargeftellt durch die Länge $\overline{LT_p}$. Ift der Mafsftab für den Trägheitskreis derart, dafs 1 cm n cm²

Fig. 103.



bedeutet, so ist $\mathfrak{J} = \overline{L\,T_p}\,.\,n$ und $\overline{L\,T_p} = \frac{\mathfrak{J}}{n}$. Man kann den Ausdruck für s, ohne etwas zu ändern, im Zähler und Nenner durch n dividiren und erhält

$$s\,\xi = \frac{\mathfrak{J}}{n}\,\frac{n}{F}\,.$$

Daraus folgt: Auf einer senkrecht zur Linie $N'\,N'$ gezogenen Linie mache man $\overline{CD} = \frac{\mathfrak{J}}{n} = \overline{L\,T_p}$, $\overline{CK} = \frac{n}{F}$ und schlage über $\overline{DK}$ einen Halbkreis; alsdann ist

$$\overline{CO}^2 = \overline{CD}\,.\,\overline{CK} = \frac{\mathfrak{J}}{n}\,\frac{n}{F}\,.$$

Nunmehr mache man $\overline{CE''} = \xi$, ziehe $\overline{E''O}$ und in O die Senkrechte $\overline{OP}$ zu $\overline{OE''}$. Dann ist auch $\overline{CP}\,.\,\overline{CE''} = \overline{CO}^2$, d. h.

$$\overline{CP}\,.\,\xi = \frac{\mathfrak{J}}{n}\,\frac{n}{F} \quad \text{oder} \quad \overline{CP} = \frac{\mathfrak{J}}{n}\,\frac{n}{F\,\xi} = s\,.$$

Die parallel zu $N'\,N'$ durch P gezogene Linie ist also die gesuchte Null-Linie NN.

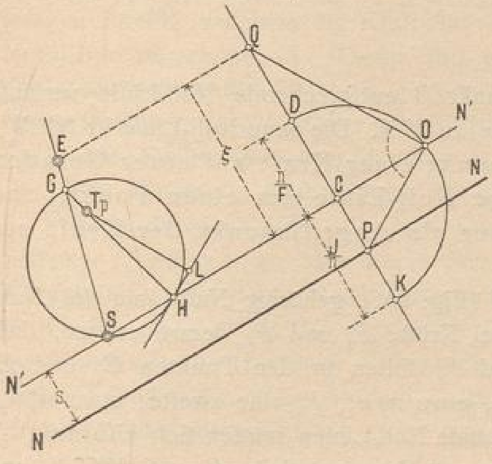
Es sei z. B. $n = 100\,\text{cm}^3$ und $F = 22\,\text{qcm}$. Alsdann ist $\frac{n}{F} = \frac{100}{22} = 4{,}54\,\text{cm}$.

Man kann zur Auffindung von s auch die Gleichung $s\,\xi = i^2$ benutzen, indem man $\overline{L\,T_p}$ abgreift, ausrechnet und den erhaltenen Werth für $\mathfrak{J}$ durch F dividirt. Macht man nun $\overline{CO} = i$, $\overline{CE''} = \xi$, zieht $\overline{OE''}$ und durch O senkrecht zu $\overline{OE''}$ die Linie $\overline{OP}$, so ist $\overline{CP} = s$.

Die umgekehrte Aufgabe, aus der Lage der Null-Linie den zugehörigen Angriffspunkt E zu ermitteln, wird in gleicher Weise gelöst.

Trägheitskreis und Trägheitshauptpunkt T_p werden verzeichnet; es sei NN (Fig. 104) als Null-Linie vorgeschrieben. Man ziehe durch den Schwerpunkt S eine Linie $N'\,N'$ parallel zur Null-Linie NN; alsdann ist die Kraftlinie conjugirt zu $N'\,N'$. Der zweite Durchschnittspunkt von $N'\,N'$ mit dem Kreise sei H; man verbinde H mit T_p; $\overline{H\,T_p}$ schneide den Kreis zum zweiten Male in Punkt G; $\overline{SG}$ ist die gesuchte zu $N'\,N'$ conjugirte Axe, also die Kraftlinie, d. h. auf $\overline{SG}$ liegt der gesuchte Angriffspunkt E. Nunmehr ist noch der senkrechte Abstand ξ des Punktes E von der Axe $N'\,N'$ zu ermitteln. Es ist $\xi = \frac{1}{s}\,\frac{\mathfrak{J}}{n}\,\frac{n}{F}$. Man ziehe eine Linie senkrecht zur Null-Linie, mache auf derselben $\overline{CK} = \frac{\mathfrak{J}}{n} = \overline{T_p L}$, $\overline{CD} = \frac{n}{F}$ und schlage über $\overline{DK}$ einen Halbkreis; alsdann ist

Fig. 104.



$$\overline{CO}^2 = \frac{\mathfrak{J}}{n}\,\frac{n}{F}\,.$$

Zieht man ferner $\overline{OP}$ und durch O senkrecht zu $\overline{OP}$ die Linie $\overline{OQ}$, so ist $\overline{CO}^2 = \overline{CP}\,.\,\overline{CQ} = s\,.\,\overline{CQ}$, d. h. $\overline{CQ} = \frac{\overline{CO}^2}{s} = \frac{\mathfrak{J}}{n}\,\frac{n}{F}\,\frac{1}{s} = \xi$. Die durch Q parallel zu $N'\,N'$ gezogene Linie schneidet die Kraftlinie $\overline{SG}$ im gesuchten Punkte E, welcher beiden Bedingungen genügt: er liegt auf der Kraftlinie und im senkrecht gemessenen Abstande ξ von der Axe $N'\,N'$.

Der Winkel der Kraftlinie $\overline{SE}$ mit der Senkrechten zur Null-Linie sei δ 107.
(Fig. 105); dann ist $\overline{SB} = s' = \frac{s}{\cos\delta}$ und $\overline{ES} = \xi' = \frac{\xi}{\cos\delta}$, mithin

Weitere Beziehungen zwischen der Null-Linie und dem Angriffspunkt der Kraft.

$$s\,\xi = \frac{\mathfrak{J}}{F} = s'\,\xi'\,.\,\cos^2\delta \quad \text{oder} \quad s'\,\xi' = \frac{\mathfrak{J}}{\cos^2\delta}\,\frac{1}{F}\,.$$

Multiplicirt man jedes Flächentheilchen df mit dem Quadrat ſeines Abſtandes y' von $N'N'$, gemeſſen in der Richtung der Kraftlinie ES, ſo iſt

$$\int df \cdot y'^2 = \int df \frac{y^2}{\cos^2 \delta} = \frac{1}{\cos^2 \delta} \int y^2 \, df = \frac{\mathcal{J}}{\cos^2 \delta}.$$

Es werde $\mathcal{J}' = \frac{\mathcal{J}}{\cos^2 \delta}$ und $F i_1^2 = \mathcal{J}'$ geſetzt; dann iſt

$$s' \xi' = \frac{\mathcal{J}'}{F} = i_1^2 \quad \text{und} \quad s' \xi' = i_1^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 75.$$

Wird der Angriffspunkt der Kraft von E nach B verlegt, ſo bleibt BSE die Kraftlinie wie zuvor; die Null-Linie läuft parallel zur Schwerpunktsaxe, welche zur Kraftlinie conjugirt iſt, d. h. zu derſelben Schwerpunktsaxe $N'N'$, wie oben. Sonach haben ſowohl $\mathcal{J}$ und $\mathcal{J}'$, wie auch i_1^2 denſelben Werth, mag der Angriffspunkt in E oder B oder in irgend einem anderen Punkt der Linie EB ſein; wenn demnach der Angriffspunkt der Kraft von E nach B verlegt wird, ſo behält das Product $s'\xi'$

Fig. 105.

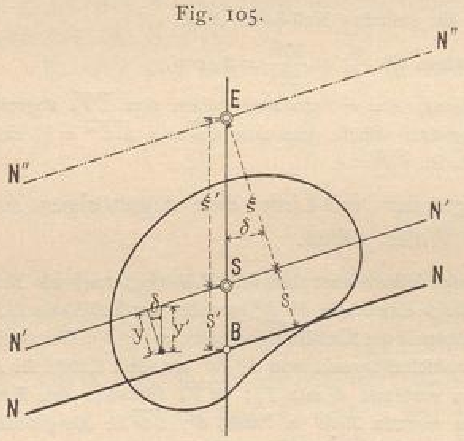
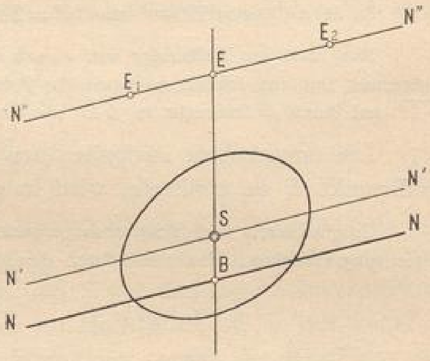


Fig. 106.



denſelben Werth i_1^2. Die dem Angriffspunkt B entſprechende Null-Linie verläuft alſo durch E und iſt parallel zu $N'N'$, d. h. zu NN. Die neue Null-Linie iſt $N''N''$.

S a t z: Bewegt ſich der Angriffspunkt einer Kraft auf einer Geraden ($N''N''$), ſo dreht ſich die zugehörige Null-Linie um einen Punkt, und zwar um denjenigen Punkt B, welcher als Angriffspunkt der Kraft zur Null-Linie $N''N''$ gehören würde.

B e w e i s: Die zum Angriffspunkt E (Fig. 106) gehörige Null-Linie ſei NN. Die in E wirkende Kraft werde durch zwei Kräfte P_1 und P_2 derart erſetzt, daſs ihre Mittelkraft P durch E geht; P_1 und P_2 ſollen in den Punkten E_1 und E_2 wirken. P_1 erzeugt irgend eine Null-Linie, etwa $n_1 n_1$, P_2 eine zweite, etwa $n_2 n_2$; die reſultirende Null-Linie muſs NN ſein; beide Null-Linien müſſen ſich alſo auf NN ſchneiden. Nun liege P_1 feſt, alſo auch $n_1 n_1$; dagegen gleite P_2 auf $N''N''$ und ändere ſeine Gröſse dabei ſo, daſs die Mittelkraft von P_1 und P_2 immer durch E geht. Dann bleibt auch die reſultirende Null-Linie beſtändig NN; auch der Schnittpunkt von $n_1 n_1$ und $n_2 n_2$ muſs immer auf NN bleiben, und da $n_1 n_1$ ruht, ſo darf auch der Schnittpunkt nicht gleiten. Bewegt ſich alſo der Angriffspunkt einer Kraft, hier derjenige von P_2, auf einer Geraden $N''N''$, ſo dreht ſich die zugehörige Null-Linie, hier $n_2 n_2$, um einen feſten Punkt. Die Lage dieſes feſten Punktes ergiebt ſich folgendermaſsen. Rückt die Kraft P_2, alſo auch der Punkt E_2, unendlich weit, fo wird die Linie $S \cdot \infty$, welche mit $N' N'$ zufammenfällt, die Kraftlinie, und diefer Linie conjugirt mufs die Null-Linie $n_2 n_2$ fein. Nun find aber $\overline{N' N'}$ und $\overline{S E}$ zwei conjugirte Axen; alfo fällt für diefe Lage des Punktes E_2 die zugehörige Null-Linie $n_2 n_2$ mit $\overline{S E}$ zufammen. Die Null-Linie $n_2 n_2$ fchneidet demnach für eine ihrer Lagen die Linie NN im Punkte B, und da der Schnittpunkt von NN und $n_2 n_2$ ein fefter Punkt ift, fo ift B diefer fefte Drehpunkt. Damit ift obiger Satz bewiefen.

Wenn die Null-Linie den Querfchnitt fchneidet, fo findet auf beiden Seiten derfelben im Querfchnitt verfchiedenartige Beanfpruchung ftatt. Da nun jeder Null-Linie eine ganz beftimmte Lage des Angriffspunktes E entfpricht, fo liegt die Frage nahe: In welchen Grenzen mufs E liegen, damit ftets im ganzen Querfchnitt nur eine Art der Beanfpruchung ftattfindet, nur Zug oder nur Druck? Die Null-Linie darf offenbar höchftens den Querfchnitt berühren, wenn die Bedingung gleichartiger Beanfpruchungsweife im Querfchnitt erfüllt fein foll. Läfft man die Null-Linie alle möglichen Lagen der Berührenden des Querfchnittes einnehmen und ermittelt die zugehörigen Angriffspunkte E der Kraft, fo ergiebt die Verbindungslinie diefer Punkte eine Figur, welche man den Kern des Querfchnittes nennt. So lange der Angriffspunkt E der Kraft innerhalb des Kernes oder der Kernfläche liegt, fällt die Null-Linie aufserhalb des Querfchnittes, und im Querfchnitt herrfcht nur Zug oder nur Druck. 108. Kern des Querfchnittes.

Demnach ergiebt fich der Kern des Querfchnittes durch die folgende Conftruction. Man laffe die Null-Linie alle Lagen einnehmen, in denen fie den Querfchnitt berührt, ermittele für jede derfelben den zugehörigen Angriffspunkt E der Kraft und verbinde die Punkte E miteinander.

Für die Conftruction ift noch das Nachftehende zu beachten. In Art. 107 (S. 89) ift der Satz gefunden: Bewegt fich der Angriffspunkt E auf einer Geraden, fo dreht fich die zugehörige Null-Linie um einen feften Punkt B, und zwar denjenigen Punkt, welchem als Kraft-Angriffspunkt die Weggerade des Punktes E als Null-Linie zugeordnet ift. Diefer Satz gilt auch umgekehrt, da zu jeder Null-Linie ein ganz beftimmter Punkt E gehört, d. h. dreht fich die Null-Linie um einen feften Punkt B, fo gleitet der Angriffspunkt E auf einer Geraden, welche als Null-Linie dem Punkte B zugeordnet ift.

Die Benutzung diefes Satzes foll an einigen Querfchnitten gezeigt werden.

Beim Rechteck (Fig. 107) lege man die Null-Linie nach einander in die vier Seiten *11*, *22*, *33*, *44* des Rechteckes und ermittele die Lage der zugehörigen Kernpunkte. Die durch den Schwerpunkt S zur Null-Linie *11* gezogene Parallele ift die Hauptaxe XX; der zugehörige Angriffspunkt I der Kraft liegt auf der conjugirten Axe; zur Hauptaxe XX ift die andere Hauptaxe YY conjugirt; alfo liegt Punkt I auf diefer. Der Abftand ξ des Kernpunktes I von der Axe XX ift nach Früherem aus der Gleichung 109. Kern des Rechteckes.

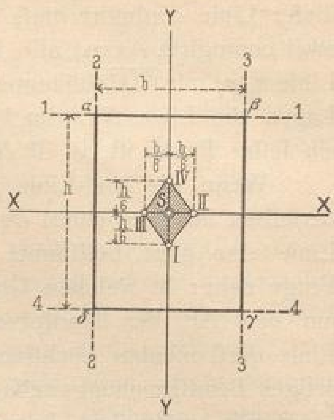
$$s \xi = \frac{\mathcal{J}}{F} = \frac{A}{F} = \frac{b h^3}{12 b h} = \frac{h^2}{12}$$

zu finden. Hier ift $s = \frac{h}{2}$, alfo das gefuchte

$$\xi = \frac{h^2 . 2}{12 h} = \frac{h}{6} .$$

Zu beachten ift, dafs Kernpunkt und Null-Linie nach der Entwickelung obiger Formel auf verfchiedenen Seiten der Schwerpunktsaxe XX liegen müffen. Eben fo findet man für die Null-Linie *44* den Punkt *IV*, welcher um $\frac{h}{6}$ über *XX* liegt. Für die Null-Linien *22* und *33* müssen die Kernpunkte auf der Hauptaxe *XX* liegen; die Abstände ξ' sind, weil hier $s' = \frac{b}{2}$ ist,

Fig. 107.



$$\xi' \frac{b}{2} = \frac{B}{F} = \frac{h b^3}{12 b h} = \frac{b^2}{12} \quad \text{oder} \quad \xi' = \frac{b}{6}.$$

Damit sind die Punkte *II* und *III* gefunden.

Aufser den vier betrachteten Lagen der Null-Linie sind noch andere Grenzlagen möglich, indem sich die Null-Linie aus der Lage *11* in die Lage *22* bewegt und dabei um den Punkt α dreht. Bei dieser Drehung gleitet der Kernpunkt auf einer Geraden, für welche bereits zwei Punkte *I* und *II* gefunden sind, nämlich für die Lagen *11* und *22* dieser Linie. Die Verbindungslinie *I II* ist demnach diese Gerade. Eben so gleitet der Kernpunkt auf *I III*, während die Null-Linie sich aus Lage *11* in *33* um den Punkt β dreht und so weiter. Man erhält in dieser Weise die in Fig. 107 schraffirte Kernfläche.

110. Kern des Kreises.

Beim Kreis sind alle Axen Hauptaxen. Die Null-Linien sind Tangenten an den Kreis; demnach sind in der Gleichung $s\,\xi = \frac{\mathcal{J}}{F}$ die Gröfsen $s = \frac{d}{2}$, $\mathcal{J} = \frac{d^4 \pi}{64}$, $F = \frac{d^2 \pi}{4}$ und der Abstand des Kernpunktes vom Mittelpunkt des Kreises für alle Tangenten $\xi = \frac{d^2}{16}\,\frac{2}{d} = \frac{d}{8}$. Die Kernfläche ist also ein Kreis mit dem Halbmesser $\frac{d}{8}$, bezw. dem Durchmesser $\frac{d}{4}$.

111. Kern des Kreisringes.

Beim Kreisring mit dem äufseren Durchmesser *D* und dem inneren Durchmesser *d* ist $s = \frac{D}{2}$, $\mathcal{J} = \frac{(D^4 - d^4)\,\pi}{64}$, $F = (D^2 - d^2)\,\frac{\pi}{4}$,

$$\xi = \frac{\mathcal{J}}{F s} = \frac{(D^4 - d^4)\,2}{(D^2 - d^2)\,16\,D} = \frac{(D^2 + d^2)}{8\,D} = \frac{D}{8}\left[1 + \frac{d^2}{D^2}\right].$$

Der Halbmesser der kreisförmigen Kernfläche ist also

$$k = \frac{D}{8}\left[1 + \frac{d^2}{D^2}\right].$$

112. Kern des I-Eisens.

Beim **I**-Eisen liegen auf der *YY*-Axe die Kernpunkte von der *XX*-Axe um

$$k_1 = \pm \frac{2\,A}{F\,h}$$

entfernt; auf der *XX*-Axe liegen die Kernpunkte von der *YY*-Axe, bezw. um

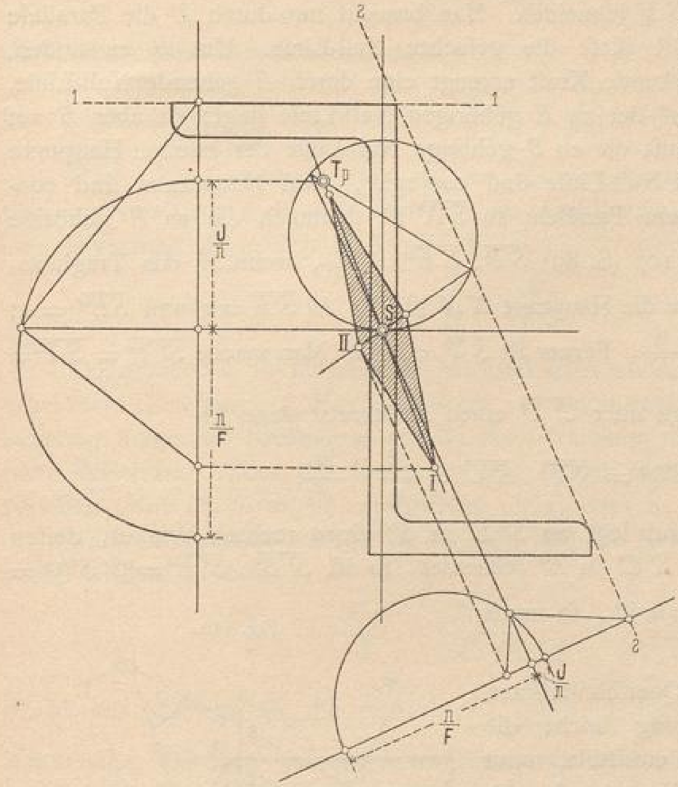
$$k_2 = \pm \frac{2\,B}{F\,b}$$

entfernt. Die Eckpunkte sind wie beim Rechteck durch Gerade zu verbinden.

113. Graphische Ermittelung des Kernes.

Bei unregelmäfsigen Querschnitten bestimmt man zweckmäfsig die Kernfläche mit Hilfe des Trägheitskreises. Dabei handelt es sich hauptsächlich um die wiederholte Löfung der in Art. 106 (S. 89) behandelten Aufgabe, aus der vorgeschriebenen Lage der Null-Linie den zugehörigen Angriffspunkt *E* der Kraft zu ermitteln. Man läfst die Null-Linie den Querschnitt umhüllen; bei der Drehung der Null-Linie um

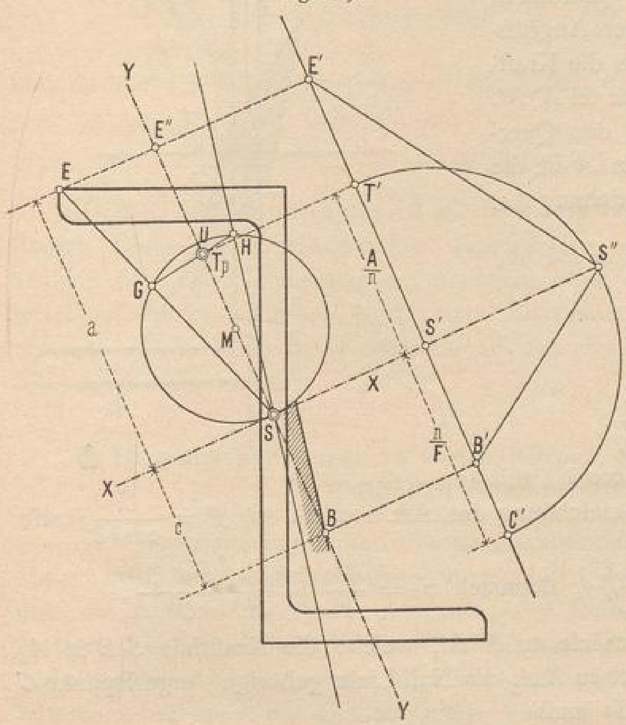
Fig. 108.



einen Punkt aus der einen Lage in eine benachbarte Lage beſchreibt der zugehörige Kernpunkt die Verbindungslinie der beiden Kernpunkte, welche zu den entſprechenden Nachbarlagen der Null-Linie gehören. Fig. 108 zeigt die Conſtruction des Kernes für ein **Z**-Eiſen.

Man kann auch die Eckpunkte des Querſchnittes nach dem Satz in Art. 108 (S. 91) als Angriffspunkte der Kraft annehmen und für dieſe die zugehörigen Null-Linien conſtruiren; denn während die Null-Linie ſich um den Eckpunkt dreht, beſchreibt der Kernpunkt eine Gerade, welche als Null-Linie dem Eckpunkt als Angriffspunkt der Kraft zugeordnet iſt. Dieſe Conſtruction zeigt Fig. 109.

Fig. 109.



Es empfiehlt ſich, zuvor die Hauptaxen des Querſchnittes zu ermitteln, was ja nach Verzeichnung eines Trägheitskreiſes leicht iſt. Nunmehr verzeichne man einen neuen Trägheitskreis ſo, daſs T_p auf ſeinem Durchmeſſer liegt; dann ſind SX und SY die Hauptaxen; ferner iſt

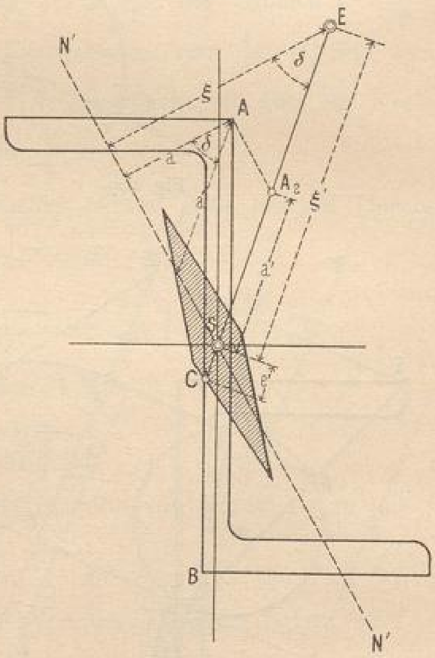
$$\overline{S\,T_p} = \frac{A}{n} \quad \text{und} \quad \overline{T_p\,U} = \frac{B}{n}.$$

Iſt E einer der Angriffspunkte der Kraft, für welchen die zugehörige Null-Linie geſucht wird, ſo ziehe man $\overline{SE}$; der Schnittpunkt dieſer Linie mit dem Trägheitskreiſe ſei G; man ziehe $\overline{G\,T_p\,H}$; H iſt der zweite Schnittpunkt der Linie $\overline{G\,T_p}$ mit dem Trägheitskreiſe. Dann iſt $\overline{SH}$ die Richtung der Null-Linie; letztere iſt bekannt, ſobald man noch einen Punkt kennt, durch welchen sie gehen mufs, z. B. den Punkt B, in welchem sie die Hauptaxe $\overline{SY}$ schneidet. Man braucht nur durch B die Parallele zu $\overline{SH}$ zu ziehen; dann ist diese die gesuchte Null-Linie. Um B zu finden, beachte man: Eine in B wirkende Kraft erzeugt eine durch E gehende Null-Linie, da B nach der Annahme auf der zu E gehörigen Null-Linie liegt; da aber B auf der einen Hauptaxe liegt, mufs die zu B gehörige Null-Linie der zweiten Hauptaxe parallel sein (Kraftlinie und Null-Linie sind conjugirt, zwei Hauptaxen sind conjugirt). Die durch E gezogene Parallele zu $\overline{SX}$ ist demnach die zu B gehörige Null-Linie, mithin nach Art. 107 (S. 89) $\overline{SB} \cdot \overline{SE''} = \frac{A}{F}$, wenn A das Trägheitsmoment des Querschnittes für die Hauptaxe XX ist. Es sei $\overline{SB} = c$ und $\overline{SE''} = a$; dann ist $ac = \frac{A}{F} = \frac{A}{n} \cdot \frac{n}{F}$. Ferner ist $\overline{ST_p} = \frac{A}{n}$. Man mache $\overline{S'T'} = \overline{ST} = \frac{A}{n}$, $\overline{S'C'} = \frac{n}{F}$ und schlage über $\overline{C'T'}$ einen Halbkreis; dann ist

$$(S'S'')^2 = \overline{S'T'} \cdot \overline{S'C'} = \frac{A}{n} \cdot \frac{n}{F}.$$

Verbindet man S'' mit E' und legt an $S''E'$ in S'' einen rechten Winkel, dessen zweiter Schenkel die Linie $E'C'$ in B' schneidet, so ist $\overline{S'B'} \cdot \overline{S'E'} = (S'S'')^2 = \frac{A}{n} \cdot \frac{n}{F}$, und da $S'E' = a$ ist, so mufs $S'B' = c$ sein.

Fig. 110.



114.
Spannung in einem Umfangspunkte des Querschnittes, ausgedrückt mit Hilfe des Kernes.

Für einen beliebigen Querschnitt kann man bei beliebiger Belastung leicht die gröfste auftretende Spannung ermitteln, wenn man den Kern kennt. In Fig. 110 sei der Kern des Querschnittes gefunden (schraffirt); S sei der Schwerpunkt und E der Angriffspunkt der Kraft; $\overline{SE}$ ist demnach die Kraftlinie; die zugehörige conjugirte Axe sei $N'N'$. Gröfste Beanspruchung findet in den Querschnittspunkten A oder B statt. In A ist die Beanspruchung nach Art. 105 (Gleichung 74)

$$\sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{Ma}{\mathfrak{J}}, \text{ und da } M = P\xi \text{ ist,}$$

$$\sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{P\xi a}{\mathfrak{J}};$$

dafür

$$\sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{P}{F}\,\frac{F\xi a}{\mathfrak{J}}.$$

Nun ist $a = a' \cos\delta$ und $\xi = \xi' \cos\delta$, also $a\xi = a'\xi' \cdot \cos^2\delta$ und mit der Bezeichnung aus Art. 107 (S. 89) $\mathfrak{J}' = \frac{\mathfrak{J}}{\cos^2\delta}$; also

$$\frac{a\xi}{\mathfrak{J}} = \frac{a'\xi' \cos^2\delta}{\mathfrak{J}' \cos^2 d} = \frac{a'\xi'}{\mathfrak{J}'}, \text{ demnach } \sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{P}{F}\,\frac{Fa'\xi'}{\mathfrak{J}'}.$$

Zieht man durch A die Parallele zu $N'N'$, welche die Kraftlinie SE in A_2 schneidet, so ist $\overline{SA_2} = a'$, und der zu AA_2 als Null-Linie gehörige Angriffspunkt C ist der Kernpunkt. Ist $SC = e'$, so mufs

$$e' a' = \frac{\mathfrak{J}'}{F}, \text{ alfo } e' = \frac{\mathfrak{J}'}{F a'}$$

fein. Mit diefem Werth erhält man

$$\sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{P \xi'}{F e'} = \frac{P}{F e'} (e' + \xi').$$

$P (e' + \xi')$ bezeichnet man als das Kernmoment; daffelbe ift das Product aus der Axialkraft P in den Abftand des Angriffspunktes vom Kernpunkt. Setzt man abkürzend $M_K = P (e' + \xi')$, fo ift

$$\sigma_A = \frac{M_K}{F e'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 76.$$

Der Ausdruck 76 ift fehr bequem und ganz nach der einfachen Form des Ausdruckes in Gleichung 55 (S. 75) gebildet. e' nennt man die Kernweite. Für eine beliebige Lage der Kraftebene ergiebt die Gleichung 76 die gröfste Beanfpruchung ohne Weiteres. Wenn die Kernweite auf beiden Seiten des Schwerpunktes verfchieden grofs ift, fo ift zu unterfuchen, ob σ_A oder σ_B gröfser ift.

Falls die Axialkraft P gleich Null ift, alfo nur Kräfte parallel zur Querfchnittsebene wirken, fo wird

$$\sigma_A = \frac{M a}{\mathfrak{J}} = \frac{M a' \cos \delta}{\mathfrak{J}' . \cos^2 \delta} = \frac{M}{\cos \delta} \, \frac{a'}{\mathfrak{J}'}.$$

M ift das Moment für die Axe $N' N'$; $\frac{M}{\cos \delta}$ ift das refultirende Moment in der Kraftebene, bezogen auf den Schwerpunkt als Drehpunkt; fetzt man $\frac{M}{\cos \delta} = M_r$, fo wird

$$\sigma_A = \frac{M_r a'}{\mathfrak{J}'} = \frac{M_r a' F}{\mathfrak{J}' F},$$

und da $e' a' = \frac{\mathfrak{J}'}{F}$, fo ift $\frac{\mathfrak{J}'}{F a'} = e'$, alfo gleich der Kernweite; mithin

$$\sigma_A = \frac{M_r}{F e'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 77.$$

Die gröfste Spannung ift gleich dem refultirenden Moment, dividirt durch Querfchnittsfläche mal Kernweite. Daffelbe Moment wird demnach alsdann die gröfste Spannung σ_A erzeugen, wenn es in derjenigen Ebene wirkt, für welche e' feinen kleinften Werth hat. Man kann demnach fofort aus der Figur ablefen, welche Lage des Kraftmomentes für eine gegebene Lage des Querfchnittes die ungünftigfte ift.

d) Biegungsfpannungen in einem Körper, der aus zwei verfchiedenen Bauftoffen zufammengefetzt ift.

115. Spannungen in Beton-Eifen-Conftructionen.

Die nachftehenden Unterfuchungen find durch die neuerdings in ausgedehntem Mafse ausgeführten Beton-Eifen-Conftructionen veranlafft. Man kann annehmen, dafs die Ausdehnung beider Bauftoffe, des Betons und des in den Beton eingebetteten Eifens, bei der Formänderung gleich grofs ift; die Längenänderung der entfprechenden Punkte zweier unendlich naher Querfchnitte fei λ; alsdann wird bei unferer Annahme λ die gleiche Gröfse haben, ob an diefer Stelle der eine oder