Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

1) Druckvertheilung in Querschnitten, welche Druck und Zug aufnehmen können, falls die Kraftebene alle Querschnitte in Hauptaxen schneidet

urn:nbn:de:hbz:466:1-77733

Bei den aus Holz und Eiſen beſtehenden Druckſtäben, bezw. Freiſtützen tritt die erwähnte Schwierigkeit nicht auf; ſtatt derſelben iſt bei dieſen die Gefahr eines ſeitlichen Ausbiegens und weiter diejenige des Zerknickens in das Auge zu faſſen.

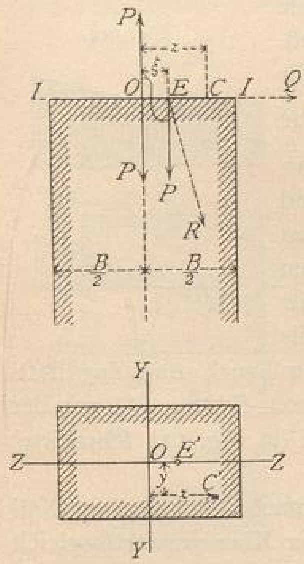
a) Stützen mit auſserhalb der Längsaxe wirkenden Kräften, ohne Rückſicht auf Zerknicken.

1) Druckvertheilung in Querſchnitten, welche Druck und Zug aufnehmen können, falls die Kraftebene alle Querſchnitte in Hauptaxen ſchneidet.

Die nachfolgende Unterſuchung hat allgemeine Giltigkeit, mag die Axe der betreffenden Conſtruction lothrecht, wagrecht oder geneigt ſein; ſie findet vorwiegend auf gemauerte Pfeiler und Stützen Anwendung und wird deſshalb an dieſer Stelle vorgenommen. Alle Ergebniſſe bleiben aber auch beſtehen, wenn man Fig. 123 um 90 Grad dreht, alſo einen Balken mit wagrechter Axe unterſucht, weſshalb in Art. 101 (S. 80) auf die hier vorzunehmenden Beſprechungen hingewieſen werden konnte. Mit groſser Annäherung gelten ſie auch für den gekrümmten Balken, z. B. für das Gewölbe, wenn der Halbmeſſer deſſelben nicht zu klein iſt; die ganze Unterſuchung iſt ein Sonderfall der allgemeinen in Art. 102 bis 114 (S. 80 bis 94) durchgeführten. 126. Allgemeine Unterſuchung.

Die Mittelkraft aller oberhalb irgend eines Querſchnittes II auf die Freiſtütze wirkenden Kräfte ſei R; ſie ſchneide den Querſchnitt in einem Punkte E (Fig. 123), deſſen Abſtand von der Pfeileraxe mit ξ bezeichnet werden ſoll. Die Kraftebene ſchneide den Querſchnitt II und alle Querſchnitte des Pfeilers in Hauptaxen (dieſelben ſind gewöhnlich Symmetrie-Axen). R wird in eine Seitenkraft P, welche ſenkrecht zum Querſchnitt II wirkt, und eine Seitenkraft Q zerlegt, welche in den Querſchnitt fällt; letztere ſoll unbeachtet gelaſſen werden, da ſie das Endergebniſs der Unterſuchung nur wenig beeinfluſſt. Es wird nichts geändert, wenn man im Schwerpunkte O des Querſchnittes zwei Kräfte anbringt, welche je einander gleich und zu P parallel ſind, aber entgegengeſetzten Sinn haben, alſo einander aufheben. Dadurch ergiebt ſich als Wirkung der excentriſchen Kraft P: eine im Schwerpunkte O angreifende Kraft P und zwei (in Fig. 123 durch einen Bogen verbundene) Kräfte P, welche zuſammen ein Kräftepaar mit dem Momente $M = P\xi$ bilden; das Moment dreht im vorliegenden Falle nach rechts (im Sinne des Uhrzeigers). Durch die Kraft und das Kräftepaar werden im Querſchnitte Beanſpruchungen hervorgerufen, welche ſich nach Art. 95, S. 75, Gleichung 54 zu

Fig. 123.



Aufriſs.

Grundriſs.

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{\mathfrak{J}_Y} z$$

ergeben, und mit Rückſicht darauf, daſs $M = P\xi$ iſt, zu

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{P \xi z}{\mathfrak{J}}$$

oder

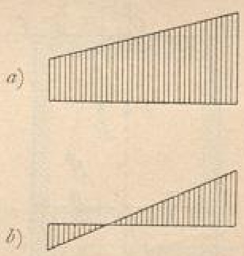
$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{F \xi z}{\mathfrak{J}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 102.$$

Abkürzend iſt $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_Y$ geſetzt; ferner ſollen Druckſpannungen im Folgenden als poſitiv, Zugſpannungen als negativ eingeführt werden, da es ſich bei den zu betrachtenden Conſtructionen hauptſächlich um Beanſpruchungen auf Druck handelt.

Für eine gegebene Kraft P mit gegebenem Angriffspunkt E kann die Spannung ſämmtlicher Querſchnittspunkte durch Gleichung 102 ermittelt werden. Von der Spannungsvertheilung erhält man ein klares Bild, wenn man in jedem Punkte des Querſchnittes die Spannung als Ordinate aufträgt und die Endpunkte dieſer Ordinaten verbindet. Da bei den gemachten Annahmen die Entfernung y des beliebig gewählten Punktes C von der Kraftebene gar nicht in der Gleichung vorkommt, ſo folgt, daſs die Spannung σ von y unabhängig iſt; alle in gleichem Abſtande z von der YY-Axe liegenden Punkte erleiden alſo gleiche Spannung. Demnach genügt es, die Spannungen aller Punkte aufzuſuchen, welche auf einer zur Kraftebene parallelen Linie des Querſchnittes liegen und dieſe nach beliebig gewähltem Maſsſtabe aufzutragen. Die z-Werthe ſind die Abſciſſen, und die Spannungen σ ſind die Ordinaten; die Vertheilung findet nach dem durch Gleichung 102 beſtimmten Geſetze ſtatt.

In dieſer Gleichung ſind σ und z die einzigen Veränderlichen; beide kommen nur in der erſten Potenz vor; alſo iſt die Verbindungslinie der Endpunkte der Ordinaten σ eine Gerade, die Gerade obiger Gleichung. Dieſe Linie iſt bekannt, wenn zwei Punkte derſelben bekannt ſind. Demnach kann man ſie leicht auffinden, indem man z. B. für die beiden Endwerthe $z = -\frac{B}{2}$ und $z = +\frac{B}{2}$ die Werthe von σ ausrechnet und aufträgt. Man erhält etwa die Darſtellungen in Fig. 124. Die poſitiven Werthe von σ ſind nach oben, die negativen nach unten abgetragen; die erſteren bedeuten Druck, die letzteren Zug. Wenn alle Ordinaten auf einer Seite der Abſciſſe liegen, ſo findet nur Druck ſtatt (Fig. 124 *a*); ſonſt hat man im Querſchnitt theils Druck, theils Zug (Fig. 124 *b*). Die Grenze, an welcher der Wechſel von Druck zum Zug ſtattfindet, iſt die Null-Linie (ſiehe auch Art. 96, S. 75 und Art. 102, S. 80). Die von der Abſciſſe und der Geraden der Gleichung 102 eingeſchloſſene (in Fig. 124 ſchraffirte) Fläche wird als Druckfigur bezeichnet.

Fig. 124.



127. Null-Linie. Die Ermittelung der Null-Linie iſt hier eine ſehr einfache. σ wird zu Null für alle diejenigen Punkte, für welche in Gleichung 102 der Klammerwerth gleich Null wird. Nennt man den beſonderen Werth von z, für den dies eintritt, z_0, ſo wird $\sigma = 0$, wenn $1 + \frac{F \xi z_0}{\mathfrak{J}} = 0$ wird, d. h. für

$$z_0 = -\frac{\mathfrak{J}}{F \xi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 103.$$

Gleichung 103 iſt alſo die Gleichung der Null-Linie unter der Vorausſetzung, daſs die Kraftebene den Querſchnitt in einer Hauptaxe ſchneidet.

Aus der Gleichung 103 für die Null-Linie ergeben ſich die Folgerungen:

α) Da $\mathfrak{J}$ und F ſtets poſitive Gröſsen ſind, ſo hat z_0 ſtets anderes Vorzeichen als ξ. Die ſämmtlichen Punkte, in denen die Spannung Null ſtattfindet, liegen alſo an derjenigen Stelle der Axe YY, an welcher der Schnittpunkt mit der Mittelkraft R nicht liegt.

β) Für eine beſtimmte Lage der Kraft R ſind alle Gröſsen auf der rechten Seite der Gleichung conſtant, iſt alſo auch z_0 conſtant; demnach liegen alle Punkte, in denen σ gleich Null iſt, in gleichem Abſtande von der Y-Axe, d. h. alle dieſe Punkte liegen in einer Geraden, die parallel iſt zu derjenigen Schwerpunktsaxe, welche zur Schnittlinie des Querſchnittes mit der Kraftebene ſenkrecht ſteht.

γ) Der Werth für z_0 iſt von der Kraftgröſse ganz unabhängig; er iſt nur von den Werthen $\mathfrak{J}$ und F, alſo von der Querſchnittsform und -Gröſse, und von ξ, d. h. von der Lage des Schnittpunktes E abhängig.

δ) z_0 wird Null, d. h. die Null-Linie fällt mit der zur Kraftebene ſenkrechten Schwerpunktsaxe zuſammen, wenn $\xi = \infty$ wird, d. h. wenn die Kraft R den Querſchnitt erſt in unendlich weiter Ferne ſchneidet, wenn alſo R zum Querſchnitte parallel gerichtet iſt, d. h. wenn keine Axialkraft vorhanden iſt.

Die Gleichung 103 giebt ein bequemes Verfahren, die Lage der Null-Linie graphiſch zu ermitteln. Beſonders einfach geſtaltet ſich die Aufgabe beim rechteckigen Querſchnitt.

Hier iſt nach Art. 51 (S. 34)

$$\mathfrak{J} = \frac{b h^3}{12} \quad \text{und} \quad F = b h .$$

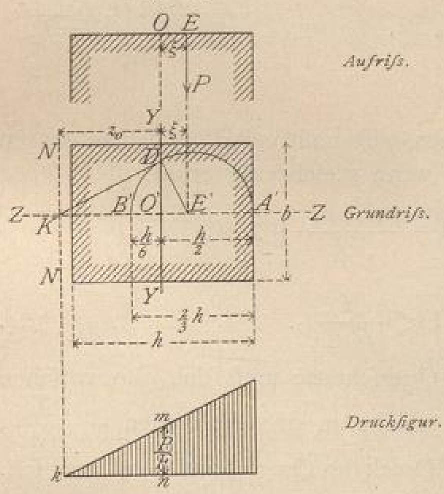
Aus Gleichung 103 folgt, wenn man zunächſt nur die abſolute Gröſse von z_0 beſtimmt,

$$z_0 = \frac{b h^3}{12 b h \xi} = \frac{h^2}{12 \xi} \quad \text{und} \quad z_0 \xi = \frac{h^2}{12} = \frac{h}{6} \cdot \frac{h}{2} .$$

Daraus ergiebt ſich die folgende Conſtruction (Fig. 125).

Man trägt von O' aus $\overline{O'B'} = \frac{h}{6}$ nach einer Seite ab, ſchlägt über $B'A' = \frac{2}{3} h$ als Durchmeſſer einen Halbkreis, welcher die in O' zur ZZ-Axe gezogene Lothrechte in D ſchneidet; dann iſt $\overline{O'D}^2 = \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{6} = \frac{h^2}{12}$. Verbindet man nun D mit E' und zieht durch D die Linie DK ſenkrecht zu $E'D$, ſo iſt $\overline{O'D}^2 = \overline{E'O'} \cdot \overline{O'K} = \xi \cdot \overline{O'K}$, d. h.

Fig. 125.



$$\overline{O'K} = \frac{\overline{O'D}^2}{\xi} = \frac{h^2}{12 \xi} ;$$

mithin

$$\overline{O'K} = z_0 .$$

K iſt alſo ein Punkt der Null-Linie, und die durch K parallel zur Y-Axe gelegte Linie NN iſt die Null-Linie ſelbſt.

Eine etwas geänderte Conſtruction iſt bei weniger einfachen Querſchnitten anwendbar. Nach Art. 71 (S. 51) iſt der Trägheitsradius

$$R = \sqrt{\frac{\mathfrak{J}}{F}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{J} = F R^2 .$$

Demnach iſt nach Gleichung 103

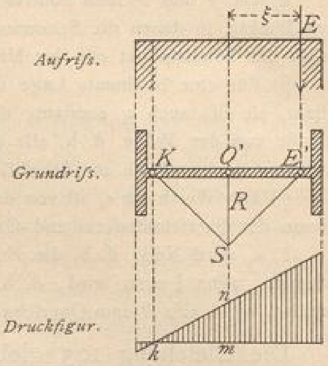
$$z_0 = - \frac{\mathfrak{J}}{F \xi} = - \frac{F R^2}{F \xi} = - \frac{R^2}{\xi} ,$$

woraus ſich die folgende Conſtruction (Fig. 126) ergiebt.

In O' errichte man zur ZZ-Axe die Lothrechte $\overline{O'S} = R$, verbinde S mit E' und ziehe durch S die Senkrechte $\overline{SK}$ zu $E'S$; dann iſt $\overline{O'S}^2 = R^2 = \overline{E'O'} . \overline{O'K} = \xi . \overline{O'K}$; mithin

$$\overline{O'K} = \frac{R^2}{\xi} \text{ (abſolute Gröſse)} = z_0 .$$

Fig. 126.

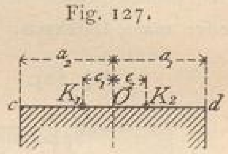


Der Punkt K in Fig. 125 u. 126 ift ein Punkt der Geraden, welche die Veränderung von σ darftellt; wenn noch ein Punkt diefer Geraden bekannt ift, fo kann fie gezeichnet werden. Für $z = 0$ ift nach Gleichung 102: $\sigma_0 = \frac{P}{F}$, d. h. in den Querfchnittspunkten, welche in der zur Kraftebene fenkrechten Schwerpunktsaxe liegen, ift die Spannung genau fo grofs, als wenn nur die Kraft P in der Axe wirkte. Man kann $\frac{P}{F}$ leicht ermitteln und nach beliebigem Mafsftabe im entfprechenden Punkte m (Fig. 126) auftragen. Ift $\overline{mn} = \frac{P}{F}$, fo ergiebt die Verbindung von m mit k die Gerade für σ.

128. Kernpunkte. Die Beanfpruchung der Querfchnittstheile ift an den beiden Seiten der Null-Linie verfchiedenartig, an der einen Seite Druck, an der anderen Zug. Es ift nunmehr zu unterfuchen, wie die Kraft P liegen mufs, damit nur Druckfpannungen im Querfchnitte auftreten[27]).

Offenbar find im ganzen Querfchnitte nur Druckfpannungen, wenn die den äufserften Querfchnittspunkten c und d (Fig. 127) entfprechenden Spannungen Druck bedeuten; denn dann fällt die Null-Linie aufserhalb des Querfchnittes (fiehe Fig. 124a). Nun ift die Spannung im Punkte d, weil für denfelben $z = a_1$ ift, nach Gleichung 102

Fig. 127.



$$\sigma_{max} = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{F \xi a_1}{\mathfrak{J}}\right),$$

diejenige im Punkte c, weil für diefen $z = -a_2$ ift,

$$\sigma_{min} = \frac{P}{F}\left(1 - \frac{F \xi a_2}{\mathfrak{J}}\right).$$

Wenn fowohl σ_{max}, wie σ_{min} Druck bedeuten, alfo pofitiv find, findet im ganzen Querfchnitte nur Druck ftatt; dies ift der Fall, wenn gleichzeitig erfüllt ift

$$\left(1 + \frac{F \xi a_1}{\mathfrak{J}}\right) > 0 \quad \text{und} \quad \left(1 - \frac{F \xi a_2}{\mathfrak{J}}\right) > 0,$$

d. h. wenn

$$\xi > -\frac{\mathfrak{J}}{F a_1} \quad \text{und} \quad \xi < \frac{\mathfrak{J}}{F a_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 104.$$

ift. Der Schnittpunkt E der Kraft P mit dem Querfchnitte mufs fich alfo zwifchen zwei Punkten K_1 und K_2 (Fig. 127) befinden, welche in den Abftänden $-\frac{\mathfrak{J}}{F a_1}$, bezw. $\frac{\mathfrak{J}}{F a_2}$ von der Axe O liegen, wenn nur Druck im Querfchnitt herrfchen foll. Wir bezeichnen abkürzungsweife

$$\frac{\mathfrak{J}}{F a_1} = e_1 \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{J}}{F a_2} = e_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 105.$$

Die Punkte K_1 und K_2 find die Kernpunkte.

---

27) Bei obiger Unterfuchung hätten die Darlegungen in Art. 108 (S. 91), betreffend den Kern, zu Grunde gelegt werden können; die obige Art der Ableitung ift gewählt, um die Entwickelung der Formeln 104 vom vorherigen Studium der Art. 105 bis 114 (S. 86 bis 94) unabhängig zu erhalten.

Da auf die ſämmtlichen für e_1 und e_2 maſsgebenden Gröſsen $\mathfrak{J}$, F, a_1 und a_2 ausſchlieſslich die Querſchnittsgeſtaltung Einfluſs hat, ſo iſt die Lage der Kernpunkte nur von der Form und Gröſse des Querſchnittes abhängig.

Für das Rechteck iſt $\mathfrak{J} = \frac{b h^3}{12}$, $F = b h$ und $a_1 = a_2 = \frac{h}{2}$; mithin $e_1 = e_2 = \frac{h}{6}$. Soll alſo nur Druck im Querſchnitt ſtattfinden, ſo darf die Kraft den Querſchnitt in keinem gröſseren Abſtande von der Axe ſchneiden, als $\frac{h}{6}$; mit anderen Worten: ſie muſs den Querſchnitt im inneren Drittel ſchneiden (vergl. auch Art. 109, S. 91).

Für den Kreisquerſchnitt iſt $e_1 = e_2 = \frac{d}{8}$, d. h. die Kraft darf das innere Viertel nicht verlaſſen, wenn nur Druck auftreten ſoll. (Vergl. Art. 110, S. 92.)

Für den Kreisringquerſchnitt bei geringer Ringſtärke iſt $e_1 = e_2 = \frac{d}{4}$; die Kraft muſs alſo in der inneren Hälfte verbleiben.

2) Druckvertheilung in Querſchnitten, welche nur Druck aufzunehmen vermögen, falls die Kraftebene alle Querſchnitte in Hauptaxen ſchneidet.

Die für die Druckvertheilung unter 1 entwickelten Geſetze gelten auch für Conſtructionen, welche nur Druck aufnehmen können, ſo lange die Kraft eine derartige Lage hat, daſs im ganzen Querſchnitt wirklich nur Druckſpannungen auftreten, ſo lange alſo die Kraft innerhalb der Kernpunkte liegt. 129. Druckvertheilung.

Wenn daher z. B. beim rechteckigen Querſchnitte die Kraft im inneren Drittel liegt, ſo kann die Lage der Null-Linie, ſo wie die Druckvertheilung genau ſo ermittelt werden, wie in Fig. 125 gezeigt iſt. Dieſe Conſtruction findet häufige Anwendung nicht nur bei Freiſtützen mit rechteckigem Querſchnitt, ſondern auch bei Stützmauern, in Gewölben etc.

Als Maſs ſenkrecht zur Bildfläche wählt man zweckmäſsig die Einheit (gewöhnlich 1 m), ſo daſs die gedrückte Fläche — der Querſchnitt — ein Rechteck von der Breite (ſenkrecht zur Bildfläche) gleich der Einheit iſt. Die zweite Abmeſſung des Rechteckes iſt bei den Gewölben (Fig. 128) die Gewölbſtärke d an der betreffenden Stelle, bei den Stützmauern die Mauerſtärke d (Fig. 129).

In den beiden neben ſtehenden Figuren ſchneidet die Mittelkraft die betreffende Fuge innerhalb der Kernpunkte, ſo daſs alſo nur Druck im Querſchnitt entſteht und der ganze Querſchnitt wirkſam iſt. Die angewandte Conſtruction iſt ohne weitere Erläuterung verſtändlich.

Fig. 128.

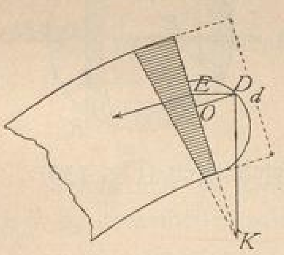
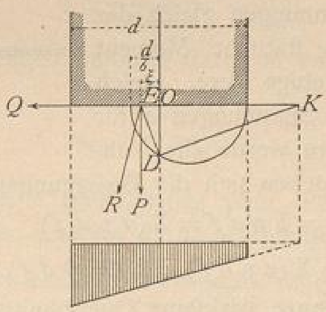


Fig. 129.



Es möge noch bemerkt werden, daſs dieſelbe bei den Gewölben nur annäherungsweiſe richtig iſt, weil die Vorausſetzung der geraden Axe nicht zutrifft. Der Fehler iſt aber bei einigermaſsen groſsem Halbmeſſer des Gewölbes unerheblich.

Wenn aber die Kraft den Querſchnitt auſserhalb der Kernpunkte ſchneidet, ſo fällt die Null-Linie in den Querſchnitt, und an der einen Seite derſelben würden Zugſpannungen entſtehen, falls der Bauſtoff dieſelben aufnehmen könnte. Da dies nach obiger Annahme hier nicht möglich iſt, ſo wird auf dieſem ganzen Querſchnittstheile kein Uebertragen von Spannungen ſtattfinden können; die ganze Spannungsübertragung findet auf der Druckſeite der Null-Linie ſtatt. Man nennt dieſen Theil