Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

d) Biegungsspannungen in einem Körper, der aus zwei verschiedenen Baustoffen zusammengesetzt ist

$$e' a' = \frac{\mathfrak{J}'}{F}, \quad \text{alfo} \quad e' = \frac{\mathfrak{J}'}{F a'}$$

fein. Mit diefem Werth erhält man

$$\sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{P \xi'}{F e'} = \frac{P}{F e'} (e' + \xi').$$

$P(e' + \xi')$ bezeichnet man als das Kernmoment; daffelbe ift das Product aus der Axialkraft P in den Abftand des Angriffspunktes vom Kernpunkt. Setzt man abkürzend $M_K = P(e' + \xi')$, fo ift

$$\sigma_A = \frac{M_K}{F e'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 76.$$

Der Ausdruck 76 ift fehr bequem und ganz nach der einfachen Form des Ausdruckes in Gleichung 55 (S. 75) gebildet. e' nennt man die Kernweite. Für eine beliebige Lage der Kraftebene ergiebt die Gleichung 76 die gröfste Beanfpruchung ohne Weiteres. Wenn die Kernweite auf beiden Seiten des Schwerpunktes verfchieden grofs ift, fo ift zu unterfuchen, ob σ_A oder σ_B gröfser ift.

Falls die Axialkraft P gleich Null ift, alfo nur Kräfte parallel zur Querfchnittsebene wirken, fo wird

$$\sigma_A = \frac{M a}{\mathfrak{J}} = \frac{M a' \cos \delta}{\mathfrak{J}' \cdot \cos^2 \delta} = \frac{M}{\cos \delta} \frac{a'}{\mathfrak{J}'}.$$

M ift das Moment für die Axe $N'N'$; $\frac{M}{\cos \delta}$ ift das refultirende Moment in der Kraftebene, bezogen auf den Schwerpunkt als Drehpunkt; fetzt man $\frac{M}{\cos \delta} = M_r$, fo wird

$$\sigma_A = \frac{M_r a'}{\mathfrak{J}'} = \frac{M_r a' F}{\mathfrak{J}' F},$$

und da $e' a' = \frac{\mathfrak{J}'}{F}$, fo ift $\frac{\mathfrak{J}'}{F a'} = e'$, alfo gleich der Kernweite; mithin

$$\sigma_A = \frac{M_r}{F e'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 77.$$

Die gröfste Spannung ift gleich dem refultirenden Moment, dividirt durch Querfchnittsfläche mal Kernweite. Daffelbe Moment wird demnach alsdann die gröfste Spannung σ_A erzeugen, wenn es in derjenigen Ebene wirkt, für welche e' feinen kleinften Werth hat. Man kann demnach fofort aus der Figur ablefen, welche Lage des Kraftmomentes für eine gegebene Lage des Querfchnittes die ungünftigfte ift.

d) Biegungsfpannungen in einem Körper, der aus zwei verfchiedenen Bauftoffen zufammengefetzt ift.

115. Spannungen in Beton-Eifen-Conftructionen.

Die nachftehenden Unterfuchungen find durch die neuerdings in ausgedehntem Mafse ausgeführten Beton-Eifen-Conftructionen veranlafft. Man kann annehmen, dafs die Ausdehnung beider Bauftoffe, des Betons und des in den Beton eingebetteten Eifens, bei der Formänderung gleich grofs ift; die Längenänderung der entfprechenden Punkte zweier unendlich naher Querfchnitte fei λ; alsdann wird bei unferer Annahme λ die gleiche Gröfse haben, ob an diefer Stelle der eine oder

der andere Bauftoff liegt. Um aber die $(\pm)$ Ausdehnung λ zu erzeugen, ift bei Eifen eine andere Beanfpruchung erforderlich, als bei Beton. Es bezeichne σ die Spannung für die Flächeneinheit im Beton, σ_1 die Spannung für die Flächeneinheit im Eifen, l den Abftand zweier nahe liegender Querfchnitte vor der Formänderung, λ die $(\pm)$ Vergröfserung diefes Abftandes bei der Formänderung, E die Elafticitätsziffer für Beton und E_1 die Elafticitätsziffer für Eifen; alsdann ift

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\lambda}{l} \text{ für Beton}, \quad \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\lambda}{l} \text{ für Eifen};$$

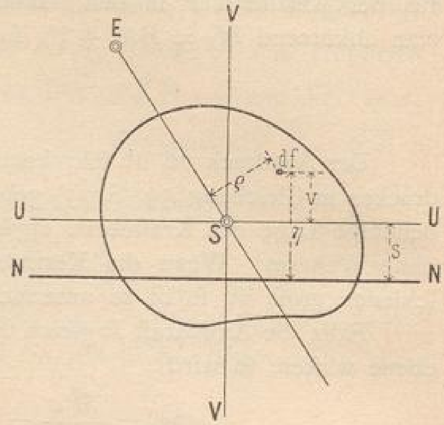
demnach ift

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma_1}{E_1} \quad \text{und} \quad \sigma_1 = \frac{E_1}{E}\,\sigma .$$

Setzt man $\frac{E_1}{E} = m$, fo ift

$$\sigma_1 = m\,\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 78.$$

Fig. 111.



Ein aus Eifen und Beton zufammengefetzter Balken werde auf Biegung beanfprucht; auf den betrachteten Querfchnitt wirken das Moment M und die Axialkraft P; $\overline{SE}$ (Fig. 111) fei die Kraftlinie und NN die Null-Linie. Durch den Schwerpunkt S des Querfchnittes werde parallel zur Null-Linie die Axe UU, fenkrecht zu diefer durch S die Axe VV gelegt. Alsdann ergeben die Gleichgewichtsbedingungen die erforderlichen Gleichungen in derfelben Weife, wie in Art. 105 (S. 86) gezeigt ift. Die mit dem Zeiger 1 verfehenen Werthe beziehen fich auf den Eifentheil und die Werthe ohne Zeiger auf den Betontheil des Querfchnittes. Nun laffen fich folgende drei Gleichungen aufftellen:

I) $P = \int \sigma\, df + \int \sigma_1\, df_1$ (algebraifche Summe der in die Richtung der Balkenaxe fallenden Kräfte mufs gleich Null fein).

II) $M_u = \int \sigma\, v\, df + \int \sigma_1\, v_1\, df_1$ (algebraifche Summe der Momente für die Axe UU mufs gleich Null fein).

III) $0 = \int \sigma\, \rho\, df + \int \sigma_1\, \rho_1\, df_1$ (algebraifche Summe der Momente für die Axe $\overline{SE}$ mufs gleich Null fein).

Für einen beliebigen Punkt des Querfchnittes ift $\sigma = a\,\eta$, wenn a ein noch zu beftimmender Feftwerth, η der Abftand des Punktes, fenkrecht gemeffen, von der Null-Linie NN ift. Es ift $\eta = v + s$, mithin

$$\sigma = a\,(v + s), \quad \sigma_1 = m\,\sigma \quad \text{und} \quad \sigma_1 = a\,m\,(v_1 + s).$$

Gleichung I wird mit diefen Werthen:

$$P = a\left(\int v\, df + \int s\, df + m \int v_1\, df_1 + m \int s\, df_1\right),$$

$$P = a\left(\int v\, df + m \int v_1\, df_1\right) + a\,s\,(F + m\,F_1).$$

Beftimmt man den Schwerpunkt S unter der Annahme, dafs die aus Eifen beftehenden Querfchnittstheile in m-facher Gröfse eingeführt werden, fo ift für jede durch diefen Schwerpunkt gehende Axe das entfprechende ftatifche Moment des Querfchnittes gleich Null, d. h. es findet ftatt:

$$\int v\,df + m\int v_1\,df_1 = 0, \text{ und es ift alsdann}$$

$$P = a\,s\,(F + m\,F_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 79.$$

Aus Gleichung II ergiebt fich in ähnlicher Weife

$$M_u = a\int (v+s)\,v\,df + a\,m\int (v_1+s)\,v_1\,df_1,$$

$$M_u = a\int v^2\,df + a\,s\int v\,df + m\,a\int v_1{}^2\,df_1 + a\,m\,s\int v_1\,df_1,$$

$$M_u = a\int v^2\,df + m\,a\int v_1{}^2\,df_1 + a\,s\left[\int v\,df + m\int v_1\,df_1\right].$$

Da $\int v\,df + m\int v_1\,df_1 = 0$ ift, fo wird

$$M_u = a\,(\mathfrak{J} + m\,\mathfrak{J}_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 80.$$

$\mathfrak{J}$ ift das Trägheitsmoment des Betontheiles und $\mathfrak{J}_1$ das Trägheitsmoment des Eifentheiles des Querfchnittes bezogen auf die Axe *UU*.

Aus Gleichung III folgt, da $\sigma = a\,\eta$ ift,

$$0 = \int a\,\eta\,\rho\,df + \int a\,m\,\eta_1\,\rho_1\,df_1 = a\left(\int \eta\,\rho\,df + m\int \eta_1\,\rho_1\,df_1\right),$$

$$0 = Z + m\,Z_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 81.$$

Z, bezw. Z_1 bedeuten die Centrifugalmomente der Querfchnittstheile für die Axen *NN* und *SE*. Conftruirt man alfo unter Zugrundelegung m-facher Querfchnittsgröfse der Eifentheile das Centrifugalmoment für die Kraftlinie und die Null-Linie, fo ift daffelbe gleich Null. Kraftlinie und Null-Linie find conjugirte Axen.

Aus Gleichung 80 folgt

$$a = \frac{M_u}{\mathfrak{J} + m\,\mathfrak{J}_1};$$

aus Gleichung 79 folgt

$$s = \frac{P}{a\,(F + m\,F_1)} = \frac{P\,(\mathfrak{J} + m\,\mathfrak{J}_1)}{(F + m\,F_1)\,M_u},$$

und

$$\sigma = a\,(v+s) = \frac{P}{F + m\,F_1} + \frac{M_u}{\mathfrak{J} + m\,\mathfrak{J}_1}\,v \quad \ldots\ldots \quad 82.$$

$$\sigma_1 = m\,\sigma = \frac{m\,P}{F + m\,F_1} + \frac{m\,M_u\,v}{\mathfrak{J} + m\,\mathfrak{J}_1} \quad \ldots\ldots \quad 83.$$

Falls die Axialkraft P gleich Null ift, wird

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{M_u\,v}{\mathfrak{J} + m\,\mathfrak{J}_1} \\ \sigma_1 &= m\,\frac{M_u\,v}{\mathfrak{J} + m\,\mathfrak{J}_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 84.$$

Die Ausdrücke 82 bis 84 ergeben folgendes für die Berechnung wichtige Gefetz: Die Beanfpruchung kann bei einem Eifen-Betonbalken eben fo wie bei einem einheitlich aus Beton hergeftellten Balken berechnet werden, wenn man fowohl für die Ermittelung des Schwerpunktes, wie für diejenige der Querfchnittsfläche und des Trägheitsmomentes die Eifenquerfchnitte in $m\left(= \frac{E_1}{E}\right)$-facher Gröfse einführt.

Man müſste bei der Berechnung nun vom Geſammtquerſchnitt denjenigen der Eiſentheile abziehen und den Reſt als Betonquerſchnitt einführen; bei der groſsen Unbeſtimmtheit jedoch, welche bezüglich der Gröſse von m herrſcht, kann man unbedenklich den Geſammtquerſchnitt als Betonquerſchnitt einführen.

116. Querſchnitts-ermittelung für Beton-Balken.

Bei Beton-Eiſenbalken iſt der Geſammtquerſchnitt ein Rechteck, deſſen Breite mit b und deſſen Höhe mit h bezeichnet werden mag; die Eiſeneinlage beſtehe aus einer Anzahl Rundeiſen, nahe der unteren Begrenzung des Rechteckes. Nach *Melan*[25]) kann man als zuläſſige Beanſpruchung des Betons einführen:

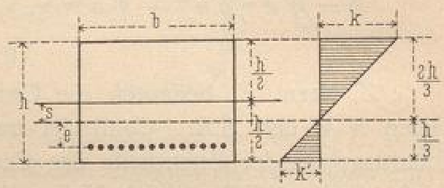
gröſste Druckbeanſpruchung des Betons . . 25 bis 30 kg für 1 qcm,
gröſste Zugbeanſpruchung des Betons . . . . . 10 kg für 1 qcm.

Wir führen ferner

$$m = \frac{E_1}{E} = \frac{E_{Eiſen}}{E_{Beton}} = 30$$

ein. Stellt man die Bedingung, daſs gleichzeitig die gröſste Druckbeanſpruchung gleich 20 kg und die gröſste Zugbeanſpruchung gleich 10 kg ſei, bezw. daſs allgemein die Beanſpruchung auf Druck, abſolut gerechnet, doppelt ſo groſs ſei, als diejenige auf Zug, ſo ergiebt ſich, daſs unter Einführung des m-fachen Eiſenquerſchnittes in die Rechnung die Null-Linie in $\frac{1}{3}$ der Balkenhöhe liegen muſs (Fig. 112). Der Abſtand s der Null-Linie von der Trägermitte iſt alſo

Fig. 112.



$$s = \frac{h}{6}.$$

Weiter muſs auch $0 = b\,h\,s - m\,F_1\,e$ ſein, d. h.

$$s = \frac{m\,F_1\,e}{b\,h}.$$

Beide Werthe für s einander gleich geſetzt, giebt

$$\frac{m\,F_1\,e}{b\,h} = \frac{h}{6}, \quad \text{d. h.} \quad F_1\,e = \frac{b\,h^2}{6\,m}.$$

Ferner iſt das Trägheitsmoment des Betonquerſchnittes für die Null-Linie

$$\mathcal{J} = \frac{b\,h^3}{12} + \frac{b\,h\,.\,h^2}{36} = \frac{b\,h^3}{9} \quad \text{und} \quad m\,\mathcal{J}_1 = m\,F_1\,e^2,$$

alſo die gröſste Druckbeanſpruchung im Querſchnitt, falls die Axialkraft $P = 0$ iſt, nach Gleichung 84

$$\sigma_{max} = \frac{M\,\frac{2}{3}\,h}{\frac{b\,h^3}{9} + m\,F_1\,e^2} = \frac{2\,M\,h}{\frac{b\,h^3}{3} + 3\,m\,F_1\,e^2}.$$

Wird für $F_1\,e$ der oben gefundene Werth eingeführt, ſo erhält man

$$\sigma_{max} = \frac{2\,M}{\frac{b\,h^2}{6}\left(2 + \frac{3\,e}{h}\right)} \quad \text{. . . . . 85.}$$

25) In: Oeſt. Monatſchr. f. d. öff. Baudienſt 1896, S. 465. — Auch als Sonderabdruck erſchienen: Wien 1896.

Diefe Gleichung gilt allgemein und giebt die gröfste Druckbeanfpruchung im Beton doppelt fo grofs, abfolut genommen, als die Zugbeanfpruchung. Indem man

$$\sigma_{max} = K$$

fetzt, erhält man als Bedingungsgleichung für den Querfchnitt:

$$\frac{b\,h^2}{6} = \frac{M}{K\left(1 + \frac{3\,e}{2\,h}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 86.$$

Beifpiel: Es fei $M = 12\,500$ kgcm und $K = 15$ kg für 1 qcm; alsdann wird

$$\frac{b\,h^2}{6} = \frac{12\,500}{15\left(1 + \frac{3\,e}{2\,h}\right)} \quad \text{und} \quad b\,h^2 = \frac{5000}{1 + \frac{3\,e}{2\,h}}.$$

Damit die Eifen ganz im Beton eingebettet werden können, mufs man e entfprechend kleiner als $\frac{h}{3}$ wählen; nimmt man $e = \frac{h}{4}$ an, fo ergiebt fich

$$b\,h^2 = \frac{5000}{1 + \frac{3}{8}} = \frac{8 \cdot 5000}{11}.$$

Das der Unterfuchung zu Grunde gelegte Stück des Balkens habe 1 m Breite; dann ift $b = 100$ cm, alfo

$$h^2 = \frac{8 \cdot 5000}{11 \cdot 100} = 36{,}36 \quad \text{und} \quad h = 6\,\text{cm (abgerundet)};$$

es wird alfo $e = \frac{h}{4} = 1{,}5$ cm und $f_1\,e = \frac{b\,h^2}{6\,m}$, und mit $m = 30$

$$f_1\,e = \frac{100 \cdot 36}{6 \cdot 30} = 20 \quad \text{oder} \quad f_1 = \frac{20}{1{,}5} = 13{,}33\,\text{qcm}.$$

Ordnet man auf 1 m Breite 20 Einlagen aus Rundeifen an, fo mufs jede derfelben $0{,}67$ qcm Querfchnitt erhalten, alfo einen Durchmeffer $d = 0{,}92$ cm.

Hätte man $\sigma_{max} = K = 20$ kg für 1 qcm eingeführt, fo hätte man erhalten:

$$\frac{b\,h^2}{6} = \frac{12500}{20\left(1 + \frac{3\,e}{2\,h}\right)} = \frac{12500}{20\left(1 + \frac{3}{8}\right)} = \frac{625 \cdot 8}{11},$$

$$h^2 = \frac{6 \cdot 8 \cdot 625}{11 \cdot 100} = 27, \quad h = 5{,}2\,\text{cm}, \quad f_1\,e = \frac{b\,h^2}{6\,m} = \frac{100 \cdot 27}{6 \cdot 30} = 15 \quad \text{und} \quad f_1 = \frac{15{,}0 \cdot 4}{5{,}2} = 11{,}5\,\text{qcm}.$$

Bei 20 Einlagen bekommt jede einen Durchmeffer

$$d = \sqrt{\frac{11{,}5 \cdot 4}{20 \cdot 3{,}14}} = 0{,}85\,\text{cm}.$$

Die gröfste Beanfpruchung in Eifen ift alsdann:

$$\sigma_{\varepsilon_{max}} = \frac{12500 \cdot 1{,}725 \cdot 30}{\frac{100 \cdot 5{,}2^3}{9} + 30 \cdot 11{,}5 \cdot 1{,}3^2} = \frac{646875}{2149} = 301\,\text{kg für 1 qcm}.$$

Für die Berechnung der Betongewölbe mit Eifeneinlagen kann man die Formeln 82 und 83 verwenden[26]).

[26]) Bezüglich der Berechnung von Beton-Eifen-Conftructionen fei auf nachftehende Auffätze verwiefen:

KOENEN, M. Berechnung der Stärke der *Monier*'fchen Cementplatten mit Eifeneinlagen. Centralbl. d. Bauverw. 1886, S. 462.

NEUMANN, P. Ueber die Berechnung der *Monier*-Conftructionen. Wochfchr. d. öft. Ing.- u. Arch.-Ver. 1890, S. 209.

MELAN, J. Gewölbe aus Beton mit Verbindung mit eifernen Bogen. Zeitfchr. d. öft. Ing.- u. Arch.-Ver. 1893, S. 166.

SPITZER, J. A. Berechnung der *Monier*-Gewölbe. Zeitfchr. d. öft. Ing.- u. Arch.-Ver. 1896, S. 305.

THULLIE, M. R. v. Ueber die Berechnung der Biegungsfpannungen in den Beton- und *Monier*-Conftructionen. Zeitfchr. d. öft. Ing.- u. Arch.-Ver. 1896, S. 365.

MELAN, J. Ueber die Berechnung der Beton-Eifenconftructionen. Oeft. Monatfchr. f. d. öff. Baudienft 1896, S. 465. — Auch als Sonderabdruck erfchienen: Wien 1896.

THULLIE, M. R. v. Ueber die Berechnung der *Monier*-Platten. Zeitfchr. d. öft. Ing.- u. Arch.-Ver. 1897, S. 103.

GRÜNING, M. & H. REISSNER. Eine neue Fahrbahnanordnung für eiferne Strafsenbrücken. Centralbl. d. Bauverw. 1897, S. 190.

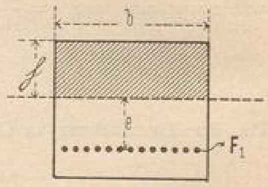
Falls man den Zugwiderſtand des Betons gar nicht berückſichtigt (was nur für angenäherte Rechnung zuläſſig iſt), ſo ſind in den Ausdrücken für F und $\mathfrak{J}$, welche ſich auf den Beton beziehen, nur die Querſchnittstheile auf der Druckſeite als vorhanden einzuführen. Dann iſt für den hauptſächlich hier in Betracht kommenden rechteckigen Querſchnitt, welchen die Kraftebene in einer Hauptaxe ſchneidet, einzuführen:

$$F = b\,\mathfrak{h}, \quad \mathfrak{J} = \frac{b\,\mathfrak{h}^3}{3} \quad \text{und} \quad \mathfrak{J}_1 = F_1\,e^2.$$

In dieſen Formeln bedeutet $\mathfrak{h}$ den Abſtand der Null-Linie von der oberen Rechteckſeite und b die Breite des Rechteckes. Das ſtatiſche Moment des Querſchnittes für die Null-Linie ſoll gleich Null ſein, wenn die Eiſentheile in m-facher Gröſse eingeführt werden, d. h. es ſoll

$$0 = \frac{b\,\mathfrak{h}^2}{2} - m\,F_1\,e \quad \text{oder} \quad \mathfrak{h}^2 = \frac{2\,m\,e\,F_1}{b}$$

Fig. 113.



ſein. Die gröſste Druckſpannung im Beton iſt dann

$$\sigma_{max} = \frac{M\,\mathfrak{h}}{\frac{b\,\mathfrak{h}^3}{3} + m\,F_1\,e^2}$$

und die gröſste Zugſpannung im Eiſen

$$\frac{\sigma_{1max}}{\sigma_{max}} = m\,\frac{e}{\mathfrak{h}}; \quad \text{ſonach} \quad \sigma_{1max} = \frac{m\,e\,M}{\frac{b\,\mathfrak{h}^3}{3} + m\,F_1\,e^2},$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{1max} &= \frac{M}{\frac{b\,\mathfrak{h}^3}{3\,e\,m} + F_1\,e} \quad \text{für das Eiſen} \\ \sigma_{max} &= \frac{M}{\frac{b\,\mathfrak{h}^2}{3} + \frac{m\,F_1\,e^2}{\mathfrak{h}}} \quad \text{für den Beton} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 87.$$

e) Schubſpannungen.

117. Wagrechte Schubſpannungen.

Auſser den oben ermittelten Biegungsſpannungen treten bei den verſchiedenen Belaſtungen der Balken auch noch Schubſpannungen auf, von denen hier zunächſt die wagrechten Schubſpannungen betrachtet werden ſollen.

Denkt man ſich eine Anzahl Lagen dünner Bretter über einander gelegt, an den Enden unterſtützt und in der Mitte belaſtet, ſo werden ſich dieſelben gegen einander etwa in der Weiſe verſchieben, welche in Fig. 114 angedeutet iſt. Dieſe Verſchiebung iſt eine Folge der in den Fugen aa, bb auftretenden Schubkräfte; werden dieſelben nicht durch künſtliche Mittel (Zähne, Dübel u. dergl.) oder den Abſcherungswiderſtand des Bauſtoffes aufgehoben, ſo verurſachen ſie eine Verſchiebung.

Fig. 114.

Für die rechnungsmäſsige Ermittelung dieſer Schubſpannungen möge, wie oben, angenommen werden, daſs nur ſenkrecht zur Balkenaxe gerichtete Kräfte