Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

1) Balkenträger auf zwei Stützen

urn:nbn:de:hbz:466:1-77733

Art. 94 (S. 70) ist bereits nachgewiesen, dass es gleichgiltig ist, an welcher Seite des Querschnittes man die Kräfte betrachtet; nur muss man mit dem Vorzeichen vorsichtig sein. Weiterhin sollen die Momente als positiv eingeführt werden, wenn sie auf den Theil links vom Querschnitt nach rechts drehend (also in der Richtung des Uhrzeigers), bezw. auf den Theil rechts vom Querschnitt nach links drehend wirken, d. h. den Balken so zu drehen streben, dass er seine convexe Seite nach unten kehrt; als negativ, wenn sie den Balken so zu drehen streben, dass er seine convexe Seite nach oben kehrt.

Die Belastungen sind entweder nach einem bestimmten Gesetze fortlaufend über den Träger vertheilt — im Hochbau meistens gleichmässig über die wagrechte Projection der Trägeraxe, oder sie greifen in einzelnen Punkten als Einzellasten an. Zu den gleichmässig über die wagrechte Projection vertheilten Belastungen rechnet man die Eigengewichte der Träger, welche Annahme genügend genau ist. 152. Belastungen.

Die Grösse des Eigengewichtes von Decken-Constructionen kann nach den Angaben in Art. 23 u. 24 (S. 18) angenommen werden; bezüglich der Annahmen für die Nutzlast sei auf Art. 26 (S. 20) verwiesen. Da die Belastungen bekannt sind, handelt es sich zunächst um die Ermittelung der durch dieselben erzeugten Stützendrücke, Momente und Querkräfte, ferner um die diesen entsprechenden Querschnittsabmessungen. Für jeden Querschnitt ist die ungünstigste mögliche Belastung einzuführen.

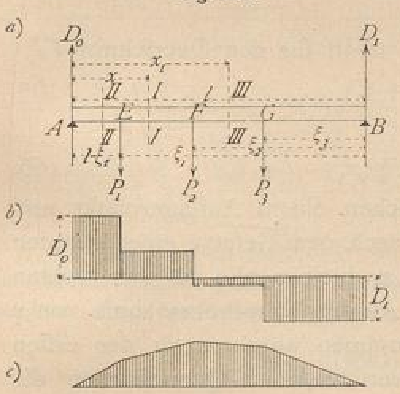
In den folgenden Artikeln soll für die wichtigsten Balkenträger und für verschiedene Belastungsarten die Ermittelung der Auflagerdrücke, der Querkräfte und Momente auf dem Wege der Rechnung, bezw. auf demjenigen der Construction gezeigt werden; die Ergebnisse gelten sowohl für vollwandige, wie für Träger mit gegliederter Wand (Fachwerkträger).

1) Balkenträger auf zwei Stützen.

Die Stützweite des Trägers, von Auflagermitte zu Auflagermitte gerechnet, sei l. 153. Belastung durch Einzellasten.

Erster Belastungsfall: Der Träger wird durch beliebige Einzellasten belastet.

Fig. 162.



Die Lasten sind P_1, P_2, P_3, wie aus neben stehender Fig. 162 ersichtlich; für alle Querschnitte des Balkens sollen die Querkräfte und Momente ermittelt werden.

α) Berechnung. Zunächst sind die nicht gegebenen äusseren Kräfte, die Auflagerdrücke D_0 und D_1, zu bestimmen. Da Gleichgewicht stattfindet, so ist die algebraische Summe der statischen Momente aller äusseren Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null. Um D_0 zu ermitteln, wählt man zweckmässig einen Punkt auf der Richtungslinie von D_1 als Drehpunkt, damit die zweite Unbekannte D_1 das statische Moment Null habe, also nur eine Unbekannte in der Gleichung vorkomme. Alsdann ist, wenn B als Drehpunkt für die Gleichung der statischen Momente gewählt wird,

$$0 = D_0\, l - P_1\, \xi_1 - P_2\, \xi_2 - P_3\, \xi_3,$$

$$D_0 = \frac{P_1\, \xi_1}{l} + \frac{P_2\, \xi_2}{l} + \frac{P_3\, \xi_3}{l} = \sum_0^l \left(\frac{P\, \xi}{l}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 162.$$

Wählt man in gleicher Weife ein zweites Mal A als Drehpunkt, fo ergiebt fich

$$D_1 = \frac{P_1(l-\xi_1)}{l} + \frac{P_2(l-\xi_2)}{l} + \frac{P_3(l-\xi_3)}{l} = \sum_0^l \left[\frac{P(l-\xi)}{l}\right] \quad . \quad 163.$$

Der Beitrag, welchen jede Einzellaft zum Gefammtauflagerdruck leiftet, ift, wie man aus den Gleichungen 162 u. 163 erfieht, ganz unabhängig von der Gröfse und Art der übrigen Belaftungen; die Auflagerdrücke find die Summen der durch die einzelnen Laften erzeugten Einzeldrücke.

Nunmehr laffen fich die Querkräfte ermitteln.

Für einen beliebigen Querfchnitt II, im Abftande x vom linken Auflager A, ift die Querkraft, als Mittelkraft aller an der einen Seite wirkenden äufseren Kräfte,

$$Q_x = D_0 - P_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 164.$$

In diefem Ausdrucke kommt die Abfciffe x des Querfchnittes gar nicht vor; die Querkraft ift alfo, fo lange der angegebene Ausdruck überhaupt gilt, ganz unabhängig von x, d. h. conftant. Der Ausdruck gilt aber nur für die Querfchnitte zwifchen E und F; denn für einen Querfchnitt links von E, etwa für $II\,II$, ift

$$Q_{II} = D_0;$$

für einen folchen rechts von F, etwa für $III\,III$, ift

$$Q_{III} = D_0 - P_1 - P_2 = \sum_0^l \left(\frac{P\xi}{l}\right) - (P_1 + P_2) = \sum_0^l \left(\frac{P\xi}{l}\right) - \sum_0^{x_1} (P).$$

Daraus folgt: Falls eine Belaftung nur durch Einzellaften ftattfindet, ift die Querkraft für alle Querfchnitte zwifchen je zwei Laftpunkten, fo wie zwifchen einem Auflagerpunkt und einem Laftpunkt conftant; eine Aenderung der Querkraft findet nur in den Laftpunkten ftatt.

Das Gefetz der Aenderung der Querkräfte wird fehr anfchaulich, wenn man in jedem Querfchnitte die dafelbft ftattfindende Querkraft als Ordinate nach beliebigem (aber für alle Querfchnitte gleichem) Mafsftabe aufträgt und die Endpunkte der Ordinaten verbindet. Hierdurch ergiebt fich die in Fig. 162 *b* gezeichnete Linie, in welcher die pofitiven Werthe von der Abfciffe aus nach oben, die negativen Werthe nach unten getragen find.

Was die Beftimmung der Momente anbelangt, fo ift für den Querfchnitt II

$$M_I = D_0\, x - P_1 (x - l + \xi_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 165.$$

Für den Querfchnitt $III\,III$ ift

$$M_{III} = D_0\, x_1 - P_1 (x_1 - l + \xi_1) - P_2 (x_1 - l + \xi_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 166.$$

Innerhalb je zweier Laftpunkte, fo wie zwifchen einem Auflagerpunkt und einem Laftpunkt ändert fich demnach das Moment nach dem Gefetze einer geraden Linie; denn für verfchiedene Werthe von x, bezw. x_1 bleiben alle auf den rechten Seiten der Gleichungen 165 u. 166 vorkommenden Ausdrücke mit Ausnahme von x und x_1 conftant; diefe einzigen Veränderlichen kommen aber nur in der erften Potenz vor. Trägt man alfo auch hier in den verfchiedenen Querfchnitten die Werthe von M als Ordinaten auf, fo erhält man als Verbindungslinien der Endpunkte gerade Linien; in jedem Laftpunkt ändert fich der Ausdruck für M, alfo auch die Gerade. In Fig. 162 *c* ift die Aenderung der Momente graphifch dargeftellt.

Da eine Gerade ihre gröfste Ordinate nur am Anfangspunkte oder Endpunkte haben kann, diefe aber hier mit den Laftpunkten zufammenfallen, fo folgt, dafs die gröfsten Momentenwerthe an den Laftpunkten ftattfinden. Diefes Ergebnifs ift wichtig. Wenn nur eine Einzellaft P vorhanden ift, fo ift demnach das gröfste Moment ftets am Laftpunkte. Liegt alsdann P in den Abftänden ξ, bezw. $l - \xi$ von den beiden Auflagern, fo ift das Moment am Laftpunkte, alfo das gröfste Moment, welches für die Querfchnittsbildung mafsgebend ift,

$$M_{max} = \frac{P(l-\xi)\,\xi}{l}.$$

Liegt P in der Mitte des Balkens, fo ift $\xi = (l - \xi) = \frac{l}{2}$, alfo

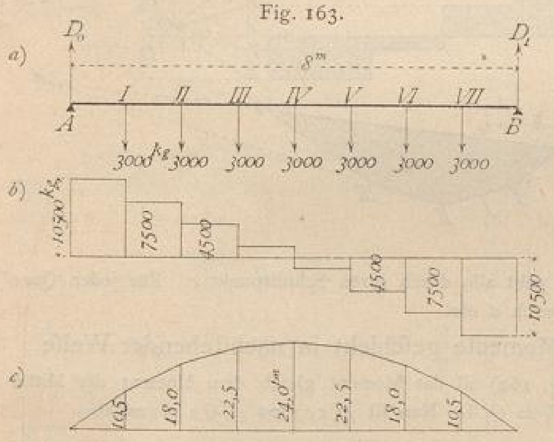
$$M_{max} = \frac{P\,l}{4}.$$

Sind zwei Einzellaften auf dem Balken, fo braucht man nur die beiden Momente an den Laftpunkten zu ermitteln; das gröfsere von beiden ift zugleich das gröfste. Wenn beide Laften gleich grofs, und zwar je gleich P find und im gleichen Abftande $\frac{a}{2}$ von der Balkenmitte liegen, fo ift das Moment an jedem Laftpunkte

$$M = \frac{P(l-a)}{2}.$$

Wenn endlich mehrere Laften vorhanden find, braucht man nur die Momente an den Laftpunkten aufzufuchen. Falls der Balken conftanten Querfchnitt erhält (wie dies z. B. beim Walzbalken der Fall ift), fo ift diefer nach dem gröfsten überhaupt ftattfindenden Momente zu beftimmen.

Fig. 163.



Beifpiel. Ein fchmiedeeiferner Unterzug (Fig. 163) von 8 m Stützweite trägt 7 Balken, deren Abftand von Mitte zu Mitte je 1 m beträgt. Jeder Balken belaftet den Unterzug mit einem Gewicht von 3000 kg. Die Auflagerdrücke, Querkräfte und Momente find zu ermitteln. Nach Gleichung 162 ift

$$D_0 = \frac{3000}{8}(1+2+3+4+5+6+7) = 10\,500\,\text{kg};$$

eben fo nach Gleichung 163

$$D_1 = \frac{3000}{8}\,28 = 10\,500\,\text{kg}.$$

In Fällen, wie der vorliegende, wo die Belaftungen fymmetrifch zur Mitte des Balkens liegen und die Abftände derfelben gleich find, fafft man bequemer alle Laften zu einer Mittelkraft, hier ihrer Summe, zufammen, die in der Balkenmitte angreift. Alsdann ift

$$R = 7 \cdot 3000 = 21\,000\,\text{kg} \quad \text{und} \quad D_0 = \frac{21\,000}{l} \cdot \frac{l}{2} = 10\,500\,\text{kg} = D_1.$$

Die Querkräfte für die verfchiedenen Querfchnitte find:

von A bis $I = 10\,500$ kg,	von IV bis $V = 10\,500 - 4 \cdot 3000 = -\,1500$ kg,
» I » $II = 10\,500 - 3000 = 7500$ kg,	» V » $VI = 10\,500 - 5 \cdot 3000 = -\,4500$ kg,
» II » $III = 10\,500 - 2 \cdot 3000 = 4500$ kg,	» VI » $VII = 10\,500 - 6 \cdot 3000 = -\,7500$ kg,
» III » $IV = 10\,500 - 3 \cdot 3000 = 1500$ kg,	» VII » $B = 10\,500 - 7 \cdot 3000 = -\,10\,500$ kg.

Im Laftpunkte IV (in der Trägermitte) geht die Querkraft von den pofitiven zu den negativen Werthen über.

Die Momente in den Laſtpunkten ſind:

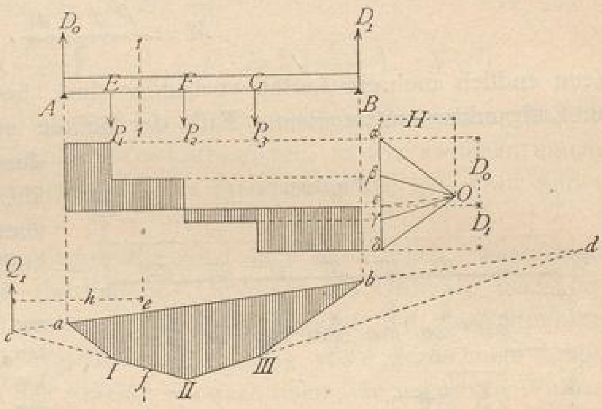
$$M_I = 10500 \cdot 1 = 10500^{\,\text{kgm}} = 1050000^{\,\text{kgcm}},$$
$$M_{II} = 10500 \cdot 2 - 3000 \cdot 1 = 18000^{\,\text{kgm}} = 1800000^{\,\text{kgcm}},$$
$$M_{III} = 10500 \cdot 3 - 3000 \cdot 1 - 3000 \cdot 2 = 22500^{\,\text{kgm}} = 2250000^{\,\text{kgcm}},$$
$$M_{IV} = 10500 \cdot 4 - 3000\,(1 + 2 + 3) = 24000^{\,\text{kgm}} = 2400000^{\,\text{kgcm}},$$
$$M_V = 10500 \cdot 5 - 3000\,(1 + 2 + 3 + 4) = 22500^{\,\text{kgm}} = 2250000^{\,\text{kgcm}} = M_{III},$$
$$M_{VI} = M_{II},\quad M_{VII} = M_I,\quad M_A = M_B = 0.$$

Hiernach ſind die Momente und Querkräfte in Fig. 163 *c* u. 163 *b* aufgetragen.

β) Graphiſche Ermittelung. Um die Auflagerdrücke zu ermitteln, conſtruire man für die gegebenen Kräfte und den beliebigen Pol O (Fig. 164) das Kraft- und Seilpolygon, ziehe die Schluſslinie ab und parallel zu dieſer die Linie $O\varepsilon$ durch den Pol O; dieſelbe theilt die Kraftlinie in zwei Theile, von denen $\overline{\delta\varepsilon} = D_1$ und $\overline{\varepsilon\alpha} = D_0$ iſt (vergl. Art. 19, S. 16). Nun laſſen ſich die Querkräfte graphiſch leicht ermitteln.

Für alle Querſchnitte von A bis E iſt die Querkraft gleich D_0, d. h. gleich $\varepsilon\alpha$ (Fig. 164). Zieht man alſo durch ε und α je eine Wagrechte, ſo giebt deren Abſtand die Gröſse der Querkraft zwiſchen A und E an. Zwiſchen E und F iſt die Querkraft gleich $D_0 - P_1 = \varepsilon\alpha - \alpha\beta = \varepsilon\beta$; man ziehe alſo durch β eine wagrechte Linie; alsdann giebt deren Abſtand von der durch ε gezogenen Geraden an jeder Stelle zwiſchen E und F die Gröſse der Querkraft. Eben ſo iſt zwiſchen F und G die Strecke $\varepsilon\gamma$, zwiſchen G und B die Strecke $\varepsilon\delta$ die Querkraft.

Fig. 164.



Die Querkraft als Mittelkraft aller an der einen Seite des Querſchnittes wirkenden Kräfte geht nach Art. 18 (S. 14) durch den Schnittpunkt derjenigen Seilpolygonſeiten, welche bezw. der erſten und letzten dieſer Kräfte vorangehen und folgen. Für einen Querſchnitt zwiſchen E und F ſind D_0 und P_1 die Kräfte, ab und $I\,II$ die betreffenden Seilpolygonſeiten; die Querkraft geht alſo durch ihren Schnittpunkt c. Für jeden Querſchnitt zwiſchen II und III geht die Querkraft durch d etc.

Die graphiſche Beſtimmung der Momente geſchieht in nachſtehender Weiſe.

Für einen beliebigen Querſchnitt 11 (Fig. 164) iſt das Moment gleich dem Moment der Mittelkraft, d. h. hier der Querkraft. Demnach iſt $M_1 = Q_1 h$. Nun iſt $\triangle\, cef \sim \triangle\, O\varepsilon\beta$; mithin

$$\frac{\overline{ef}}{h} = \frac{\overline{\varepsilon\beta}}{H}, \text{ und, da } \overline{\varepsilon\beta} = Q_1 \text{ iſt}, \ \overline{ef} = \frac{Q_1 h}{H} = \frac{M_1}{H}, \text{ alſo } M_1 = H \cdot \overline{ef}.$$

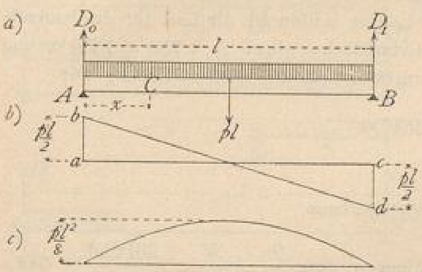
In vorſtehendem Ausdruck für M iſt H, der wagrechte Abſtand des Poles von der Kraftlinie oder der Polabſtand, für alle Querſchnitte conſtant; die Gröſse des Momentes iſt alſo mit $\overline{ef}$, d. h. der lothrechten Höhe des Seilpolygons veränderlich. Daraus folgt:

Das Moment in jedem Querſchnitte iſt gleich dem Producte aus dem lothrechten Abſtande der Seilpolygonſeiten in dieſem Querſchnitte und dem Polabſtand. Die vom Seilpolygon gebildete Fläche heiſst die Momentenfläche.

Die Momente ſind Producte aus Kräften und Längen; H iſt eine Kraft, wie alle Strahlen und Linien im Kraftpolygon, und kann nach Obigem beliebig angenommen werden, etwa mit $10^{\,\text{t}}$, $20^{\,\text{t}}$ etc. Da das Moment in irgend einem Querſchnitt einen ganz beſtimmten Werth hat, der natürlich von einem beliebig gewählten H unabhängig iſt, ſo wird die Höhe des Seilpolygons deſto gröſser, je kleiner H iſt, und umgekehrt.

Zweiter Belastungsfall: Der Träger ist über seine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet. 154. Gleichförmig vertheilte Belastung.

Fig. 165.



Die Belastung für die Längeneinheit des Trägers (Fig. 165) sei p; alsdann ist die Mittelkraft gleich der Gesammtlast, also gleich $p\,l$ und greift in der Trägermitte an. Die Gleichung der statischen Momente für B als Drehpunkt heisst demnach:

$$D_0\,l - p\,l\,\frac{l}{2} = 0,$$

und es wird

$$D_0 = \frac{p\,l}{2}; \text{ eben so } D_1 = \frac{p\,l}{2}. \quad 167.$$

Die Querkraft für einen beliebigen Querschnitt C im Abstande x von A ist

$$Q_x = D_0 - p\,x = \frac{p\,l}{2} - p\,x = \frac{p}{2}(l - 2\,x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 168.$$

Die graphische Darstellung der Veränderung der Querkraft ergiebt die Linie der Gleichung 168, d. h. eine Gerade. Für $x = 0$ ist $Q_0 = \frac{p\,l}{2}$; für $x = l$ ist $Q_l = -\frac{p\,l}{2}$. Q_x wird Null für $l - 2\,x = 0$, d. h. für $x = \frac{l}{2}$. Die Ordinaten der Linie $b\,d$ (Fig. 165 b) sind also die Querkräfte an den verschiedenen Stellen des Balkens.

Das Moment für den Querschnitt C ist

$$M_x = D_0\,x - p\,x\,\frac{x}{2} = \frac{p\,l}{2}\,x - \frac{p\,x^2}{2} = \frac{p}{2}(l\,x - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad 169.$$

Trägt man die Momente in den verschiedenen Querschnitten als Ordinaten auf, so erhält man die Linie der Gleichung 169, d. h. eine Parabel. Für $x = 0$ ist $M_0 = 0$; für $x = l$ ist $M_l = 0$. M_x hat seinen Gröfstwerth für

$$\frac{d\,M_x}{d\,x} = \frac{p}{2}(l - 2\,x) = 0, \text{ d. h. für } x = \frac{l}{2}; \text{ demnach}$$

$$M_{max} = \frac{p}{2}\left[l\,\frac{l}{2} - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right] = \frac{p\,l^2}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 170.$$

Hiernach kann die Parabel leicht construirt werden (Fig. 165 c). Man trage $\frac{p\,l^2}{8}$ nach beliebig angenommenem Momenten-Mafsstabe auf und verzeichne in bekannter Weise die Parabel; alsdann sind alle Ordinaten auf diesem Mafsstabe zu messen.

Nennt man die gesammte auf den Träger entfallende Last $p\,l = P$, so kann man auch setzen

$$M_{max} = \frac{P\,l}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 171.$$

Dieser Ausdruck ist oft bequemer, als Gleichung 170. Wenn eine Last P als Einzellast in der Mitte wirkt, so erzeugt sie nach Art. 153 (S. 145) ein Maximalmoment $M_{max} = \frac{P\,l}{4}$, d. h. ein doppelt so grofses Moment, als die gleichförmig über den ganzen Träger vertheilte Last P.

Beifpiele. 1) Ein Flurgang von 4^{m} Lichtweite ift mit einer Decke aus Kappengewölben zwifchen eifernen I-Trägern zu überdecken; die Spannweite der Kappen fei $2{,}2^{m}$; die Träger follen berechnet werden.

Die Stützweite der Träger, d. h. die Entfernung von Auflagermitte zu Auflagermitte, kann zu $4{,}3^{m}$, d. i. zu 430^{cm} angenommen werden; alsdann ift $l = 430^{cm}$. Auf das laufende Meter des Trägers kommt eine zu tragende Grundfläche von $2{,}2^{m}$ Breite und 1^{m} Länge; mithin ift die Laft für das laufende Meter Träger, bei einer Gröfstbelaftung von 750^{kg} für 1^{qm} Grundfläche, gleich $2{,}2 \cdot 750 = 1650^{kg}$ und für das laufende Centimeter Träger $p = 16{,}5^{kg}$. Die Auflagerdrücke find alfo nach Gleichung 167

$$D_0 = D_1 = \frac{16{,}5 \cdot 430}{2} = 3547^{kg},$$

und das Gröfstmoment nach Gleichung 170

$$M_{max} = M_{mitte} = \frac{16{,}5 \cdot 430^2}{8} = 381356^{kgcm}.$$

Nun ift der Querfchnitt nach Art. 97 (S. 76) fo zu beftimmen, dafs $\frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{M}{K} = \frac{381356}{700} = 544{,}8$ ift. Falls ein I-Querfchnitt gewählt wird, ift Nr. 28 der »Deutfchen Normal-Profile« zu wählen, da bei demfelben $\frac{\mathfrak{J}}{a} = 547$ ift[32]).

2) Es follen die Abmeffungen beftimmt werden, welche einem Deckenbalken aus Kiefernholz bei einer Lichtweite von 6^{m} zu geben find, wenn die Balkenentfernung von Mitte zu Mitte $0{,}9^{m}$ und die Gefammtbelaftung der betreffenden Decke (Eigengewicht und Nutzlaft) 500^{kg} für 1^{qm} beträgt.

Das laufende Meter Balken hat eine Grundfläche von $0{,}9^{m}$ Breite zu tragen, d. h. eine Laft von $0{,}9 \cdot 500 = 450^{kg}$; mithin beträgt die Belaftung für das laufende Centimeter des Balkens $p = 4{,}5^{kg}$. Die von Auflagermitte zu Auflagermitte zu rechnende Stützweite l nehmen wir zu $6{,}3^{m} = 630^{cm}$ an. Das gröfste Moment, welches hier, da der Balkenquerfchnitt conftant ift, der Berechnung des ganzen Balkens zu Grunde gelegt werden mufs, findet in der Balkenmitte ftatt und ift nach Gleichung 170

$$M_{max} = \frac{4{,}5 \cdot 630^2}{8} = 223256^{kgcm};$$

mithin nach Art. 100 (S. 79)

$$\frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{M_{max}}{K} = \frac{223256}{60} = 3721.$$

Da nun nach Gleichung 19 (S. 35): $\mathfrak{J} = \frac{b h^3}{12}$, ferner $a = \frac{h}{2}$ ift, wird $\frac{b h^2}{6} = 3721$, und wenn $b = 25^{cm}$ angenommen wird,

$$h = \sqrt{\frac{6 \cdot 3721}{25}} = 29{,}9^{cm} = \infty\ 30^{cm}.$$

Sonach genügt ein Querfchnitt von 25×30^{cm}.

155. Theilweife gleichförmig vertheilte Belaftung.

Dritter Belaftungsfall: Der Träger ift auf einen Theil feiner Länge durch eine gleichförmig vertheilte Laft belaftet.

Eine Laft P im Abftande x vom linken Auflager A (Fig. 166) erzeugt die Auflagerdrücke

$$D_0 = \frac{P(l-x)}{l} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{P x}{l}.$$

Die Querkraft ift für jeden Querfchnitt E links vom Laftpunkte C

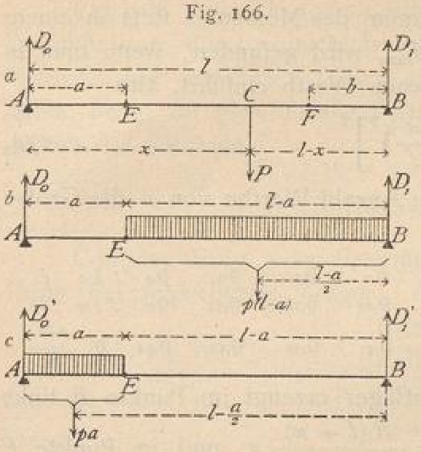
$$Q = D_0 = \frac{P(l-x)}{l}, \text{ d. h. pofitiv;}$$

für jeden Querfchnitt F rechts vom Laftpunkt C:

---

32) Man mufs beim Einfetzen der Zahlenwerthe für p und l vorfichtig fein. Es ift eigentlich felbftverftändlich, dafs, wenn man l in Metern einführt, p die Belaftung für das laufende Meter Träger bedeutet, und wenn l in Centimetern eingeführt wird, p die Belaftung für das laufende Centimeter Träger bedeutet. Giebt man ferner K, die zuläffige Beanfpruchung, in Kilogramm für 1^{qcm} und das Moment M in Kilogramm-Centimetern an, fo find in der Gleichung $\frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{M}{K}$ die Werthe für $\mathfrak{J}$ und a auf Centimeter bezogen einzufetzen. Dennoch dürfte es nicht überflüffig fein, hier befonders darauf aufmerkfam zu machen, da von Anfängern und Ungeübten oft in diefer Hinficht Fehler gemacht werden. Es empfiehlt fich, ftets Alles auf Centimeter und Kilogramm bezogen einzuführen.

Fig. 166.



$$Q_1 = D_0 - P = \frac{P(l-x)}{l} - P = -\frac{Px}{l},$$

d. h. negativ. Daraus folgt der Satz: In einem Querſchnitt erzeugt jede rechts liegende Laſt eine poſitive, jede links liegende Laſt eine negative Querkraft. Demnach wird in irgend einem Querſchnitte, etwa E, die gröſste Querkraft (Q_{max}) ſtattfinden, wenn die ganze Trägerabtheilung rechts von E belaſtet, der übrige Trägertheil (AE) unbelaſtet iſt (Fig. 166 *b*). Die kleinſte Querkraft (Q_{min}) wird in E eintreten, wenn die Abtheilung AE links von E belaſtet, die Abtheilung EB rechts von E unbelaſtet iſt (Fig. 166 *c*).

Man erhält die Werthe von Q_{max}, bezw. Q_{min} für den Querſchnitt E, welcher um a vom linken Auflager entfernt liegt und für die Belaſtung p auf das laufende Meter, wie folgt. Für die Belaſtung nach Fig. 166 *b* iſt

$$D_0 = Q_{max} = \frac{p(l-a)^2}{2l}; \quad \ldots \ldots \quad 172.$$

für die Belaſtung nach Fig. 166 *c* iſt

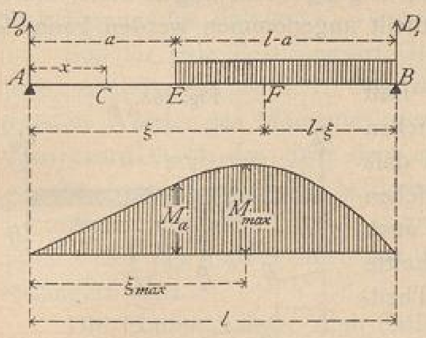
$$D_0' = \frac{pa}{l}\left(l - \frac{a}{2}\right) = pa - \frac{pa^2}{2l} \quad \text{und} \quad Q_{min} = D_0' - pa;$$

ſonach

$$Q_{min} = -\frac{pa^2}{2l} \quad \ldots \ldots \quad 173.$$

Die Belaſtung nach Fig. 166 kommt im Hochbau ſehr häufig vor, z. B. bei Trägern unter Mauern, in welchen ſich Fenſter- oder Thüröffnungen befinden. Für die Querſchnittsbemeſſung iſt das gröſste Moment maſsgebend, welches demnach aufgeſucht werden ſoll.

Fig. 167.



Für irgend einen Punkt C der Strecke AE (Fig. 167) iſt das Moment

$$M_x = D_0 x = \frac{p(l-a)^2}{2l} x;$$

die graphiſche Darſtellung ergiebt eine Gerade. Für einen Punkt F der Strecke CB iſt das Moment bequem durch Betrachtung des rechts von F gelegenen Trägertheiles zu finden. Es iſt

$$M_\xi = D_1(l-\xi) - \frac{p(l-\xi)^2}{2}, \quad \text{woraus} \quad M_\xi = \frac{p}{2l}(l-\xi)(l\xi - a^2).$$

Auf dieſer Strecke ergiebt alſo die graphiſche Darſtellung des Momentes eine Parabel. Dieſelbe hat ihr Maximum für

$$\xi_{max} = \frac{l}{2} + \frac{a^2}{2l}.$$

Aus der Formel ergiebt fich, dafs das Maximum des Momentes ftets in einem Punkte der belafteten Strecke EB ftattfindet. M_{max} wird gefunden, wenn man in den Ausdruck für M_ξ ftatt ξ den für ξ_{max} gefundenen Werth einführt, alfo

$$M_{max} = \frac{p\,l^2}{8}\left[1-\left(\frac{a}{l}\right)^2\right]^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 174.$$

Nachftehende kleine Tabelle ergiebt für eine Anzahl Werthe von a die Gröfse von M_{max} und von ξ_{max}:

Für a =	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0 l
ξ_{max} =	0,5	0,505	0,52	0,545	0,58	0,625	0,68	0,745	0,82	0,9	1,0 l
M_{max} =	1	0,98	0,92	0,83	0,71	0,56	0,41	0,26	0,13	0,04	0 $\frac{p\,l^2}{8}$

156. Gröfste Momente durch gleichförmig vertheilte Laften.

Eine Laft P im Abftande x vom linken Auflager erzeugt im Punkte E links vom Laftpunkte (Fig. 166 a) ein Moment $M_a = \frac{P\,(l-x)}{l}\,a$ und im Punkte F rechts vom Laftpunkte das Moment $M_b = \frac{P\,x}{l}\,b$. Beide Momentenwerthe find pofitiv; alfo erzeugt eine jede Einzellaft in allen Trägerquerfchnitten pofitive Momente. Die gröfsten Momente in den einzelnen Trägerquerfchnitten werden demnach ftattfinden, wenn alle Trägerpunkte belaftet find, d. h. bei voller Belaftung des Trägers. Ift alfo volle Belaftung eines Trägers mit gleichmäfsig vertheilter Laft p möglich, fo ruft diefe die gröfsten Momente hervor und ift defshalb der Berechnung zu Grunde zu legen. Bei diefer Belaftung ift nach Gleichung 169 für einen Querfchnitt mit der Abfciffe x

$$M_x = \frac{p}{2}\,(l\,x - x^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 175.$$

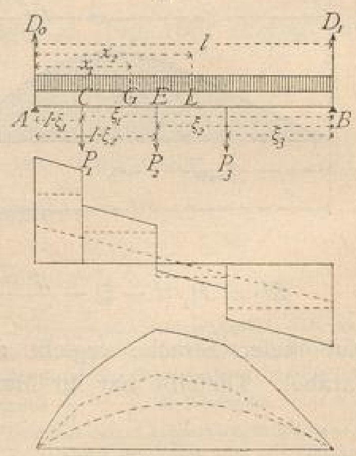
157. Gleichförmig vertheilte Laft und Einzellaften, bezw. theilweife Belaftung.

Vierter Belaftungsfall: Der Träger wird auf feine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Laft und aufserdem durch Einzellaften oder auf einen Theil feiner Länge durch eine weitere gleichförmig vertheilte Laft belaftet.

Da jeder Träger aufser der Nutzlaft noch das Eigengewicht tragen mufs, diefes aber als gleichförmig über die ganze Länge vertheilt angenommen werden kann, fo ift diefer Fall der am häufigften vorkommende.

In Art. 153 ift nachgewiefen, dafs jede Laft einen von den fonft noch auf dem Balken befindlichen Laften unabhängigen Stützendruck erzeugt, und dafs der Gefammt-Stützendruck gleich der algebraifchen Summe der Einzeldrücke ift. Daraus folgt, dafs auch die Querkräfte und Momente für alle Querfchnitte gleich den algebraifchen Summen der bez. Theil-Querkräfte und Momente find.

Fig. 168.



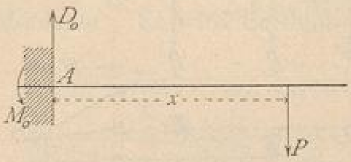
Demnach brauchen im vorliegenden Falle nur die Stützendrücke, Querkräfte und Momente, welche bei den einzelnen bereits betrachteten Belaftungen, derjenigen durch Einzellaften und derjenigen durch gleichförmig vertheilte Laft u. f. w., fich ergeben haben, algebraifch addirt zu werden, was fowohl auf dem Wege der Rechnung, wie graphifch gefchehen kann.

Fig. 168 ftellt die Querkräfte und Momente dar, welche in den verfchiedenen Querfchnitten durch gleichförmig vertheilte Laft und Einzellaften hervorgerufen werden. Die punktirten Linien geben die Werthe von Q und M nur für Einzellaften, bezw. für gleichförmig vertheilte Laft an; die voll ausgezogenen Linien bedeuten die Summen.

2) Confole-, Krag- oder Freiträger.

Confole-, Krag- oder Freiträger find am einen Ende unterftützte, am anderen Ende frei fchwebende Träger. Als äufsere Kräfte wirken auf diefelben die Belaftungen und die Auflagerdrücke der Unterftützungsftelle. Letztere laffen fich aus den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln. Damit der Träger im Gleichgewicht fei, mufs zunächft die algebraifche Summe der lothrechten Kräfte gleich Null fein, d. h. wenn die lothrechte Seitenkraft des Auflagerdruckes bei A (Fig. 169) gleich D_0 ift, wird $0 = D_0 - P$ oder 158. Erklärung.

Fig. 169.



$$D_0 = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 176.$$

Eine äufsere wagrechte Belaftung fei nicht vorhanden; daher wird der Auflagerdruck keine wagrechte Seitenkraft haben. Es mufs aber auch die algebraifche Summe der ftatifchen Momente für einen beliebigen Punkt der Ebene, alfo etwa für A, gleich Null fein; mithin mufs, da das Moment der gegebenen Kräfte für A nicht gleich Null ift, D_0 aber für den Drehpunkt A kein ftatifches Moment hat, an der Unterftützungsftelle noch eine Anzahl von Kräften wirken, deren refultirendes Moment mit demjenigen der Belaftungen zufammen die Summe Null ergiebt. Bei A wirkt alfo ein Moment M_0, deffen Gröfse fich bei dem in Fig. 169 gezeichneten Drehfinn aus der Gleichung ergiebt:

$$P x - M_0 = 0, \quad \text{d. h.} \quad M_0 = + P x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 177.$$

Diefes Moment, deffen Drehfinn demjenigen von P entgegengefetzt ift, kann auf verfchiedene Weife erzeugt werden, am einfachften durch Einmauerung, bezw. Einfpannung des Balkens.

Soll für jede Belaftungsart Gleichgewicht vorhanden fein, fo mufs der Balken derart eingemauert werden, dafs das von der Mauer geleiftete Moment auch die gröfsten Werthe des Momentes der Belaftungen aufheben kann. Das Moment der Mauer wird durch das über dem eingemauerten Balkentheil liegende Mauergewicht geleiftet, wonach diefes zu beftimmen ift.

Auch in anderer Weife kann ein Moment in A erzeugt werden, z. B. dadurch, dafs der Balken über den Punkt A hinaus, bis zu einer zweiten Stütze B, verlängert wird.

Die Confole-Träger find ftatifch beftimmt, da die beiden Unbekannten: der Auflagerdruck D_0 und das Moment M_0, nach den Gefetzen der Statik fefter Körper ermittelt werden können. Im Folgenden werden der Auflagerdruck, die Querkräfte und die Momente, wie beim Balkenträger auf zwei Stützen gefucht; daher werden bezüglich der Belaftungsart drei Fälle unterfchieden:

Erfter Fall: Der Confole-Träger wird durch beliebige Einzellaften belaftet. 159. Belaftung durch Einzellaften.

Die freie Balkenlänge $A B$ (Fig. 170) fei gleich l; alsdann ift der Stützendruck