Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

2) Querschnittsermittlelung bei centrischer Druckbelastung

urn:nbn:de:hbz:466:1-77733

Fig. 149.
Fall 1.

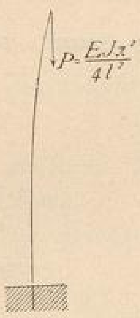


Fig. 150.
Fall 2.

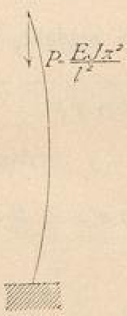


Fig. 151.
Fall 3.

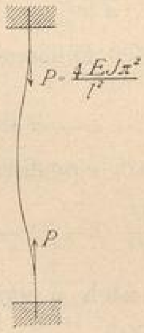
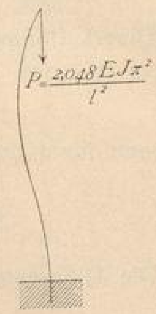


Fig. 152.
Fall 4.



Durch entſprechende Endanordnung würde man alſo die Tragfähigkeit des Stabes verſechzehnfachen können. Die angegebenen Kräfte ſind thatſächlich im Stande, den Stab zu zerknicken, und deſshalb ſind Sicherheits-Coefficienten einzuführen.

2) Querſchnittsermittelung bei centriſcher Druckbelaſtung.

140. Zulässige Beanspruchung.

Die unter 1 entwickelten Formeln geben die Gröſse derjenigen Kraft P an, welche im Stande iſt, den Stab oder die Stütze zu zerknicken. Die dem Stabe wirklich zuzumuthende Laſt darf naturgemäſs dieſen Werth niemals erreichen; ſie darf nur einen Bruchtheil des ermittelten Knickwerthes betragen. Verſteht man unter s den ſog. Sicherheits-Coefficienten, unter C einen von der Endbefeſtigung des Stabes abhängigen Coefficienten, ſo iſt die Kraft, welche mit Rückſicht auf die Zerknickungsgefahr auf den Stab wirken darf,

$$P = \frac{C E \mathcal{J}}{s l^2} \qquad \ldots \ldots \ldots \quad 142.$$

Dieſer Werth iſt aber nicht ohne Weiteres für alle Fälle anwendbar. Wenn die Stablänge l, alſo auch die im Nenner vorkommende Gröſse l^2, ſehr klein iſt, ſo ergeben ſich für P ſehr groſse Werthe, gröſsere Werthe, als die einfache Druckbeanſpruchung des Stabes geſtattet. Wird die zuläſſige Druckbeanſpruchung für die Flächeneinheit des Querſchnittes mit K, die Querſchnittsfläche mit F bezeichnet, ſo darf höchſtens ſein

$$P = F K \qquad \ldots \ldots \ldots \quad 143.$$

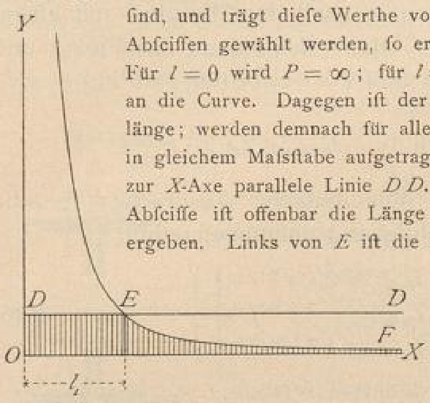
Gröſser, als der Werth in Gleichung 143 iſt, darf P mit Rückſicht auf die zuläſſige Druckbeanſpruchung nicht werden; gröſser, als der Werth in Gleichung 142 iſt, darf P der Zerknickungsgefahr halber nicht werden; deſshalb iſt ſtets der kleinere dieſer beiden Werthe für diejenige Belaſtungsgröſse maſsgebend, welche dem Stabe zugemuthet werden darf. Bei groſser Stablänge l ergiebt die Gleichung 142, bei geringer Stablänge l die Gleichung 143 kleinere Werthe für P. Der Grenzwerth von l, etwa l_1, wird derjenige ſein, für welchen aus beiden Gleichungen derſelbe Werth von P folgt. Dieſer Grenzwerth ergiebt ſich durch Gleichſetzung der beiden Werthe von P in den Ausdrücken 142 u. 143 zu

$$l_1 = \sqrt{C} \sqrt{\frac{E}{K s}} \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{F}} \qquad \ldots \ldots \ldots \quad 144.$$

Zerknickungsgefahr tritt erſt auf, wenn $l > l_1$ iſt; demnach iſt, falls die Stablänge kleiner als l_1 iſt, die Gleichung 143, falls ſie gröſser als l_1 iſt, die Gleichung 142 anzuwenden.

Klaren Einblick in die hier maſsgebenden Verhältniſſe verſchafft die graphiſche Darſtellung der Veränderlichkeit von P in Fig. 153. Ermittelt man diejenigen Werthe von P, welche ein Stab bei verſchiedenen Längen mit Rückſicht auf die Zerknickungsgefahr ertragen kann, falls Material, Querſchnittsform und Querſchnittsgröſse, ſo wie Befeſtigungsweiſe der Enden ſtets dieſelben ſind, und trägt dieſe Werthe von P als Ordinaten auf, während die zugehörigen Längen als Abſciſſen gewählt werden, ſo erhält man eine Curve, offenbar die Curve der Gleichung 142. Für $l = 0$ wird $P = \infty$; für $l = \infty$ wird $P = 0$; die Y- und X-Axe ſind alſo Aſymptoten an die Curve. Dagegen iſt der Werth für P aus Gleichung 143 unabhängig von der Stablänge; werden demnach für alle möglichen Längen dieſe Werthe ermittelt und als Ordinaten in gleichem Maſsſtabe aufgetragen, wie die Werthe aus Gleichung 142, ſo ergiebt ſich eine zur X-Axe parallele Linie DD. Im Punkte E ſchneiden ſich beide Linien; die zugehörige Abſciſſe iſt offenbar die Länge l_1, für welche beide Gleichungen denſelben Werth von P ergeben. Links von E iſt die Linie DE, rechts von E die Curve EF maſsgebend. Die ſchraffirte Fläche deutet dies an.

Fig. 153.



Wenn, wie gewöhnlich, die Laſt P und die Länge l gegeben ſind, ſo handelt es ſich um die Ermittelung von Form und Gröſse des Stabquerſchnittes. Für dieſe Beſtimmung ſtehen die beiden Gleichungen 142 u. 143 zur Verfügung. F und $\mathfrak{J}$ müſſen wenigſtens die aus dieſen Gleichungen ſich ergebenden Werthe haben, ſo daſs ſich die Bedingungen für die Querſchnittsbildung ergeben zu 141. Querſchnitts-ermittelung.

$$F \geq \frac{P}{K} \quad \text{und} \quad \mathfrak{J}_{min} \geq \frac{P s l^2}{C E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 145.$$

Dabei iſt zu bemerken, daſs, wenn Ausbiegen nach allen Richtungen möglich iſt, das kleinſte für eine Schwerpunktsaxe des Querſchnittes ſich ergebende Trägheitsmoment zum mindeſten die verlangte Gröſse haben muſs; deſshalb wurde in Gleichung 145: $\mathfrak{J}_{min}$ geſetzt. Iſt Ausbiegen nur nach beſtimmten Richtungen möglich, ſo muſs das kleinſte in Betracht kommende Schweraxen-Trägheitsmoment die berechnete Gröſse haben.

Die in obigem Ausdruck vorkommenden Conſtanten C, E, K und s bedeuten beſtimmte Zahlenwerthe; für die in Fig. 149 bis 152 dargeſtellten vier Fälle iſt C:

Fall 1:	Fall 2:	Fall 3:	Fall 4:
$C = \frac{\pi^2}{4}$	$= \pi^2$	$= 4\,\pi^2$	$= 2\,\pi^2$ (genügend genau)
$\sqrt{C} = 1{,}57$	$= 3{,}14$	$= 6{,}28$	$= 4{,}44$.

Die Coefficienten E, K und s haben für alle Stäbe aus demſelben Material gleiche Werthe; wird als Flächeneinheit das Quadrat-Centimeter, als Krafteinheit das Kilogramm angenommen, ſo kann man für K, E und s nachſtehende Werthe ſetzen:

	für Schweiſseiſen und Fluſseiſen:	für Guſseiſen:	für Holz:
$E =$	2 000 000	1 000 000	120 000 kg für 1 qcm
$K =$	700	500	65 » »
$s =$	5	8	10

Alsdann wird auch P in Kilogr. eingeführt werden müffen; F wird in Quadr.-Centim. und $\mathcal{J}$ in cm⁴ erhalten. Die Formel ergiebt für Fall 2 und Schweifseifen

$$\mathcal{J}_{min} \geqq \frac{P^{kg} \,.\, 5\, l^{cm^2}}{\pi^2 \,.\, 2\,000\,000}.$$

Wefentlich bequemer werden die Ausdrücke für $\mathcal{J}_{min}$, wenn man P und E in Tonnen, l in Met. einführt und $\pi^2 = 10$ fetzt; letzteres ift nicht ganz genau, aber der Fehler kommt gar nicht in Betracht, da man je nach dem Bauftoff mit einem Sicherheitscoefficienten 5, 8, bezw. 10 arbeitet. Man erhält dann für Fall 2 und Schweifseifen, da $P^{kg} = 1000\, P^t$, $l^{cm} = 100\, l^m$ und $l^{cm^2} = 10\,000\, l^{m^2}$ ift,

$$\mathcal{J}_{min} \geqq \frac{1000\, P^t \,.\, 5 \,.\, 10000 \,.\, l^{m^2}}{10 \,.\, 2\,000\,000}, \quad \text{d. h.} \quad \mathcal{J}_{min} \geqq 2{,}5\; P^t\, l^{2\,m}.$$

Eben fo ergeben fich für Holz und Gufseifen fehr einfache Ausdrücke; für die Hauptftoffe find diefe Ausdrücke für Fall 2 nachftehend zufammengeftellt:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für Schweifs- und Flufseifen} & \mathcal{J}_{min} \geqq 2{,}5\; P^t\, l^{m^2} \\ \text{für Gufseifen} & \mathcal{J}_{min} \geqq 8\; P^t\, l^{m^2} \\ \text{für Holz} & \mathcal{J}_{min} \geqq 83\; P^t\, l^{m^2} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad 146.$$

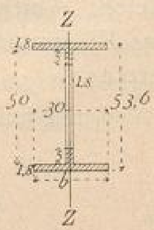
Die Zufammenftellung für alle vier Fälle ergiebt die nachftehende Tabelle. $\mathcal{J}_{min}$ mufs fein $\geqq$:

Conftructionsmaterial	Fall 1 (Fig. 149)	Fall 2 (Fig. 150)	Fall 3 (Fig. 151)	Fall 4 (Fig. 152)
Schweifseifen und Flufseifen .	10	2,5	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{4}$
Gufseifen	32	8	2	4
Holz	332	83	20	41
	P Tonnen $\times$ l (Meter)²			

Je mehr fich der Flächeninhalt des Querfchnittes, welcher dem nothwendigen Trägheitsmomente entfpricht, dem zuläffigen Kleinftwerth $\frac{P}{K}$ nähert, defto zweckmäfsiger ift die Conftruction. Man nimmt gewöhnlich zunächft einen Querfchnitt an, für welchen $F = \frac{P}{K}$ ftattfindet und ermittelt das Trägheitsmoment deffelben. Genügt letzteres nicht, fo ift die Querfchnittsfläche entfprechend zu vergröfsern, bis das verlangte $\mathcal{J}$ vorhanden ift. Diefes Verfahren foll an einigen Beifpielen gezeigt werden.

Beifpiele. α) In einer gufseifernen Stütze fei der gröfste Druck $P = 50\,000^{kg} = 50$ Tonnen; die Länge der Stütze fei $l = 4{,}5^m$; die Enden follen als bewegliche vorausgefetzt werden; die Querfchnittsform fei die neben ftehende (Fig. 154); die Querfchnittsmafse find zu ermitteln.

Fig. 154.



Für einfachen Druck mufs $F = \frac{50\,000}{500} = 100^{qcm}$ und nach Gleichung 146 mufs $\mathcal{J}_{min} = 8 \cdot 50 \cdot 4{,}5^2 = 8100$ fein.

Die Höhe des Querfchnittes fei durch bauliche Rückfichten zu $53{,}6^{cm}$ vorgefchrieben, die Stärke des Steges und der Gurte fei $1{,}8^{cm}$; alsdann findet, wenigftens bei nicht aufsergewöhnlich grofser Breite der Gurtungen, das Minimal-Trägheitsmoment für die Axe ZZ ftatt, und es ift

$$\mathcal{J}_Z = \frac{2 \cdot 1{,}8 \cdot b^3}{12} + \frac{50 \cdot 1{,}8^3}{12} = 0{,}3\, b^3 + 24{,}3.$$

Hiermit ift das erforderliche Trägheitsmoment als Function von b dargeftellt, und da nach Obigem auch

$$\mathfrak{J}_{min} = 8100$$

fein mufs, fo lautet die Bedingungsgleichung für b:

$$0{,}3\, b^3 + 24{,}3 = 8100,$$

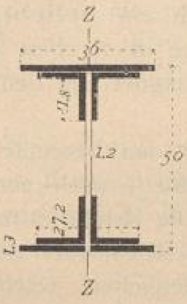
woraus fich für $b = \infty\ 30^{cm}$ ergiebt.

Die Querfchnittsfläche wird $F = 2 \cdot 1{,}8 \cdot 30 + 50 \cdot 1{,}8 = 198^{qcm}$, während nur 100^{qcm} Querfchnittsfläche nöthig find. Daraus folgt, dafs unbedenklich ein Theil des Steges auf einzelne Theile der Höhe fortfallen kann; alsdann bleibt als Querfchnittsfläche der fchraffirte Theil übrig, und zwar in diefem Falle $F = 2 \cdot 30 \cdot 1{,}8 + 2 \cdot 5 \cdot 1{,}8 = 126^{qcm}$, und diefe Querfchnittsgröfse genügt. Auch das Trägheitsmoment wird durch Fortfall des Steges nur unwefentlich beeinflufst.

β) In einem fchmiedeeifernen Stabe herrfcht ein Druck $P = 130\,000^{kg} = 130$ Tonnen; die Stablänge betrage $6{,}0^{m}$, der Stab fei beiderfeits eingefpannt.

Nach obiger Tabelle mufs

Fig. 155.



$$\mathfrak{J} = \frac{5}{8} \cdot 130 \cdot 6^2 = 2925^{cm^4},$$

ferner $F = \dfrac{130\,000}{700} = 196^{qcm}$ fein.

Der Querfchnitt in Fig. 155 wurde vorläufig, wie folgt, zufammengefetzt:

4 Winkeleifen zu $13 \times 13 \times 1{,}2^{cm} = 29{,}8^{qcm}$	$= 119{,}2^{qcm}$
1 obere Deckplatte $36 \times 1{,}3^{cm}$	$= 46{,}8$ »
1 untere Deckplatte $34{,}8 \times 1{,}3^{cm}$	$= 45{,}2$ »
Summe des Brutto-Querfchnittes	$211{,}2^{qcm}$
ab für 4 Nietlöcher $4 \times 2{,}5 \times 2{,}3^{cm}$	$= 23{,}0$ »
bleibt Netto-Querfchnitt	$188{,}2^{qcm}$,

der allerdings etwas kleiner als F ift, aber genügen dürfte.

Für diefen Querfchnitt findet $\mathfrak{J}_{min}$ für die ZZ-Axe ftatt, und es ift

$$\mathfrak{J}_Z = \frac{1}{12}\left[2 \cdot 1{,}3 \cdot 36^3 + 2 \cdot 1{,}2 \cdot 27{,}2^3 + 2 \cdot 11{,}8 \cdot 3{,}0^3 - (2 \cdot 13 + 1{,}3)\, 1{,}2^3\right] - 4 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}3 \cdot 7^2 = 13094.$$

Das Trägheitsmoment ift alfo bei ausreichender Querfchnittsfläche wefentlich gröfser, als es zu fein braucht, der Querfchnitt fonach genügend.

Sehr einfach geftaltet fich die Rechnung, wenn man den Querfchnitt aus den »Deutfchen Normal-Profilen für Walzeifen« bildet, für welche die Minimal-Trägheitsmomente im vorhergehenden Halbband diefes »Handbuches« (Abth. I: Die Technik der wichtigeren Bauftoffe) angegeben find. Man berechnet das nothwendige Trägheitsmoment und die nöthige Querfchnittsfläche aus den Ausdrücken 145 und fucht aus den Tabellen ein Profileifen, bezw. einen aus Profileifen zufammengefetzten Querfchnitt, deffen Minimal-Trägheitsmoment und Querfchnittsfläche den verlangten zum mindeften gleich find.

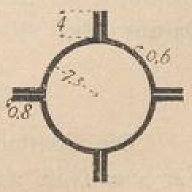
Beifpiel. In einem fchmiedeeifernen Stabe herrfche ein Druck $P = 18000^{kg} = 18$ Tonnen; die Stablänge fei $l = 5{,}0^{m}$; die Stabenden feien drehbar; mithin ift Fall 2 zu Grunde zu legen.

Nach Gleichung 146 mufs $\mathfrak{J} = 2{,}5 \cdot 18 \cdot 5^2 = 1125^{cm^4}$ und nach Gleichung 143: $F = \dfrac{18000}{700} = 26^{qcm}$ fein.

Soll der Stab aus einem I-förmigen Walzbalken gebildet werden, fo ift das Profil Nr. 38 (fiehe die angezogenen Tabellen) zu wählen; bei demfelben ift $\mathfrak{J}_{min} = 1138$, F (nach Abzug für Niete) $= 107{,}5 - 4 \cdot 2 \cdot 2{,}05 = 91{,}1^{qcm}$ und das Gewicht für 1^{m} $83{,}9^{kg}$.

Wollte man ftatt deffen einen aus 4 kreuzförmig geftellten Winkeleifen gebildeten Querfchnitt verwenden, fo könnte man 4 Winkeleifen Nr. 9 (fiehe die angezogenen Tabellen) zu $9 \times 9 \times 1{,}3^{cm}$ verwenden, deren $\mathfrak{J} = 1284$ ift, alfo genügt; dabei ift der Netto-Querfchnitt $F = 4 \cdot 21{,}7 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1{,}3$ (für Niete) $= 76{,}4^{qcm}$ und das Gewicht $4 \cdot 16{,}9^{kg} = 67{,}6^{kg}$. Zweckmäfsiger ift die Verwendung von 4 Winkeleifen Nr. 10 zu $10 \times 10 \times 1^{cm}$ mit $\mathfrak{J} = 1346$, $F = 4 \cdot 19 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 68^{qcm}$ und einem Gewicht für 1^{m} von $4 \cdot 14{,}8^{kg} = 59{,}2^{kg}$.

Fig. 156.



Würde endlich der Querfchnitt aus 4 Quadranteifen (nach Fig. 156) conftruirt, fo wird bei neben ftehendem Querfchnitt (fiehe die angezogenen Tabellen) $\mathfrak{J} = 2046$, $F = 54{,}9 - 4 \cdot 2 \cdot 0{,}8$ (für Niete) $= 48{,}59^{qcm}$ und das Gewicht für das laufende Meter $42{,}9^{kg}$.

Am ungünftigften ift demnach im vorliegenden Falle das I-Profil mit 83,9 kg Gewicht; günftiger ift das kreuzförmige Profil mit 59,2 kg, und am günftigften ift das aus Quadranteifen zufammengefetzte, röhrenförmige Profil mit 42,9 kg Gewicht.

3) Querfchnittsermittelung bei excentrifcher Druckbelaftung.

142. Zuläffige Beanfpruchung.

Man ift neuerdings vielfach beftrebt gewefen, Gröfse und Form des Querfchnittes auf Knicken axial beanfpruchter Stäbe aus der Bedingung zu beftimmen, dafs die gröfste, wirklich auftretende Beanfpruchung σ an keiner Stelle die für das Material als zuläffig erachtete Beanfpruchung überfchreite. Die Spannung σ ift, fobald die Kraft für den Querfchnitt ein Moment hat, in hohem Mafse von der Gröfse der Ausbiegung y abhängig; da aber diejenige axial wirkende Kraft, welche überhaupt eine Ausbiegung y hervorrufen kann, nach Obigem auch ein beliebig grofses y und damit auch ein beliebig grofses σ erzeugen kann, fo ift σ, eben fo wie y, bei der oben betrachteten Aufgabe eine unbeftimmte Gröfse, eignet fich demnach nicht als Grundlage für die Querfchnittsbeftimmung.

Man darf weiter nicht erwarten, dafs die Verfuchsergebniffe mit den theoretifch entwickelten Werthen der zerknickenden Kraft genau übereinftimmen; auch eine kleinere Kraft kann bereits Zerknicken herbeiführen, wenn etwa die Kräfte etwas excentrifch wirken oder nicht genau in die Richtung der Stabaxe fallen oder der Bauftoff des Stabes nicht ganz gleichmäfsig ift. Allen diefen Möglichkeiten, welche theoretifch nicht gut verfolgt werden können, wird am beften dadurch Rechnung getragen, dafs man einen Sicherheits-Coefficienten n einführt, alfo nur den n-ten Theil derjenigen Kraft auf den Stab wirken läfft, welche denfelben nach der Formel zerknicken könnte. Es ift gut, dafs man die Stelle ganz genau kennt, an welcher alle Unficherheiten zufammentreffen und diefe ganz klar bezeichnet.

143. Querfchnitts-ermittelung.

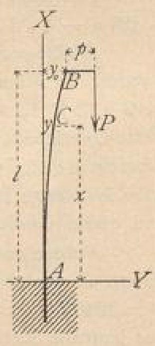
Wenn das Mafs der Excentricität der wirkenden Kräfte bekannt wäre, fo würde auch eine genaue Berechnung möglich fein; denn dann hätte der Pfeil einen ganz beftimmten Werth, und damit würden fich auch für σ gewiffe, von der Gröfse der Kraft P abhängige Werthe ergeben. Da unter Umftänden die Gröfse der Excentricität bekannt ift, bezw. angenommen werden kann, fo foll die Berechnung hier vorgeführt werden.

Für irgend einen Punkt C des Stabes AB (Fig. 157), welcher urfprünglich mit der Axe AX zufammenfiel, ift

$$M = P(p + y_0 - y) = EJ \frac{d^2 y}{d x^2} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P}{EJ}(p + y_0 - y),$$

und wenn wieder, wie oben, abkürzungsweife $\frac{P}{EJ} = a^2$ gefetzt wird,

Fig. 157.



$$\frac{d^2 y}{d x^2} = a^2 (p + y_0 - y).$$

Die zweimalige Integration diefer Gleichung ergiebt

$$y = (p + y_0) + A \sin a x + B \cos a x \quad . \quad . \quad . \quad 147.$$

Daraus folgt

$$\frac{d y}{d x} = A a \cos a x - B a \sin a x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 148.$$

Die Conftanten A und B ergeben fich folgendermafsen.

Für $x = 0$ ift $y = 0$, alfo $0 = p + y_0 + B$ und $B = -(p + y_0)$;