Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

f) Elastische Linie

$$0 = V\,d\,z\,d\,x - H\,d\,x\,d\,z,$$

woraus

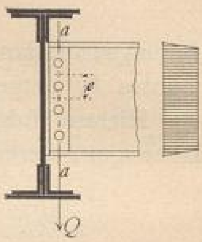
$$V = H \qquad 93.$$

Dies gilt für jede Stelle des Balkens, womit der obige Satz bewiefen ift. Es ift mithin nach Gleichung 89

$$V = \frac{Q\,S_{z_1}^{a_1}}{\mathfrak{J}} \qquad 94.$$

Die in Art. 118 bis 120 für verfchiedene Querfchnittsformen ermittelten Werthe und graphifchen Darftellungen für H gelten alfo auch für V.

Fig. 121.



Das Gefetz, nach welchem fich die lothrechten Schubfpannungen im Querfchnitt vertheilen, wird angewendet, wenn es fich darum handelt, die auf die einzelnen Niete in neben ftehender Verbindung (Fig. 121) entfallenden Beanfpruchungen zu ermitteln. Der I-förmige Walzträger wird durch Winkeleifen mit dem Blechträger vereinigt. Die im Querfchnitt $a\,a$ des I-Trägers entftehende Querkraft Q ift durch die Niete auf den Blechträger zu übertragen. Die einzelnen Niete find nun fo zu vertheilen, dafs ihre Entfernung der Gröfse der durch den betreffenden Niet zu übertragenden Schubfpannung entfpricht. Ift an einer Stelle die Entfernung der Nietmitten e und die lothrechte Schubfpannung für die Längeneinheit im Mittel in diefer Höhe gleich V, fo kommt auf einen Niet die Schubkraft $V\,e$.

Der Niet wird in zwei Querfchnitten abgefchert; mithin ift der Abfcherungswiderftand des Nietes $\frac{2\,d^2\,\pi}{4}\,T$; es ergiebt fich alfo für e die Gleichung:

$$V\,e = \frac{2\,d^2\,\pi}{4}\,T, \quad \text{woraus} \quad e = \frac{\pi\,d^2\,T}{2\,V}.$$

Da V von der Null-Linie nach der oberen und unteren Gurtung zu abnimmt, fo find die Niete in der Nähe der Neutralen näher zu fetzen, als in der Nähe der Gurtung. Für die gewöhnlichen I-förmigen Walzbalken kann man die oben ftehende Fig. 121 als graphifche Darftellung der Veränderlichkeit der lothrechten Schubfpannung annehmen, d. h. mit genügender Annäherung V als gleich grofs über die ganze Trägerfteghöhe annehmen, worin nach Gleichung 92: $V = \frac{Q}{\mathfrak{h}}$.

122. Spannungen für ein beliebiges Flächenelement.

In den bisherigen Betrachtungen find nur die Normalfpannungen, welche in den lothrechten Balkenquerfchnitten, und die Schubfpannungen, welche in den wagrechten und lothrechten Balkenquerfchnitten entftehen, ermittelt worden. Um die Frage der im Inneren der Balken auftretenden Beanfpruchungen eingehend zu löfen, wären noch die Normal- und Schubfpannungen in einem Querfchnitte aufzufuchen, welcher einen beliebigen Winkel mit der Wagrechten macht. Auf diefe Unterfuchungen einzugehen, mangelt hier der Raum, und es kann auch in den meiften Fällen des Hochbaues auf eine dahin gehende Berechnung verzichtet werden. Die Lefer, welche fich über diefen Gegenftand unterrichten wollen, werden auf die S. 57 genannten Werke verwiefen.

f) Elaftifche Linie.

123. Axiale Biegungsfpannung.

Wenn ein Balken dem Einfluffe biegender Kräfte unterworfen ift, fo wird eine Formänderung deffelben eintreten. Die Axe des urfprünglich geraden Balkens wird eine krumme Linie (Fig. 122), welche man die elaftifche Linie nennt.

Die Gleichung der elaftifchen Linie wird für eine grofse Zahl von Aufgaben gebraucht; bei vielen derfelben wirken nicht nur Kräfte fenkrecht zur urfprünglichen Balkenaxe, fondern auch folche, welche in die Axe fallen, fog. Axialkräfte. Defshalb ſoll dieſer allgemeinere Fall für die Entwickelung der Gleichung zu Grunde gelegt, im Uebrigen aber angenommen werden, daſs die Kraftebene alle Querſchnitte in Hauptaxen ſchneide.

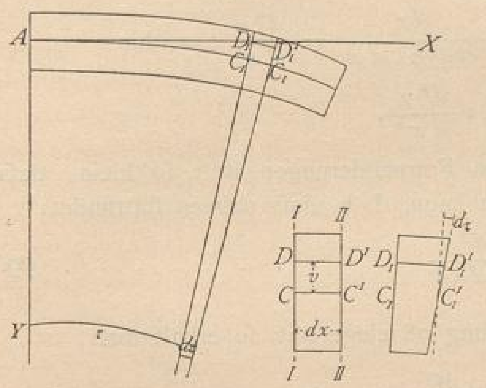
Auf irgend einen Querſchnitt wirke das Biegungsmoment M und die Axialkraft P; in einem Punkte des Querſchnittes, welcher von der wagrechten Schwerpunktsaxe (der zweiten Hauptaxe des Querſchnittes) den Abſtand v hat, iſt unter Bezugnahme auf Gleichung 54 (S. 75) die axiale Biegungsſpannung

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M v}{\mathfrak{J}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 95.$$

hierin bedeutet F die Querſchnittsfläche und $\mathfrak{J}$ das Trägheitsmoment der Querſchnittsfläche für die genannte Schwerpunktsaxe.

Man lege durch einen Punkt A der Balkenaxe drei Coordinatenaxen, von denen die X-Axe mit der urſprünglichen Balkenaxe zuſammenfalle, die Y-Axe ſenkrecht zu derſelben in der Kraftebene, die Z-Axe ſenkrecht zur Kraftebene ſteht, und betrachte ein Balkenſtück zwiſchen den Ebenen $I\,I$ und $II\,II$, deſſen Länge vor der Formänderung $d\,x$ war. Die Ebenen $I\,I$ und $II\,II$ waren vor der Formänderung parallel und ſenkrecht zur Balkenaxe und hatten die Abſciſſen x und $x + d\,x$; die Länge einer Faſer $D\,D'$ in der Höhe v über der Axe war $d\,x$. 124. Gleichung der elaſtiſchen Linie.

Fig. 122.



vor nach
der Formänderung.

Wir beſtimmen nunmehr die Formänderung dieſer Faſer $D\,D'$. Durch die beiden Punkte der gebogenen Axe C_1 und C_1' legen wir Ebenen ſenkrecht zur gebogenen Axe; der Winkel beider ſei $d\,\tau$, der Winkel der durch C_1 gelegten Ebene mit der Y-Axe ſei τ. Man nimmt an (übereinſtimmend mit der Vorausſetzung in Art. 95, S. 73), daſs der Abſtand zweier Punkte in der Höhe v über der Axe alsdann eben ſo groſs ſei, wie der Abſtand der Normalebenen in der Höhe v über der Axe, d. h. daſs ſtattfindet

$$D_1\,D_1' = C_1\,C_1' + v\,d\,\tau.$$

Nennt man die Verlängerung des Stückes $C\,C'$ bei der Formänderung $d\,\xi$, ſo iſt

$$C_1\,C_1' = d\,x + d\,\xi \quad \text{und} \quad D_1\,D_1' = d\,x + d\,\xi + v\,d\,\tau.$$

Dies iſt die Länge der gebogenen Faſer. Die urſprüngliche Länge derſelben war $D\,D' = d\,x$; folglich iſt die Verlängerung

$$D_1\,D_1' - D\,D' = d\,x + d\,\xi + v\,d\,\tau - d\,x = d\,\xi + v\,d\,\tau$$

und das Verlängerungsverhältniſs $\dfrac{d\,\xi + v\,d\,\tau}{d\,x}$.

Nun iſt σ die axiale Faſerſpannung in dieſer Faſer, mithin

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{d\,\xi + v\,d\,\tau}{d\,x} = \frac{d\,\xi}{d\,x} + \frac{v\,d\,\tau}{d\,x},$$

$$\sigma = E\,\frac{d\,\xi}{d\,x} + \frac{E\,d\,\tau}{d\,x}\,v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 96.$$

Nach Gleichung 95 ift aber auch

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{\mathfrak{J}} v.$$

Die Gleichfetzung beider für σ gefundener Werthe ergiebt

$$\frac{P}{F} + \frac{M}{\mathfrak{J}} v = E \frac{d\xi}{dx} + \frac{E\, d\tau}{dx} v,$$

woraus die beiden Gleichungen folgen:

$$\left. \begin{aligned} E \frac{d\xi}{dx} &= \frac{P}{F} \\ E \frac{d\tau}{dx} &= \frac{M}{\mathfrak{J}} \end{aligned} \right| \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 97.$$

Demnach wird

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{M}{E\mathfrak{J}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 98.$$

Nun ift $\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx}$, fonach $\frac{d \operatorname{tg} \tau}{dx} = \frac{d\tau}{\cos^2 \tau \,.\, dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$; mithin

$$\frac{d\tau}{dx} = \cos^2 \tau \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Bei den hier in Betracht kommenden Formänderungen ift τ fo klein, dafs $\cos^2 \tau$ unbedenklich gleich 1 gefetzt werden kann, d. h. dafs nahezu ftattfindet:

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 99.$$

Wird diefer Werth für $\frac{d\tau}{dx}$ in Gleichung 98 eingefetzt, fo erhält man

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E\mathfrak{J}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 100.$$

Gleichung 100 ift die Differentialgleichung der elaftifchen Linie. In derfelben bedeutet M das Moment an einer Stelle mit der Abfciffe x, im Allgemeinen alfo etwas Veränderliches; $\mathfrak{J}$ ift das Trägheitsmoment für die wagrechte Schwerpunktsaxe des Querfchnittes an derfelben Stelle.

Die Gleichung der elaftifchen Linie wird durch zweimalige Integration der Gleichung 100 erhalten; bei der Integration ift E conftant. Es wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{E} \int \frac{M}{\mathfrak{J}} dx + C_1$$

und

$$y = \frac{1}{E} \iint \frac{M}{\mathfrak{J}} (dx)^2 + C_1 x + C_2.$$

Bekanntlich ift der Krümmungshalbmeffer für eine ebene Curve

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

oder, wenn $\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx}$ nur klein ift, angenähert

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2 y}{d x^2}}$$

Danach wird die Gleichung der elaftifchen Linie auch gefchrieben werden können:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 101.$$

Für $M = 0$ wird $\rho = \infty$, d. h. die elaftifche Linie eine Gerade. Das Moment M ift Null an demjenigen Punkte des Balkens, bei welchem es aus dem pofitiven in den negativen Werth übergeht, alfo das Vorzeichen wechfelt; an diefen Punkten hat fonach die elaftifche Linie fog. Wendepunkte.