UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

3) Querschnittsermittelung bei excentrischer Druckbelastung

urn:nbn:de:hbz:466:1-77733

Visual Library

Am ungünſtigſten iſt demnach im vorliegenden Falle das I-Profil mit 83,9 kg Gewicht; günſtiger iſt das kreuzförmige Profil mit 59,2 kg, und am günſtigſten iſt das aus Quadranteiſen zuſammengeſetzte, röhrenförmige Profil mit 42,9 kg Gewicht.

3) Querſchnittsermittelung bei excentriſcher Druckbelaſtung.

142. Zuläſſige Beanſpruchung.

Man iſt neuerdings vielfach beſtrebt geweſen, Gröſse und Form des Querſchnittes auf Knicken axial beanſpruchter Stäbe aus der Bedingung zu beſtimmen, daſs die gröſste, wirklich auftretende Beanſpruchung σ an keiner Stelle die für das Material als zuläſſig erachtete Beanſpruchung überſchreite. Die Spannung σ iſt, ſobald die Kraft für den Querſchnitt ein Moment hat, in hohem Maſse von der Gröſse der Ausbiegung y abhängig; da aber diejenige axial wirkende Kraft, welche überhaupt eine Ausbiegung y hervorrufen kann, nach Obigem auch ein beliebig groſses y und damit auch ein beliebig groſses σ erzeugen kann, ſo iſt σ, eben ſo wie y, bei der oben betrachteten Aufgabe eine unbeſtimmte Gröſse, eignet ſich demnach nicht als Grundlage für die Querſchnittsbeſtimmung.

Man darf weiter nicht erwarten, daſs die Verſuchsergebniſſe mit den theoretiſch entwickelten Werthen der zerknickenden Kraft genau übereinſtimmen; auch eine kleinere Kraft kann bereits Zerknicken herbeiführen, wenn etwa die Kräfte etwas excentriſch wirken oder nicht genau in die Richtung der Stabaxe fallen oder der Bauſtoff des Stabes nicht ganz gleichmäſsig iſt. Allen dieſen Möglichkeiten, welche theoretiſch nicht gut verfolgt werden können, wird am beſten dadurch Rechnung getragen, daſs man einen Sicherheits-Coefficienten n einführt, alſo nur den n-ten Theil derjenigen Kraft auf den Stab wirken läſſt, welche denſelben nach der Formel zerknicken könnte. Es iſt gut, daſs man die Stelle ganz genau kennt, an welcher alle Unſicherheiten zuſammentreffen und dieſe ganz klar bezeichnet.

143. Querſchnittsermittelung.

Wenn das Maſs der Excentricität der wirkenden Kräfte bekannt wäre, ſo würde auch eine genaue Berechnung möglich ſein; denn dann hätte der Pfeil einen ganz beſtimmten Werth, und damit würden ſich auch für σ gewiſſe, von der Gröſse der Kraft P abhängige Werthe ergeben. Da unter Umſtänden die Gröſse der Excentricität bekannt iſt, bezw. angenommen werden kann, ſo ſoll die Berechnung hier vorgeführt werden.

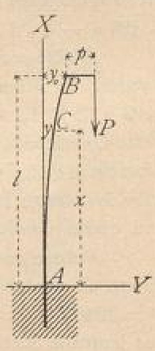
Für irgend einen Punkt C des Stabes AB (Fig. 157), welcher urſprünglich mit der Axe AX zuſammenfiel, iſt

$$M = P(p + y_0 - y) = E\mathfrak{J}\frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{E\mathfrak{J}}(p + y_0 - y),$$

und wenn wieder, wie oben, abkürzungsweiſe $\frac{P}{E\mathfrak{J}} = a^2$ geſetzt wird,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2(p + y_0 - y).$$

Fig. 157.



Die zweimalige Integration dieſer Gleichung ergiebt

$$y = (p + y_0) + A \sin a x + B \cos a x \quad . \quad . \quad . \quad 147.$$

Daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = A a \cos a x - B a \sin a x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 148.$$

Die Conſtanten A und B ergeben ſich folgendermaſsen.

Für $x = 0$ iſt $y = 0$, alſo $0 = p + y_0 + B$ und $B = -(p + y_0)$;

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

für $x = 0$ ist $\frac{dy}{dx} = 0$, also $0 = A a$ und $A = 0$; demnach heisst die Gleichung der elastischen Linie:

$$y = (p + y_0)(1 - \cos a x) \quad \text{. . . . . 149.}$$

Für $x = l$ ist $y = y_0$, d. h. $y_0 = (p + y_0)(1 - \cos a l)$ oder

$$y_0 = p \frac{1 - \cos a l}{\cos a l} \quad \text{. . . . . 150.}$$

y_0 ist also eine ganz bestimmte Grösse. Das grösste Moment findet am Einspannungspunkte A statt, wo es den Werth

$$P(p + y_0) = P p \left(1 + \frac{1 - \cos a l}{\cos a l}\right) = \frac{P p}{\cos a l}$$

hat. In diesem Querschnitte wird der grösste Druck den Werth haben

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \frac{P p r}{\mathfrak{J} \cos a l} \quad \text{. . . . . 151.}$$

In dieser Gleichung ist r der Abstand des meist gespannten Querschnittspunktes von der Axe, $\mathfrak{J}$ das in Betracht kommende Trägheitsmoment. Stellt man die Bedingung, dass σ_{max} höchstens gleich K sein solle, so ergiebt sich

$$K = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{F p r}{\mathfrak{J} \cos a l}\right), \quad \text{. . . . . 152.}$$

und die zulässige Belastung der Stütze vom Querschnitt F und dem Trägheitsmomente $\mathfrak{J}$

$$P = \frac{F K}{1 + \frac{F p r}{\mathfrak{J} \cos a l}} \quad \text{. . . . . 153.}$$

Da $a = \sqrt{\frac{P}{E \mathfrak{J}}}$ eine Grösse ist, welche sowohl vom Drucke P, wie von der Querschnittsgestaltung, also von Werthen abhängt, welche meistens von vornherein nicht gleichzeitig gegeben sind, so kann der Ausdruck für P aus Gleichung 153 nicht in geschlossener Form entwickelt werden; denn a kommt auch auf der rechten Seite vor. Man wird desshalb zunächst eine angenäherte Rechnung vornehmen, auf welche die genauere zu folgen hat. Aehnlich ist es, wenn P und das Mass der Excentricität gegeben sind und der Querschnitt gesucht wird. Dann ist aus Gleichung 153, wenn mit R der Trägheitsradius bezeichnet wird, also $\mathfrak{J} = F R^2$ gesetzt wird,

$$F = \frac{P}{K}\left(1 + \frac{p r}{R^2 \cos a l}\right) \quad \text{. . . . . 154.}$$

Die Anwendung dieses Ausdruckes soll an einem einfachen Beispiele gezeigt werden. 144. Beispiel.

Die Stütze sei eine Holzstütze von der Länge $l = 5^{\text{m}} = 500^{\text{cm}}$; der Querschnitt sei quadratisch und habe die Seitenlänge d; die Excentricität soll so weit gehen können, dass die Kraft P ungünstigstenfalls in der Kante des Quadrates angreift. Dann ist

$$p = \frac{d}{2}, \quad F = d^2, \quad r = \frac{d}{2}, \quad \mathfrak{J} = F R^2 = \frac{d^4}{12} = d^2 R^2,$$

$$R^2 = \frac{d^2}{12}, \quad E = 120000^{\text{kg}}, \quad K = 65^{\text{kg}}, \quad p r = \frac{d^2}{4}.$$

Ferner folle eine Kraft $P = 16000^{kg}$ ertragen werden. Es ift alfo

$$a = \sqrt{\frac{P}{E\mathcal{J}}} = \sqrt{\frac{16000 \cdot 12}{120000\, d^4}} = \frac{1{,}265}{d^2}, \text{ ferner } a\,l = \frac{632{,}5}{d^2}; \text{ fonach}$$

$$F = \frac{16000}{65}\left(1 + \frac{d^2 \cdot 12}{4\,d^2 \cos a\,l}\right) = 246\left(1 + \frac{3}{\cos \frac{632{,}5}{d^2}}\right).$$

Zunächft werde $d = 25^{cm}$ angenommen; dann wird $F = 246\ (1 + 5{,}66) = 1638^{qcm}$; demnach müffte $d =$ ca. 40^{cm} fein. Wählt man $d = 35^{cm}$, fo wird

$$F = 246\ (1 + 3{,}45) = 1095^{qcm}.$$

Diefer Werth würde einer Seitenlänge $d = 33^{cm}$ entfprechen; 35^{cm} ift alfo ein angemeffener Werth.

4) Empirifche Formeln.

145. Allgemeine Formel.

Der Umftand, dafs man je nach der gröfseren oder geringeren Länge des Stabes mit verfchiedenen Formeln rechnen mufs, ift eine Unbequemlichkeit, der man durch Einführung empirifcher Formeln abzuhelfen geftrebt hat. Eine folche Formel mufs für P bei kleinen Werthen von l nahezu oder genau die für einfachen Druck entwickelte Gleichung 143, dagegen bei grofsen Werthen von l die mit Rückficht auf Zerknicken gefundene Gleichung 142 ergeben. Diefen Anforderungen entfpricht folgende Formel[30]:

$$P = \frac{K F \mathcal{J}}{\mathcal{J} + \frac{K s F l^2}{C E}}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 155.$$

in welcher alle Buchftaben die früheren Bedeutungen haben.

Für $l = 0$ wird entfprechend der für kurze Stäbe aufgeftellten Gleichung 143 auch hier $P = K F$; für den Werth $l = \infty$ mag obiger Formel die Geftalt

$$P = \frac{K F}{1 + \frac{K s F l^2}{C \mathcal{J} E}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 156.$$

gegeben werden. Ift l fehr grofs, bezw. $= \infty$, fo ift das erfte Glied im Nenner verfchwindend klein gegen das zweite; die Formel lautet alsdann:

$$P = \frac{K F}{\frac{K s F l^2}{C E \mathcal{J}}} = \frac{C E \mathcal{J}}{s\, l^2},$$

demnach übereinftimmend mit der Formel 142 für lange Stäbe. Die Gleichung 155 kann alfo als empirifche Formel angewendet werden und giebt auch ziemlich gut mit den Verfuchen übereinftimmende Werthe. Aus derfelben folgt

$$\frac{P}{K} = \frac{F \mathcal{J}}{\mathcal{J} + \frac{K s}{C E} F l^2},$$

und wenn der nur vom Material des Stabes und der Endbefeftigung abhängige Factor $\frac{K s}{C E} = \alpha$ gefetzt wird,

$$\frac{P}{K} = \frac{F \mathcal{J}}{\mathcal{J} + \alpha F l^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 157.$$

[30] Siehe: SCHÄFFER. Beftimmungen der zuläffigen Spannung und der Querfchnitte für Eifenconftructionen. Deutfche Bauz. 1877, S. 498.