Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

1) Theorie des Widerstandes gegen Zerknicken

urn:nbn:de:hbz:466:1-77733

erſten Wiederholung der Conſtruction ein genügend genaues Zuſammenfallen der Punkte E und V.

Vorſtehende Unterſuchung iſt für die Ermittelung der Standſicherheit von Gewölbepfeilern, durchbrochenen Mauern, Schornſteinen etc. von groſser Wichtigkeit.

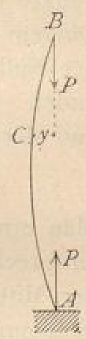
b) Gedrückte Stäbe unter Berückſichtigung der Zerknickungsgefahr.

1) Theorie des Widerſtandes gegen Zerknicken.

133. Voraus-ſetzungen.

Wenn auf einen Stab mit gerader Axe zwei Zugkräfte P wirken, deren Richtungslinien genau mit der Stabaxe zuſammenfallen, ſo findet in den einzelnen Punkten des Stabes nur eine Zugbeanſpruchung ſtatt. Wirken auf einen eben ſolchen Stab zwei Druckkräfte P ebenfalls genau in der Richtung der Axe und einander entgegengeſetzt, ſo müſſten nach Früherem an den einzelnen Stellen gleichfalls nur Druckbeanſpruchungen ſtattfinden, welche bei überall gleichem Stabquerſchnitt in allen Punkten für die Flächeneinheit gleich wären. In Wirklichkeit kann man darauf nicht immer rechnen. Wenn die Länge des Stabes im Vergleich zu ſeiner Querſchnittsfläche groſs iſt, ſo wird unter dem Einfluſſe der drückenden Kräfte ein Ausbiegen ſtattfinden, und auf jeden Querſchnitt C (Fig. 135) wirkt alsdann auſser der Axialkraft P noch ein Moment $P y$. In dieſem Falle findet Beanſpruchung des Stabes auf Zerknicken ſtatt, und derſelbe iſt mit Rückſicht auf dieſe Beanſpruchungsweiſe zu berechnen.

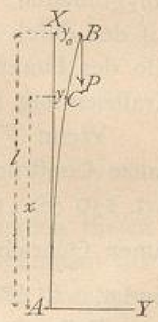
Fig. 135.



Es kann auffallen, daſs hier ſcheinbar ein Widerſpruch zwiſchen der Theorie und Praxis obwaltet; in Wirklichkeit iſt derſelbe aber nicht vorhanden. So lange die Druckkräfte ganz genau in der Stabaxe und in deren Richtung wirken, findet ein Ausbiegen nicht ſtatt; ſobald aber in Folge von unvermeidlichen Fehlern die Kräfte auſserhalb der Axe angreifen, bezw. von der Richtung der Axe abweichen, entſteht für jeden Querſchnitt des Stabes ein Biegungsmoment, welches unter Umſtänden ein Ausbiegen zur Folge hat. Man kann daher in dieſem Falle von einem labilen Gleichgewichtszuſtande ſprechen.

Ein Ausbiegen der Stabaxe kann nicht nur in der in Fig. 135 gezeichneten Richtung ſtattfinden, ſondern iſt nach allen möglichen Richtungen denkbar; es iſt demnach zu unterſuchen, nach welcher Richtung ein ſolches Ausbiegen am leichteſten ſtattfindet, und der Querſchnitt des Stabes danach anzuordnen. Für die folgenden Unterſuchungen ſoll angenommen werden, daſs 1) als äuſsere Kräfte nur die Axialkräfte P wirken, 2) die Axialkräfte in den Schwerpunkten der Endflächen angreifen und 3) der Stab überall gleichen Querſchnitt habe.

Fig. 136.



134. Elaſtiſche Linie.

Unter Einwirkung der Kraft P möge der Stab (Fig. 136), deſſen Axe urſprünglich mit AX zuſammenfiel, in die Lage AB gekommen ſein; die Bildebene XAY, in welcher AB liegt, ſchneide alle Querſchnitte in Hauptaxen; der Axenpunkt B habe nach der Formänderung die Ordinate y_0. Für irgend einen Punkt C mit der Abſciſſe x ſei die Ordinate y; das Moment für dieſen Punkt iſt $M = P\,(y_0 - y)$ und die elaſtiſche Linie demnach aus der Gleichung 100 zu ermitteln. Danach wird

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P\,(y_0 - y)}{E \mathfrak{J}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 114.$$

Hierin iſt $\mathfrak{J}$ das Trägheitsmoment des Querſchnittes bei C, bezogen auf diejenige Schwerpunktsaxe deſſelben, welche ſenkrecht zur Kraftebene, alſo zur XY-

Ebene, fteht. Der Querfchnitt ift nach obiger Vorausfetzung conftant, alfo auch $\mathfrak{J}$ für die Integration conftant; da P und E gleichfalls conftant find, fo hat bei der Integration $\frac{P}{E\mathfrak{J}}$ einen conftanten Werth. Abkürzungsweife werde

$$\frac{P}{E\mathfrak{J}} = a^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 115.$$

gefetzt, fo dafs die Differentialgleichung der elaftifchen Linie lautet:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = a^2 (y_0 - y) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 116.$$

Die zweimalige Integration ergiebt als Gleichung der elaftifchen Linie:

$$y = y_0 + A \sin a x + B \cos a x \quad \ldots \ldots \ldots \quad 117.$$

Die beiden Conftanten A und B find für die verfchiedenen Arten der Stabunterftützung verfchieden.

Bekanntlich ift

$$\sin \alpha = \sin (2 \pi + \alpha) = \sin (2 n \pi + \alpha) \text{ und } \cos \alpha = \cos (2 \pi + \alpha) = \cos (2 n \pi + \alpha),$$

worin n eine beliebige ganze Zahl oder Null bedeutet, alfo gleich $0, 1, 2, 3 \ldots$ gefetzt werden kann. Es ift alfo auch

$$\sin a x = \sin (a x + 2 \pi) = \sin \left[a \left(x + \frac{2 \pi}{a} \right) \right]$$

und

$$\cos a x = \cos (a x + 2 \pi) = \cos \left[a \left(x + \frac{2 \pi}{a} \right) \right].$$

Die Gleichung 117 kann daher auch gefchrieben werden:

$$y = y_0 + A \sin \left[a \left(x + \frac{2 \pi}{a} \right) \right] + B \cos \left[a \left(x + \frac{2 \pi}{a} \right) \right] \quad \ldots \quad 118.$$

Man erhält fonach gleich grofse Werthe für y, wenn man x und wenn man $x + \frac{2 \pi}{a}$ einfetzt, d. h. die Ordinaten je zweier Punkte, deren Abfciffen um $\frac{2 \pi}{a}$ von einander verfchieden find, haben gleiche Werthe. Die elaftifche Linie ift demnach eine Wellenlinie; die Wellenlänge ift

$$\lambda = \frac{2 \pi}{a}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 119.$$

und, da nach Gleichung 115: $a = \sqrt{\frac{P}{E\mathfrak{J}}}$ ift,

$$\lambda = 2 \pi \sqrt{\frac{E\mathfrak{J}}{P}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 120.$$

Aus diefer Gleichung kann man, falls E, $\mathfrak{J}$ und P gegeben find, die Wellenlänge berechnen. Ift dagegen λ gegeben, fo kann man aus Gleichung 120 diejenige Kraft P berechnen, welche die Durchbiegungen y erzeugen kann. Die Gröfse von P folgt aus Gleichung 120 zu:

$$P = \frac{4 \pi^2 E \mathfrak{J}}{\lambda^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 121.$$

Noch auf eine wichtige Eigenthümlichkeit der allgemeinen Gleichung 116 ift hinzuweifen. Diefelbe bleibt giltig, wenn man beiderfeits mit der beliebigen Zahl m multiplicirt; fie heifst alsdann:

$$m \frac{d^2 y}{d x^2} = m a^2 (y_0 - y) = a^2 (m y_0 - m y).$$

Es fei $m y_0 = \eta_0$ und $m y = \eta$; alsdann ift auch $m \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d^2 \eta}{d x^2}$, alfo

$$\frac{d^2 \eta}{d x^2} = a^2 (\eta_0 - \eta) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 122.$$

Die Gleichung 116 gilt daher für beliebig grofse Werthe von y. Sind alfo unter der Einwirkung einer Kraft P die Durchbiegungen y möglich, fo find auch m-mal fo grofse, d. h. beliebig grofse Durchbiegungen möglich, alfo auch fo grofse, dafs der Stab zerknickt wird.

Der Werth von P in Gleichung 121, welcher die Durchbiegungen y erzeugen kann, kann alfo auch den Stab zerknicken.

Bei der vorftehenden Ableitung ift angenommen worden, dafs die Ausbiegung in der XY-Ebene erfolge; diefelbe kann aber auch in der fenkrecht zu erfterer ftehenden XZ-Ebene ftattfinden, welche die zweiten Hauptaxen der Querfchnitte enthält. Die Entwickelung für diefen Fall bleibt genau diefelbe, wie die obige, und man erhält für P denfelben Ausdruck, wie dort; nur ift alsdann unter $\mathcal{J}$ das Trägheitsmoment des Querfchnittes, bezogen auf die zur XZ-Ebene fenkrechte Schwerpunktsaxe, zu verftehen, welche Axe parallel zur Y-Axe ift. Nennen wir daffelbe $\mathcal{J}_1$, die entfprechenden Werthe von P und λ aber P_1 und λ_1, fo ift

$$P_1 = \frac{4 \pi^2 E \mathcal{J}_1}{\lambda_1^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 123.$$

Ein Ausbiegen des Stabes kann nun fowohl in der XY-Ebene, wie in der XZ-Ebene ftattfinden; die wirkliche dem Stabe zuzumuthende Belaftung darf den Grenzwerth nicht erreichen. Die Gleichungen 121 u. 123 geben zwei Grenzwerthe, und naturgemäfs ift der kleinere von beiden als mafsgebend einzuführen. Nimmt man in beiden Richtungen gleiche λ an, fo unterfcheiden fich beide Grenzwerthe nur durch die Werthe der Trägheitsmomente. In den Ausdruck für P ift demnach von den beiden Hauptträgheitsmomenten das kleinere einzufetzen.

Wenn die Ausbiegung nach allen Richtungen möglich ift, fo nimmt man an, dafs diefelbe fenkrecht zu derjenigen Hauptaxe erfolgt, welcher das kleinere Hauptträgheitsmoment entfpricht; denn diefes ift nach Art. 62 (S. 41) das kleinfte der für alle Schweraxen möglichen Trägheitsmomente.

Für die weiteren Betrachtungen find die verfchiedenen möglichen Fälle in das Auge zu faffen.

135. Einfeitig eingefpannter Stab.

α) Einfeitig eingefpannter, an einem Ende in der Richtung der Axe belafteter Stab (Fig. 137). Aus der allgemeinen Gleichung 117 für die elaftifche Linie:

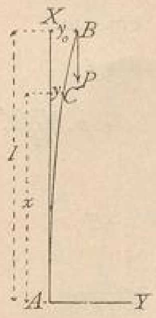
$$y = y_0 + A \sin a x + B \cos a x$$

folgt

$$\frac{d y}{d x} = A a \cos a x - B a \sin a x \quad \ldots \ldots \ldots \quad 124.$$

Die Conftanten A und B werden aus den befonderen Bedingungen für diefen Fall beftimmt.

Fig. 137.



Für $x = 0$ iſt $\frac{dy}{dx} = 0$, weil der Stab an dieſer Stelle wegen der Einſpannung ſtets die Richtung der X-Axe hat; demnach iſt in Gleichung 124

$$A\,a = 0,$$

oder, da a nicht gleich Null iſt, $A = 0$. Eben ſo iſt für $x = 0$ auch $y = 0$, daher in Gleichung 117: $0 = y_0 + B$ oder $B = -y_0$. Sonach lautet die Gleichung der elaſtiſchen Linie für dieſen Fall:

$$y = y_0 - y_0 \cos a\,x = y_0\,(1 - \cos a\,x) \quad . \quad . \quad . \quad 125.$$

Für $x = l$ wird $y = y_0$; demnach $y_0 = y_0\,(1 - \cos a\,l)$. Dieſe Gleichung kann nur beſtehen, wenn

$$\cos a\,l = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 126.$$

iſt. Soll alſo der Stab unter Einwirkung der Kraft P ſich ſo durchbiegen, wie Fig. 137 zeigt, alſo im Punkte C die Ordinate y, im Endpunkte die Ordinate y_0 haben können, ſo muſs $\cos a\,l = 0$ ſein; es muſs alſo

$$a\,l = 90^0, \text{ bezw. } 270^0, \text{ bezw. } 450^0 \text{ u. ſ. w.},$$

oder allgemein

$$a\,l = \frac{\pi}{2}\,(2\,n + 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 127.$$

ſein, worin n die Werthe 0, 1, 2, 3 . . . annehmen kann. Daraus folgt auch der Werth von P, welcher den Stab in der angegebenen Weiſe biegen, alſo nach den Erklärungen in Art. 134 (S. 122) auch zerknicken kann. Für dieſen Fall iſt nach Gleichung 127: $a = \frac{\pi}{2\,l}\,(2\,n + 1)$, und,

Fig. 138.

da $a = \sqrt{\frac{P}{E\,\mathfrak{J}}}$ iſt, $\sqrt{\frac{P}{E\,\mathfrak{J}}} = \frac{\pi}{2\,l}\,(2\,n + 1)$; alſo

$$P = \frac{E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{4\,l^2}\,(2\,n + 1)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 128.$$

Die zugehörige Wellenlänge λ folgt aus Gleichung 119. Es iſt

$$\lambda = \frac{2\,\pi}{a} = \frac{l}{2\,n + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 129.$$

Die beiden Gleichungen geben Aufſchluſs über die Gröſse der Grenzwerthe P, welche bei den verſchiedenen Anordnungen des eingeſpannten Stabes einzuführen ſind.

Bei dem in Fig. 137 u. 138 vorgeführten Falle iſt die ganze Wellenlänge λ viermal ſo groſs, als die freie Länge l, d. h. es iſt $\lambda = 4\,l$; demnach folgt für dieſen Fall aus der Gleichung 129: $n = 0$, und damit aus Gleichung 128

$$P = \frac{E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{4\,l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 130.$$

Wird ein Punkt E im Abſtande $\frac{l}{3}$ vom Einſpannungspunkte feſt gelegt, ſo muſs die Formänderung ſo erfolgen, daſs $l = \frac{3}{4}\,\lambda$ (Fig. 140) wird; dafür folgt aus

Gleichung 129: $\lambda = \frac{3\,\lambda}{2\,n+1}$ die Gröfse $n = 1$, ferner aus Gleichung 128 als zerknickende Kraft

$$P = \frac{9\,E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{4\,l^2} \quad . \quad . \quad . \quad 131.$$

Werden endlich zwei Punkte E und F in den Abftänden $\frac{l}{5}$ und $\frac{3}{5}\,l$ vom Einfpannungspunkte feft gehalten (Fig. 139), fo wird $\lambda = \frac{4}{5}\,l$ und aus Gleichung 129: $n = 2$; alsdann ift die zerknickende Kraft

Fig. 139.

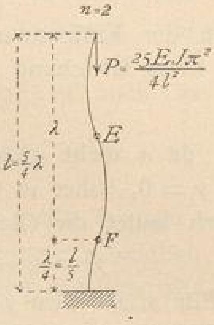
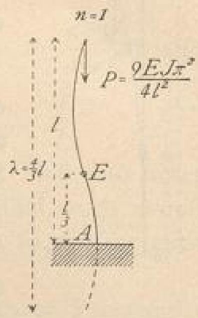


Fig. 140.



$$P = \frac{25}{4}\,\frac{E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{l^2}.$$

Man fieht, wie wefentlich der Grenzwerth durch angemeffene Conftruction erhöht werden kann.

136. Stab mit freien Enden.

β) Stab mit beiderfeits frei drehbaren Enden (Fig. 141). Die fymmetrifche Belaftung des Stabes wird zur Folge haben, dafs beide Stabhälften, oberhalb und unterhalb der Stabmitte, fich genau gleich verhalten; man kann demnach diefen Fall auf den vorhergehenden dadurch zurückführen, dafs man den Anfangspunkt des Coordinatenfyftems in die Stabmitte legt. Jede Hälfte verhält fich dann genau eben fo, wie der Stab im vorigen Artikel; die zerknickende Kraft P, d. h. der Grenzwerth von P, ift demnach aus der Gleichung 128 zu entnehmen, jedoch mit der Aenderung, dafs ftatt des dortigen l hier $\frac{l}{2}$ einzufetzen ift, weil die dort mit l bezeichnete Länge hier nur $\frac{l}{2}$ beträgt.

Fig. 141.

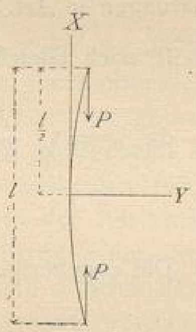
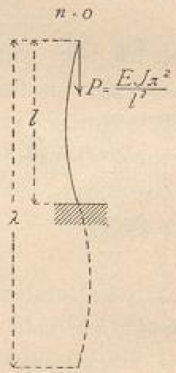


Fig. 142.



Für den vorliegenden Fall ift alfo

$$P = \frac{E\,\mathfrak{J}\,\pi^2\,(2\,n+1)^2}{4\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{l^2}\,(2\,n+1)^2$$

und

$$\lambda = \frac{4\,\frac{l}{2}}{2\,n+1} = \frac{2\,l}{2\,n+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 132.$$

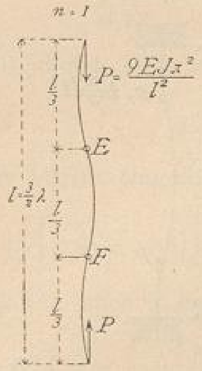
Bei dem in Fig. 142 dargeftellten Falle ift $\lambda = 2\,l$, d. h. $n = 0$, mithin

$$P = \frac{E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{l^2}.$$

Wird ein Punkt E in der Mitte des Stabes feft gehalten, fo findet die Durch-

Fig. 143.

Fig. 144.



biegung nach Fig. 143 fo ftatt, dafs $l = \lambda$, alfo $n = \frac{1}{2}$ wird; alsdann hat P den Werth:

$$P = \frac{4 \, E \, \mathfrak{J} \, \pi^2}{l^2}.$$

Sind endlich zwei Punkte E und F in den Abftänden $\frac{l}{3}$ von den Endpunkten feft gehalten, fo dafs die Formänderung nach Fig. 144 eintreten mufs, fo wird $l = \frac{3}{2} \lambda$, alfo $n = 1$ und

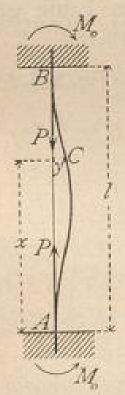
$$P = \frac{9 \, E \, \mathfrak{J} \, \pi^2}{l^2}.$$

Die Formänderung kann auch unter Beibehaltung der Punkte E, F und der Endpunkte fo eintreten, dafs die Bogenlinien auf diejenige Seite der urfprünglichen Axe fallen, welche der gezeichneten entgegengefetzt ift.

γ) Stab mit eingefpannten Enden (Fig. 145). Beide Endpunkte des Stabes verbleiben in Folge der Einfpannung in der Lothrechten der Axe XX; die Tangente an die Axe in diefen Punkten, d. h. die Axenrichtung, kann fich nicht verändern. An jedem Einfpannungspunkte mufs demnach ein Kräftepaar wirken, deffen Moment ftets genügend grofs ift, um den Stab in der urfprünglichen Richtung zu erhalten; diefes Moment möge M_0 genannt werden. Für einen beliebigen Punkt C mit der Abfciffe x ift das Biegungsmoment 137. Stab mit eingefpannten Enden.

$$M = M_0 - P y = \left(\frac{M_0}{P} - y\right) P.$$

Fig. 145.



Demnach lautet die Differentialgleichung der elaftifchen Linie hier:

$$E \, \mathfrak{J} \frac{d^2 y}{d x^2} = P \left(\frac{M_0}{P} - y\right) \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P}{E \, \mathfrak{J}} \left(\frac{M_0}{P} - y\right).$$

Abkürzungsweife werde wieder $\frac{P}{E \, \mathfrak{J}} = a^2$ gefetzt; alsdann ift

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = a^2 \left(\frac{M_0}{P} - y\right).$$

Als Gleichung der elaftifchen Linie ergiebt fich

$$y = \frac{M_0}{P} + A \sin a x + B \cos a x; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 133.$$

ferner

$$\frac{d y}{d x} = A \, a \cos a x - B \, a \sin a x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 134.$$

Die Conftanten A und B ergeben fich in folgender Weife. Für $x = 0$ ift $y = 0$, demnach in Gleichung 133: $0 = \frac{M_0}{P} + B$ und $B = -\frac{M_0}{P}$. Für $x = 0$ wird $\frac{d y}{d x} = 0$, folglich in Gleichung 134: $0 = A \, a$ und, da a nicht gleich Null ift, $A = 0$. Die Gleichung der elaftifchen Linie lautet fonach im vorliegenden Falle:

$$y = \frac{M_0}{P} - \frac{M_0}{P} \cos a x = \frac{M_0}{P} (1 - \cos a x). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 135.$$

Für $x = l$ ist $y = 0$, demnach

$$0 = \frac{M_0}{P} (1 - \cos a\, l) \text{ oder}$$

$$\cos a\, l = 1.$$

Damit diese Gleichung erfüllt werde, mufs

$$a\, l = 2\, n\, \pi$$

sein, worin n die Werthe 0, 1, 2, 3 ... haben kann.

Aus Gleichung 119 folgt für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\, \pi\, l}{2\, n\, \pi} = \frac{l}{n} \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{n}.$$

Fig. 146.

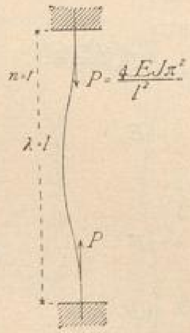


Fig. 147.

Ferner wird nach Gleichung 119

$$a^2 = \frac{P}{E\, \mathfrak{J}} = \frac{4\, \pi^2}{\lambda^2} \quad \text{und} \quad P = \frac{4\, E\, \mathfrak{J}\, \pi^2}{\lambda^2}.$$

Diese beiden Gleichungen geben über die Gröfse von P Aufschlufs. Es ist

für $n = 1$:

$$\frac{\lambda}{l} = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda = l;$$

$$P = \frac{4\, E\, \mathfrak{J}\, \pi^2}{l^2};$$

für $n = 2$:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{l}{2};$$

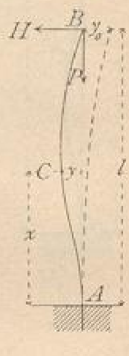
$$P = \frac{16\, E\, \mathfrak{J}\, \pi^2}{l^2}.$$

Der erstere Fall ist durch Fig. 146, der zweite durch Fig. 147 dargestellt; letzterer tritt ein, wenn der Punkt E in der Stabmitte fest gehalten wird.

138. Stab mit einem eingespannten und einem geführten Ende.

δ) Stab mit einem eingespannten und einem in der Lothrechten geführten Ende (Fig. 148). Wenn der Punkt B nicht in der lothrechten Linie geführt wäre, würde er etwa die punktirte Lage eingenommen haben; die Führung mufs also durch eine wagrechte Kraft H verursacht werden, welche stets genügend grofs ist, um ein Ausweichen von B zu verhüten. Diese Kraft H ist ihrer Gröfse nach nicht bekannt.

Fig. 148.



Das Biegungsmoment für irgend einen Punkt C des Stabes mit der Abscisse x ist nun

$$M = H(l - x) - P\, y = P\left[\frac{H}{P}(l - x) - y\right],$$

und die Differentialgleichung der elastischen Linie (siehe Gleichung 100)

$$E\, \mathfrak{J} \frac{d^2 y}{d\, x^2} = P\left[\frac{H}{P}(l - x) - y\right]$$

oder

$$\frac{d^2 y}{d\, x^2} = \frac{P}{E\, \mathfrak{J}}\left[\frac{H}{P}(l - x) - y\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 136.$$

Man setzt, um diese Gleichung aufzulösen, $\frac{d^2 y}{d\, x^2} = z$; wieder sei abkürzungsweise $\frac{P}{E\, \mathfrak{J}} = a^2$; alsdann ist

$$z = a^2\left[\frac{H}{P}(l - x) - y\right] \quad \text{und} \quad \frac{d\, z}{d\, x} = a^2\left(-\frac{H}{P} - \frac{d\, y}{d\, x}\right);$$

ferner

$$\frac{d^2 z}{d x^2} = - a^2 \frac{d^2 y}{d x^2} = - a^2 z .$$

Die Auflöfung diefer Differentialgleichung ergiebt wiederum genau, wie in Art. 134 (S. 123)

$$z = A \sin a x + B \cos a x , \quad \ldots \ldots \ldots \quad 137.$$

und wenn für z der Werth eingeführt wird,

$$a^2 \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right] = A \sin a x + B \cos a x \quad \ldots \quad 138.$$

Die Differentiation nach x ergiebt

$$- a^2 \left(\frac{H}{P} + \frac{d y}{d x} \right) = A a \cos a x - B a \sin a x . \quad \ldots \quad 139.$$

Aus den beiden Gleichungen 138 u. 139 ergeben fich die Werthe der Conftanten A und B, wie folgt.

Für $x = 0$ ift $y = 0$, alfo nach Gleichung 138: $\frac{a^2 H}{P} l = B$; für $x = 0$ ift $\frac{d y}{d x} = 0$, alfo nach Gleichung 139: $- \frac{a^2 H}{P} = A a$ und $- \frac{a H}{P} = A$. Endlich ift für $x = l$ auch $y = 0$, weil der Endpunkt des Stabes in der Lothrechten geführt wird, alfo nach Gleichung 138

$$0 = A \sin (a l) + B \cos (a l), \text{ woraus } \operatorname{tg} a l = - \frac{B}{A}$$

folgt, und wenn für B und A die foeben gefundenen Werthe eingefetzt werden,

$$\operatorname{tg} a l = a l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 140.$$

Diefe Beziehung findet ftatt für $a l = 0$, aufserdem aber auch für den Winkel $257° 27' 12''$; für diefen Winkel ift $\operatorname{tg} a l = a l = 4{,}4934$, alfo $a = \frac{4{,}4934}{l}$ und da $a^2 = \frac{P}{E \mathcal{J}}$ ift, fo wird

$$P = \frac{E \mathcal{J} (4{,}4934)^2}{l^2} = 20{,}19 \frac{E \mathcal{J}}{l^2} . \quad \ldots \ldots \quad 141.$$

Dies ift der Werth von P, für welchen Gleichung 140 erfüllt ift und einen Sinn hat; der Werth $a l = 0$ ift nicht zu verwerthen. Diefes P vermag fonach die in Fig. 148 gezeichnete Formänderung hervorzurufen, alfo nach Früherem auch den Stab zu zerknicken.

In Art. 135 bis 138 find diejenigen Werthe der zerknickenden Kraft entwickelt worden, welche für die Praxis hauptfächlich von Bedeutung find. Nachftehend find diefelben in Fig. 149 bis 152 überfichtlich zufammengeftellt, wobei überall der Stab auf feine ganze Länge frei angenommen ift; der Werth von P im vierten Falle ift des bequemen Vergleiches wegen ebenfalls als Product mit dem Factor $\frac{E \mathcal{J} \pi^2}{l^2}$ dargeftellt. 139. Zufammenftellung.

Die Tragfähigheit der Stäbe verhält fich demnach

in den Fällen	1	2	4	3
wie	$\frac{1}{4}$	: 1	: 2,048	: 4.

Fig. 149.
Fall 1.

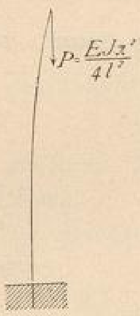


Fig. 150.
Fall 2.

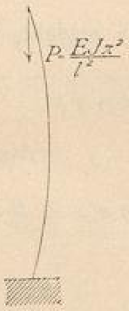


Fig. 151.
Fall 3.

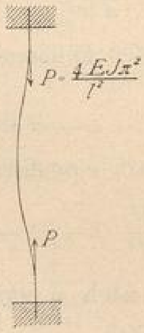
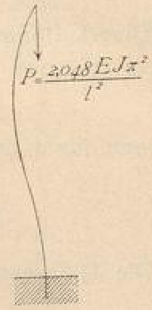


Fig. 152.
Fall 4.



Durch entſprechende Endanordnung würde man alſo die Tragfähigkeit des Stabes verſechzehnfachen können. Die angegebenen Kräfte ſind thatſächlich im Stande, den Stab zu zerknicken, und deſshalb ſind Sicherheits-Coefficienten einzuführen.

2) Querſchnittsermittelung bei centriſcher Druckbelaſtung.

140.
Zuläſsige
Beanſpruchung.

Die unter 1 entwickelten Formeln geben die Gröſse derjenigen Kraft P an, welche im Stande iſt, den Stab oder die Stütze zu zerknicken. Die dem Stabe wirklich zuzumuthende Laſt darf naturgemäſs dieſen Werth niemals erreichen; ſie darf nur einen Bruchtheil des ermittelten Knickwerthes betragen. Verſteht man unter s den ſog. Sicherheits-Coefficienten, unter C einen von der Endbefeſtigung des Stabes abhängigen Coefficienten, ſo iſt die Kraft, welche mit Rückſicht auf die Zerknickungsgefahr auf den Stab wirken darf,

$$P = \frac{C E \mathfrak{J}}{s\, l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 142.$$

Dieſer Werth iſt aber nicht ohne Weiteres für alle Fälle anwendbar. Wenn die Stablänge l, alſo auch die im Nenner vorkommende Gröſse l^2, ſehr klein iſt, ſo ergeben ſich für P ſehr groſse Werthe, gröſsere Werthe, als die einfache Druckbeanſpruchung des Stabes geſtattet. Wird die zuläſſige Druckbeanſpruchung für die Flächeneinheit des Querſchnittes mit K, die Querſchnittsfläche mit F bezeichnet, ſo darf höchſtens ſein

$$P = F K \quad \ldots\ldots\ldots \quad 143.$$

Gröſser, als der Werth in Gleichung 143 iſt, darf P mit Rückſicht auf die zuläſſige Druckbeanſpruchung nicht werden; gröſser, als der Werth in Gleichung 142 iſt, darf P der Zerknickungsgefahr halber nicht werden; deſshalb iſt ſtets der kleinere dieſer beiden Werthe für diejenige Belaſtungsgröſse maſsgebend, welche dem Stabe zugemuthet werden darf. Bei groſser Stablänge l ergiebt die Gleichung 142, bei geringer Stablänge l die Gleichung 143 kleinere Werthe für P. Der Grenzwerth von l, etwa l_1, wird derjenige ſein, für welchen aus beiden Gleichungen derſelbe Werth von P folgt. Dieſer Grenzwerth ergiebt ſich durch Gleichſetzung der beiden Werthe von P in den Ausdrücken 142 u. 143 zu

$$l_1 = \sqrt{C}\,\sqrt{\frac{E}{K s}}\,\sqrt{\frac{\mathfrak{J}}{F}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 144.$$