



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Die Statik der Hochbau-Constructions**

**Landsberg, Theodor**

**Stuttgart, 1899**

b) Innere Kräfte der Gitterträger

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77733](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77733)

Bei drei Oeffnungen mit den Stützweiten  $l_1, l_2$  und  $l_1$  ergeben sich folgende Werthe:

$$M_0 = M_3 = 0, \quad M_1 = M_2 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4(3l_2 + 2l_1)}, \dots \dots \dots 209.$$

$$D_0 = D_3 = \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4l_1(3l_2 + 2l_1)}, \quad D_1 = D_2 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4l_1(3l_2 + 2l_1)} + \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{p_2 l_2}{2}. \quad 210.$$

Aus diesen allgemeinen Gleichungen kann man in besonderen Fällen die betreffenden Werthe leicht finden. Wenn z. B. eine ganze Oeffnung unbelastet ist, so ist einfach in den obigen Ausdrücken das entsprechende  $p$  gleich Null zu setzen.

**b) Innere Kräfte der Gitterträger.**

Die Balkenträger sind entweder vollwandige Träger oder gegliederte Träger, letztere gewöhnlich Gitterträger genannt. Bei den ersteren bildet der ganze Querschnitt eine zusammenhängende Fläche; bei den letzteren besteht derselbe aus zwei getrennten Theilen, den sog. Gurtungsquerschnitten; beide Gurtungen sind durch Stäbe mit einander verbunden.

166.  
Allgemeines.

Die Ermittlung der Spannungen, welche in den vollwandigen Trägern, wozu die hölzernen und gußeisernen Balken, die Walzbalken und Blechträger gehören, durch die äußeren Kräfte erzeugt werden, ist bereits in Abfchn. 2, Kap. 4 vorgeführt worden; dafelbst ist auch die Querschnittsbestimmung für diese Balken gezeigt. Im vorliegenden Kapitel sollen deshalb nur die in den Gitterträgern entstehenden inneren Kräfte entwickelt werden.

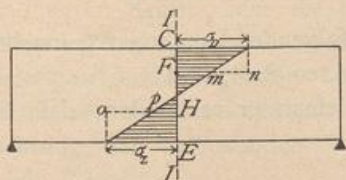
Gitterträger sind aus einzelnen Stäben zusammengesetzte Träger. Die Kreuzungspunkte der einzelnen Stäbe heißen Knotenpunkte. Jeder Gitterträger hat eine obere Gurtung und eine untere Gurtung. Zur Verbindung beider dient das zwischen ihnen angeordnete Gitterwerk.

Man nennt jedes aus Stäben, welche in den Schnittpunkten ihrer Axen mit einander verbunden sind, bestehende Stabwerk ein Fachwerk; die Gitterträger bilden demnach Fachwerke.

Die Vortheile der Gitterträger gegenüber den vollwandigen Trägern ergeben sich leicht durch die folgende Ueberlegung. Die auf Biegung beanspruchten Träger erleiden in allen Punkten eines jeden Querschnittes verschiedene Beanspruchungen. Wenn die äußeren Kräfte nur senkrecht zur Balkenaxe gerichtet sind, so ist im einfachsten und häufigsten Falle die Spannung eines in der Höhe  $z$  über, bezw. unter der wagrechten Schwerpunktsaxe liegenden Punktes nach Gleichung 56:  $\sigma = \frac{M}{\mathcal{F}} z$ .

Die graphische Darstellung der an den verschiedenen Stellen des Querschnittes auftretenden Spannungen  $\sigma$  ist die durch Fig. 189 veranschaulichte, da  $\frac{M}{\mathcal{F}}$  für irgend einen Querschnitt constant ist. Im Punkte  $C$  des Querschnittes  $II$  ist die Spannung  $\sigma_D$  (Druck), in  $E$  ist sie  $\sigma_Z$  (Zug); in allen anderen Punkten des Querschnittes hat sie geringere Werthe. Da aber die Beanspruchungen  $\sigma_D$  und  $\sigma_Z$  die zulässigen Grenzen  $K''$  für Druck und  $K'$  für Zug nicht überschreiten dürfen, so ist  $\sigma_D = K''$  und  $\sigma_Z = K'$  zu setzen und danach die Querschnittsfläche zu bestimmen. Die zulässige Beanspruchung

Fig. 189.



findet also nur in wenigen Querschnittspunkten statt, nämlich in denjenigen, welche am weitesten nach oben, bzw. unten von der wagrechten Schwerpunktsaxe abliegen. In allen anderen Querschnittspunkten ist die wirklich höchstens vorhandene Spannung viel kleiner, als zulässig wäre, so z. B. im Punkte  $F$  um  $mn$  und im Punkte  $H$  um  $op$ . Demnach wird bei einem vollwandigen, auf Biegung beanspruchten Träger der Baustoff durchaus nicht ausgenutzt. Eine Ausnutzung des Materials bis zur zulässigen Grenze kann nur stattfinden, wenn die Stäbe in der Richtung ihrer Axe, also auf Zug oder Druck beansprucht werden, weil nur dann die Annahme einer gleichmäßigen Vertheilung der Kraft über den ganzen Querschnitt annähernd erfüllt ist. Bei den richtig construirten Gitterträgern werden aber alle Stäbe nur auf Zug oder Druck in der Richtung ihrer Axe beansprucht, so daß man der Baustoff voll ausnutzen und folglich mit geringerem Stoffaufwande als bei vollwandigen Trägern auskommen kann. Hierzu möge noch bemerkt werden, daß diese Vortheile nur bei größeren Weiten voll in die Erscheinung treten; bei kleineren Weiten ergeben sich die Stabquerschnitte für die praktische Ausführung zu klein, so daß für solche Aufgaben vollwandige Träger vorzuziehen sind.

167.  
Eintheilung  
der  
Gitterträger.

Nach der Form der Gurtung unterscheidet man:

1) Parallelträger, d. h. Träger, deren beide Gurtungen parallel (gewöhnlich auch wagrecht) sind.

2) Träger mit einer krummen und einer geraden Gurtung oder mit zwei krummen Gurtungen. Die ersteren nennt man, wenn die Endhöhe des Trägers gleich Null ist und die obere Gurtung krumm, die untere Gurtung gerade ist, Bogenföhnenträger; wenn die untere Gurtung gekrümmt, die obere Gurtung gerade ist, Fischbauchträger. Je nach der Curve der Krümmung unterscheidet man Parabelträger, Hyperbel- (Schwedler-) Träger, Ellipsenträger etc.

3) Dreieck- und Trapezträger, d. h. Träger, deren Gurtungen ein Dreieck, bzw. ein Paralleltrapez bilden.

Eintheiliges Gitterwerk ist solches, bei welchem sich jeder Gitterstab nur in den Gurtungen mit den anderen Gitterstäben kreuzt; mehrtheiliges Gitterwerk ist solches, bei welchem jeder Gitterstab sich aufer in den Gurtungen noch ein oder mehrere Male mit anderen Gitterstäben kreuzt.

Für die Zwecke des Hochbaues ist wohl immer das eintheilige Gitterwerk, welches eine genaue und einfache Berechnung zuläßt, ausreichend, so daß hier nur Träger mit eintheiligem Gitterwerk besprochen werden sollen.

Die Gitterstäbe sind entweder geneigt oder lothrecht; sie werden in der Folge bzw. als Diagonalen und Verticalen oder Pfoften bezeichnet werden.

Gitterwerk mit zwei Lagen Diagonalen nennt man Netzwerk; Gitterwerk mit einer Lage Diagonalen und einer Lage Pfoften bezeichnet man wohl im engeren Sinne mit dem Namen Fachwerk.

Die Dachbinder sind in den allermeisten Fällen Gitterträger, so daß die hier zunächst zu entwickelnden allgemeinen Regeln und Gesetze auch für die im nächsten Kapitel zu behandelnden Dachbinder giltig sind.

168.  
Voraus-  
setzungen.

Bei den nachstehenden Untersuchungen werden folgende Annahmen gemacht:

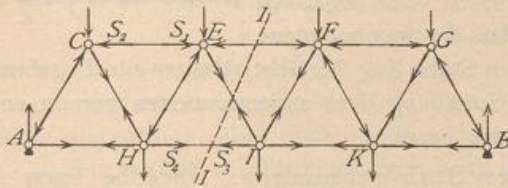
- 1) die Belastungen finden nur in den Knotenpunkten statt, und
- 2) die Stäbe sind in den Knotenpunkten so mit einander verbunden, daß sie sich um dieselben frei drehen können.

## 1) Verfahren für die Bestimmung der Stabspannungen.

Die Ermittlung der Spannungen in den einzelnen Stäben des Fachwerkes erfolgt nach dem allgemeinen Verfahren, welches in Art. 4 (S. 6) angegeben worden ist. Man untersucht den Gleichgewichtszustand irgend eines Theiles des Fachwerkes unter der Einwirkung aller an demselben thätigen Kräfte. In jeder Stabaxe wirken zwei Kräfte, welche einander an Gröfse gleich sind, aber entgegengesetzten Sinn

169.  
Erläuterungen.

Fig. 190.



haben: die Stabspannungen. Im Stabe  $CE$  (Fig. 190) wird von  $C$  eine Kraft  $S_1$  auf  $E$  übertragen, und eine gleich große Kraft  $S_2$  von  $E$  auf  $C$ ; beide sind Druck. In  $HI$  wird von  $H$  auf  $I$  ein Zug  $S_3$ , von  $I$  auf  $H$  ein gleich großer Zug  $S_4$  ausgeübt. In Fig. 190 sind alle auf die Knotenpunkte wirkenden Stabspannungen angegeben.

Betrachtet man nur einen Theil des Trägers, etwa den links vom Schnitte  $II$  gelegenen, so wirken auf denselben aufer den äußeren Kräften die Stabspannungen. Alle Stäbe, deren beide Knotenpunkte dem betreffenden Theile angehören, enthalten zwei Kräfte, die einander das Gleichgewicht halten, also für die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nicht in Betracht kommen. In anderer Lage sind diejenigen Stäbe, welche vom Schnitte  $II$  getroffen werden, von denen also nur ein Knotenpunkt links vom Schnitte liegt. Nur diejenigen Spannungen dieser Stäbe, welche auf die dem betreffenden Trägertheile angehörnden Knotenpunkte wirken, sind als auf das Bruchstück wirkende Kräfte einzufetzen; so viele Stäbe also durch den Schnitt getroffen werden, so viele Stabspannungen sind in den Gleichgewichtsgleichungen vorhanden, welche für den Trägertheil aufzustellen sind. Diese Spannungen sind die unbekannt Kräfte, für deren Ermittlung die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen zu Gebote stehen. Da für Kräfte in der Ebene drei Gleichgewichtsbedingungen vorhanden sind, so ist die Aufgabe auf dem angegebenen, rein statischen Wege nur dann lösbar, wenn sich bei jedem Schnitte nur drei unbekannt Stabspannungen ergeben.

Ein solches Fachwerk, bei welchem sämtliche Stabspannungen durch die Gesetze des Gleichgewichtes starrer Körper bestimmbar sind, nennt man statisch bestimmt; reichen diese Gesetze dazu nicht aus, so ist das Fachwerk statisch unbestimmt. In letzterem Falle sind die Stabspannungen auch noch von den elastischen Formänderungen abhängig. Es ist aus verschiedenen Gründen empfehlenswerth, im Hochbau nur statisch bestimmte Fachwerke zu verwenden.

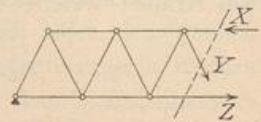
Unter Berücksichtigung des Vorstehenden ist nun folgendermaßen zu verfahren. Das Fachwerk wird an derjenigen Stelle durchschnitten gedacht, an welcher man die inneren Kräfte, hier die Stabspannungen, kennen lernen will; an den Schnittstellen werden die inneren Kräfte angebracht und auf das Bruchstück die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen angewendet. Da hier die Stäbe, wie angenommen wurde, um die Knotenpunkte frei drehbar sind, so muß jede Stabspannung mit der Richtung des betreffenden Stabes zusammenfallen. Sonach ergibt sich die folgende Regel.

170.  
Verfahren  
im  
Allgemeinen.

Man denke sich den Träger so durchschnitten, daß die Stäbe, deren Spannung man sucht, durch den Schnitt getroffen werden, bringe die mit den Stabrichtungen zusammenfallenden Spannungen dieser Stäbe als vorläufig unbekannte Kräfte an (Fig. 191) und stelle für das Bruchstück die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf.

Die Stäbe werden gezogen oder gedrückt; im ersten Falle wirkt die Spannung vom Knotenpunkte ab ( $Y$  und  $Z$  in Fig. 191); im zweiten Falle wirkt sie nach dem Knotenpunkt hin ( $X$  in Fig. 191). Da man beim Beginne der Berechnung vielfach noch nicht den Sinn der Beanspruchung kennt, so werden wir zunächst stets alle Spannungen als Zugspannungen, d. h. vom Knotenpunkte ab gerichtet, einführen; die Rechnung ergibt entweder einen positiven oder negativen Werth. Das erstere Ergebniss bedeutet, daß die angenommene Pfeilrichtung die richtige war, d. h. daß im Stabe Zug herrscht; das zweite Ergebniss bedeutet, daß der Sinn der wirklichen Spannung dem angenommenen gerade entgegengesetzt ist, d. h. daß im Stabe Druck herrscht.

Fig. 191.



171.  
Verfahren  
durch  
Rechnung.

a) Analytische Bestimmung der Stabspannungen. Dieselbe kann in zweifacher Weise geschehen: entweder durch Aufstellung aller Gleichgewichtsbedingungen oder nach der folg. Momenten-Methode.

172.  
Gleichgewichts-  
bedingungen.

a) Die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für das Bruchstück (Fig. 192), welches, wie in Art. 170 angegeben, behandelt ist, ergibt drei Gleichungen, welche nach Art 6 (S. 8) lauten:

$$\left. \begin{aligned} X \cos \sigma + Y \sin \tau + Z = 0; & \quad D_0 - P_1 - P_2 + X \sin \sigma - Y \cos \tau = 0 \\ D_0 \cdot 2a - P_1 a - Zz = 0 & \end{aligned} \right\} \dots 211.$$

Als Drehpunkt für die dritte Gleichung ist der Punkt  $C$  gewählt; alsdann haben  $X$ ,  $Y$  und  $P_2$  kein statisches Moment, weil sie für diesen Drehpunkt keinen Hebelsarm haben.

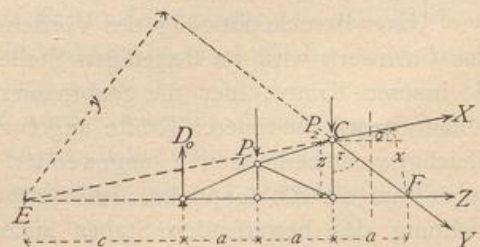
Der angegebene Weg führt stets, wenn nur 3 Unbekannte, also 3 geschnittene Stäbe vorhanden sind, zum Ziele; er hat den Nachtheil, daß meistens 3 Gleichungen gelöst werden müssen, selbst wenn man nur eine Spannung kennen lernen will.

173.  
Ritter'sches  
Verfahren.

b) Das Charakteristische der von Ritter angegebenen Momenten-Methode ist, daß man für jede Spannung nur eine Gleichung erhält; das Mittel dazu bietet die Gleichgewichtsbedingung, welche besagt, daß die algebraische Summe der statischen Momente aller Kräfte, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene, gleich Null sein muß. Wird der Momentenpunkt so gewählt, daß zwei von den drei Unbekannten das Moment Null haben, so bleibt in der Gleichung nur eine Unbekannte. Das statische Moment jeder der beiden Kräfte ist aber gleich Null für den Schnittpunkt beider Krafrichtungen, weil für diesen Punkt jede der beiden Kräfte den Hebelsarm Null hat. Das Verfahren ist demnach das folgende.

Man lege durch den Träger einen Schnitt, so daß nur 3 Stäbe mit unbekanntem Spannungen geschnitten werden, bringe diese Spannungen und alle am

Fig. 192.



Bruchstück wirkenden äußeren Kräfte an, setze die algebraische Summe der statischen Momente dieser Kräfte gleich Null und wähle dabei als Momentenpunkt für die Ermittlung der Spannung eines Stabes stets den Schnittpunkt der beiden mitdurchschnittenen Stäbe.

Um in Fig. 192 die Spannung  $X$  zu finden, wählt man  $F$  als Momentenpunkt; die Gleichung der statischen Momente heißt dann

$$Xx + D_0 \cdot 3a - P_1 \cdot 2a - P_2 a = 0,$$

woraus sich die einzige Unbekannte  $X$  leicht finden läßt. Für  $C$  als Momentenpunkt ergibt sich

$$D_0 \cdot 2a - P_1 a - Zz = 0,$$

woraus  $Z$  zu berechnen ist, und für  $E$  als Momentenpunkt

$$Yy - D_0 c + P_1 (c + a) + P_2 (c + 2a) = 0,$$

woraus  $Y$  zu ermitteln ist.

Die Länge der Hebelsarme kann meistens genügend genau aus der Zeichnung abgegriffen, aber auch leicht rechnerisch ermittelt werden.

Wir werden den für einen Stab nach dieser Methode sich ergebenden Momentenpunkt den diesem Stabe conjugirten Punkt nennen.

β) Graphische Bestimmung der Stabspannungen. Auch das graphische Verfahren kann nach verschiedenen Arten durchgeführt werden, entweder nach der Schnittmethode oder nach der Vieleckmethode oder nach einer aus Zeichnung und Rechnung zusammengesetzten Weise (*Zimmermann's* Verfahren).

a) Die Schnittmethode wurde von *Culmann* angegeben.

Werden die sämtlichen am Bruchstück wirkenden äußeren Kräfte zu einer Mittelkraft  $Q$  (Fig. 193) zusammengefaßt, so wirken auf dasselbe 4 Kräfte, nämlich  $Q$

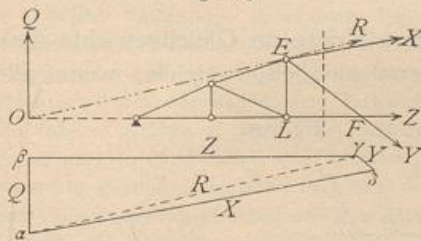
und die drei unbekanntenen Spannungen der durch den Schnitt getroffenen Stäbe. Für diese 4 Kräfte ergibt sich ein geschlossenes Kraftpolygon. Von einer dieser Kräfte, nämlich von  $Q$ , sind Größe, Richtung und Lage bekannt; von den drei anderen wohl die Richtung und Lage, nicht aber die Größe. Ersetzt man 2 der unbekanntenen Kräfte, etwa  $X$  und  $Y$ , durch ihre Mittelkraft  $R$ , so bleiben nur noch

die 3 Kräfte  $Q$ ,  $Z$  und  $R$ , welche sich nach Art. 8 (S. 10) in einem Punkte schneiden müssen.  $R$  muß also durch den Schnittpunkt  $O$  von  $Q$  und  $Z$  gehen. Da  $R$  außerdem durch den Schnittpunkt  $E$  von  $X$  und  $Y$  geht, so sind 2 Punkte der Richtungslinie von  $R$ , somit ist auch diese Richtung selbst bekannt.  $R$  hat demnach die Richtung  $OE$ . Im Punkte  $O$  halten sich nun die 3 Kräfte  $Q$ ,  $R$  und  $Z$  das Gleichgewicht; das für dieselben construirte Kraftpolygon ist eine geschlossene Figur, hier ein Dreieck. Ist  $Q = \alpha\beta$ , so ziehe man durch  $\beta$  eine Parallele zur Richtung von  $Z$ , durch  $\alpha$  eine solche zur Richtung von  $R$ ; der Schnittpunkt  $\gamma$  beider Linien ergibt die beiden Kräfte  $R = \gamma\alpha$  und  $Z = \beta\gamma$ .

In derselben Weise kann nun  $R$  in seine beiden Seitenkräfte  $X$  und  $Y$  zerlegt werden, indem man durch die beiden Endpunkte von  $R$  Parallelen zu den Richtungen von bezw.  $X$  und  $Y$  zieht. Es ergibt sich  $\gamma\delta = Y$  und  $\delta\alpha = X$ .

Es ist für das Endergebnis gleichgültig, welche beiden von den unbekanntenen Spannungen man zu einer Mittelkraft vereinigt. Man kann auch  $Y$  und  $Z$  (Fig. 194) durch ihre Mittelkraft  $R'$  ersetzen, welche dann durch  $F$  und den Schnittpunkt  $O'$  der Kraft  $X$  mit  $Q$  geht. Als Kraftpolygon erhält man  $\alpha\beta\epsilon\zeta$ .

Fig. 193.



174.  
Graphisches  
Verfahren.

175.  
Culmann'sches  
Verfahren.

Eben so kann man auch  $X$  und  $Z$  zu einer Mittelkraft vereinen und erhält die ebenfalls in Fig. 194 gezeichnete Construction.

Die angegebene Construction giebt zugleich Aufschluss darüber, ob die Stäbe gezogen oder gedrückt werden. Da die am Bruchstück wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sind, so haben sie nach Art. 15 (S. 12) denselben Umfahrungsinn, und demnach ist der Sinn aller im Kraftpolygon vorkommenden Kräfte bekannt, wenn der Sinn einer derselben bekannt ist. Hier ist stets der Sinn von  $Q$  bekannt; denn dies ist die Querkraft für den bezüglichen Querschnitt.  $Q$  hat den Sinn von  $\alpha$  nach  $\beta$ ; also ist in Fig. 193  $Z$  von  $\beta$  nach  $\gamma$ , d. h. vom Knotenpunkt  $L$  ab gerichtet,  $Y$  von  $\gamma$  nach  $\delta$  und  $X$  von  $\delta$  nach  $\alpha$  gerichtet.  $X$  wirkt also nach dem Knotenpunkte  $E$  hin, ist demnach Druck, während  $Z$  und  $Y$  Zug bedeuten. Richtung, Gröfse und Lage der Kraft  $Q$  für eine gegebene Belastung sind mit Hilfe des Kraft- und Seilpolygons leicht bestimmbar. (Siehe Art. 153, S. 146.)

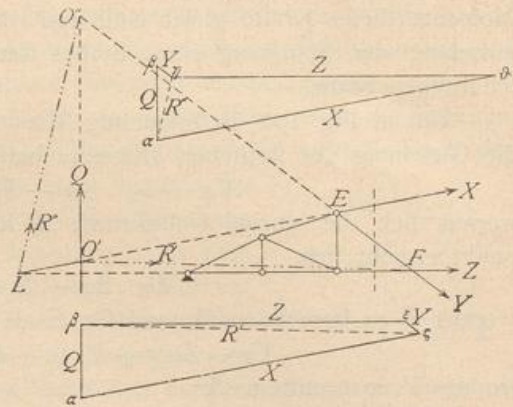
b) Die Vieleckmethode ist von *Cremona* angegeben worden.

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein. Randstäbe seien Stäbe, welche zwei auf einander folgende äußere Knotenpunkte mit einander verbinden, also  $I II, II III \dots$  in Fig. 195; Zwischenstäbe seien Stäbe, welche zwei nicht auf einander folgende äußere Knotenpunkte verbinden, also  $II V, III V$  in Fig. 195.

Da alle auf das Fachwerk wirkenden äußeren Kräfte im Gleichgewichte sind, so ist für dieselben ein geschlossenes Kraftpolygon möglich, welches, wenn alle äußeren Kräfte nach Gröfse und Richtung gegeben sind, leicht construirt werden kann. Außerdem sind an jedem Knotenpunkte die an demselben wirkenden Kräfte für sich im Gleichgewicht; sonach ist für jeden dieser Knotenpunkte ein weiteres, sich schließendes Kraftpolygon zweiter Ordnung möglich. An jedem Knotenpunkte wirken: eine äußere Kraft, die im besonderen Falle Null sein kann, und die Spannungen der Stäbe, welche sich in ihm schneiden, also im Knotenpunkte  $II$  die Kräfte  $z, B, C, a$ .

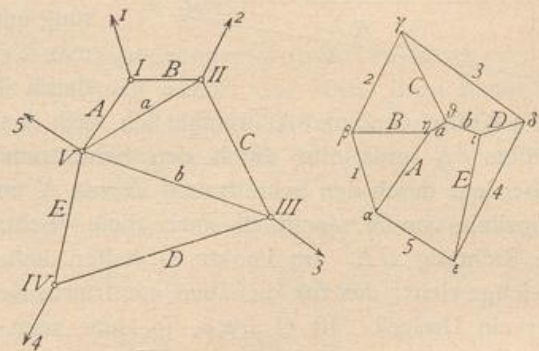
In den meisten der kleinen Kraftpolygone kommt nun je eine äußere Kraft vor, welche bereits im großen Hauptpolygon der äußeren Kräfte enthalten ist; es wird also offenbar möglich sein, jedes kleine Kraftpolygon so an das große zu legen, daß die beiden gemeinsame äußere Kraft durch dieselbe Gerade dargestellt wird. Da ferner jeder Stab zu zwei Knotenpunkten gehört, so kommt jede Stabspannung

Fig. 194.



176.  
Cremona'sches  
Verfahren.

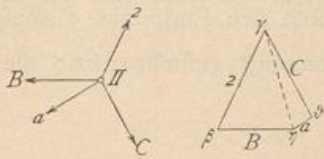
Fig. 195.



in zwei Kraftpolygonen zweiter Ordnung vor. Es wird nun durch zweckmäßige Anordnung möglich, die kleinen Kraftpolygone so in das große einzufachtheln, daß nicht nur jede äußere Kraft, sondern auch jede Stabspannung nur einmal im Kräftezuge vorkommt, d. h. auch die kleinen Kraftpolygone hängen dann so zusammen, daß die zwei gemeinsame Stabspannung durch dieselbe Gerade dargestellt wird.

Für die Construction der kleinen Kraftpolygone ist Folgendes zu beachten. Wenn, wie hier, die Richtung sämtlicher Kräfte bekannt ist und das Kraftpolygon wegen des Gleichgewichtes der Kräfte sich schließt, so ist die Construction desselben stets möglich, falls am Knotenpunkte nur zwei unbekannte Kräfte vorhanden sind. Denn seien etwa in Fig. 196  $B$  und  $a$  bekannt,  $a$  und  $C$  unbekannt, so erfordert

Fig. 196.



das Gleichgewicht, daß die Mittelkraft von  $a$  und  $C$  der bekannten Mittelkraft von  $a$  und  $B$  der Größe nach genau gleich ist. Die bekannte Mittelkraft von  $a$  und  $B$  ist aber die Verbindungslinie  $\gamma\gamma$  im Kraftpolygon, und dieselbe ist im entgegengesetzten Sinne genommen ohne Schwierigkeit in die beiden Seitenkräfte  $C$  und  $a$  zu zerlegen, indem durch den einen Endpunkt, etwa  $\gamma$ , eine Parallele zu  $C$ , durch den anderen Endpunkt, etwa  $\eta$ , eine Parallele zu  $a$  gezogen wird. Der Schnittpunkt  $\vartheta$  ergibt  $\gamma\vartheta = C$  und  $\vartheta\eta = a$ . Alsdann ist  $\beta\gamma\vartheta\eta$  das kleine Kraftpolygon für Punkt  $II$ . Man muß demnach die kleinen Kraftpolygone so construiren, daß sich stets nur 2 Unbekannte ergeben. Zu diesem Zwecke beginnt man mit demjenigen Knotenpunkte, in welchem sich nur 2 Stäbe schneiden, hier (Fig. 195) also etwa mit  $I$ . Die äußere Kraft ist bekannt; unbekannt sind demnach nur  $A$  und  $B$  und nach Obigem leicht zu ermitteln. Man geht nun zu einem Knotenpunkt über, von welchem man wiederum alle Kräfte mit Ausnahme von zweien kennt, hier zu  $II$ . Bekannt sind hier  $a$  und  $B$ , unbekannt  $C$  und  $a$ , demnach leicht ermittelt. So schreitet man weiter. Ein Knotenpunkt, in welchem sich nur 2 Stäbe schneiden, ist bei den in der Praxis üblichen Gitterträgern stets vorhanden.

Damit nun jede äußere Kraft und jede Stabspannung nur einmal in dem entstehenden Kräftezuge — dem Kräfteplan — vorkommen, ist folgende Regel zu befolgen. Man vereine sämtliche äußeren Kräfte zu einem geschlossenen Kraftpolygon, indem man sie in der Folge der Knotenpunkte oder, wie man sagt, in cyclischer Reihenfolge an einander legt, und ziehe nun durch die Eckpunkte dieses Kraftpolygons Parallelen zu den Randstäben derart, daß die Parallele zu einem Randstabe, etwa zu  $A$ , durch denjenigen Eckpunkt des großen Kraftpolygons geht, welcher zwischen den beiden äußeren Kräften liegt, zwischen denen der betreffende Randstab im Fachwerk sich befindet. Der Randstab  $A$  liegt im Fachwerk zwischen den äußeren Kräften  $1$  und  $5$ ; die Parallele zu  $A$  wird also durch den Punkt  $a$  zwischen  $1$  und  $5$  gezogen; eben so die Parallele zum Randstab  $B$  durch  $\beta$  zwischen  $1$  und  $2$  etc. Unter Benutzung der hier gezogenen Parallelen construirt man nun, wie oben angegeben, die kleinen Kraftpolygone; alsdann erhält man einen Linienzug zwischen den Randstäben, in welchem jede einzelne Linie eine Zwischenstabspannung darstellt und in welchem jede Zwischenstabspannung nur einmal vorkommt. Die auf den Parallelen zu den Randstäben abgechnittenen Längen geben die Spannungen der Randstäbe an.

Der Sinn der Stabspannungen wird hier genau in derselben Weise aus dem Kraftpolygon für einen Knotenpunkt ermittelt, wie im vorhergehenden Artikel angegeben ist.

c) Verfahren von *Zimmermann* für Fachwerke, welche durch parallele äußere Kräfte beansprucht werden.

Die wagrechte Projection des Abstandes je zweier Knotenpunkte derselben Gurtung sei constant; sie sei gleich  $a$  (abgesehen von derjenigen der zunächst an den Auflagern gelegenen Knotenpunkte der unteren Gurtung). In einem Stabe der oberen Gurtung (Fig. 197), etwa im Stabe  $II III$ , ist die Spannung bei einer Belastung, welche für den Punkt  $3$  das Moment  $M_3$  erzeugt,

$$O_3 = - \frac{M_3}{r_3}.$$

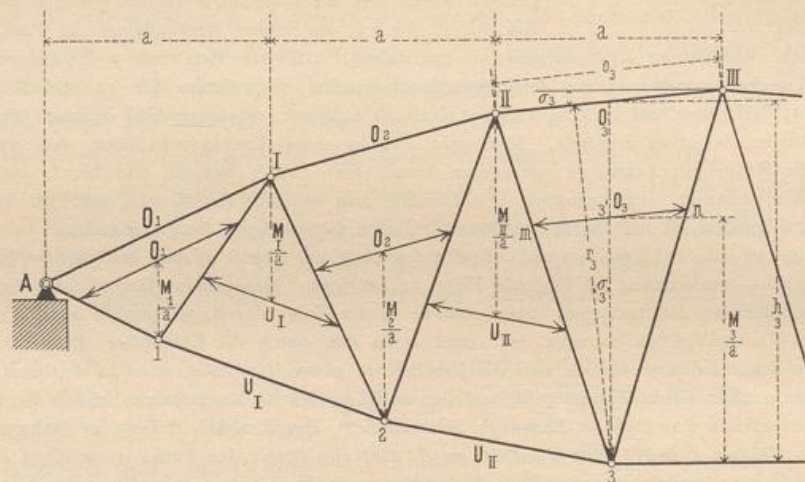
Das Vorzeichen soll zunächst unberücksichtigt gelassen und nur die absolute Größe von  $O_3$  in das Auge gefaßt werden. Alsdann ist



$$O_3 = \frac{M_3}{r_3} = \frac{M_3}{a} \frac{a}{r_3} = \frac{M_3}{a} \frac{\frac{a}{\cos \sigma_3}}{\frac{r_3}{\cos \sigma_3}}$$

Nun ist aber  $\frac{a}{\cos \sigma_3} = o_3$  gleich der Länge des Stabes *II III* der oberen Gurtung, dessen Spannung gefucht wird; ferner ist  $\frac{r_3}{\cos \sigma_3} = h_3$  gleich der Länge der lothrechten Linie, welche durch den Momentenpunkt *3* gelegt ist vom Momentenpunkt *3* bis zum Schnittpunkt mit dem Stabe *II III*. Trägt man nun  $\frac{M_3}{a}$  (d. h. eine Kraft) nach beliebigem Maßstabe auf der durch den Momentenpunkt *3* gezogenen Lothrechten ab, so sei  $33' = \frac{M_3}{a}$ ; nun ziehe man durch den Endpunkt *3'* dieser Linie eine Parallele zu dem Stabe *II III*, dessen Spannung gefucht wird; diese

Fig. 197.



Parallele schneide die nächsten Diagonalen in *m* und *n*; dann ist  $\overline{mn}$  die gefuchte Spannung in  $O_3$ , und zwar in demselben Kräftemaßstab, in welchem  $\frac{M_3}{a}$  aufgetragen ist. Denn wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke *3 II III* und *3 mn* verhält sich

$$\frac{\overline{mn}}{o_3} = \frac{33'}{h_3}, \quad \text{d. h. } \overline{mn} = o_3 \frac{33'}{h_3} = \frac{a}{\cos \sigma_3} \cdot \frac{M_3}{a} \cdot \frac{\cos \sigma_3}{r_3}$$

Dies ist aber genau der Werth, welcher oben für die Spannung  $O_3$  gefunden ist.

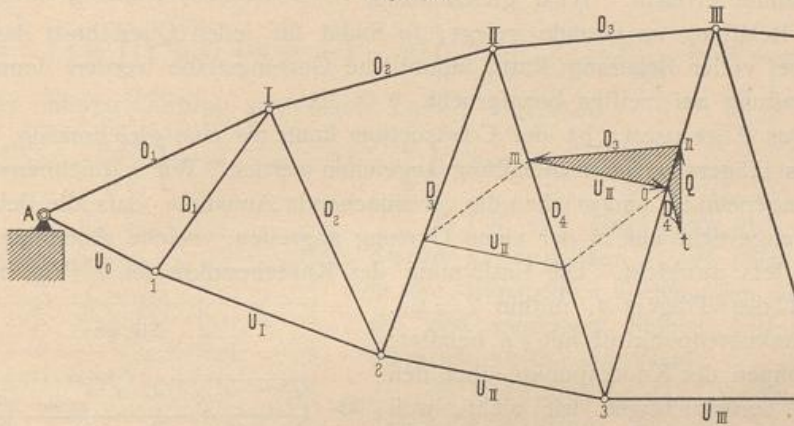
Was vom Stabe *II III* der oberen Gurtung nachgewiesen ist, gilt für alle Stäbe der oberen und unteren Gurtung. Demnach ergibt sich als Regel für die Aufindung der Gurtstab-Spannungen: Man trage von den Momentenpunkten der Gurtungsstäbe die Werthe  $\frac{M}{a}$  nach beliebigem Kraftmaßstabe aus lothrecht ab und ziehe durch die erhaltenen Endpunkte Linien parallel zu den betreffenden Gurtungsstäben; alsdann geben die zwischen den Diagonalen erhaltenen Längen dieser

Parallelen die Spannungen der Gurtungsstäbe in demselben Maßstabe an, nach welchem  $\frac{M}{a}$  aufgetragen ist.

In Fig. 197 sind für die Stäbe der oberen und unteren Gurtung die Stabspannungen nach vorstehendem Verfahren ermittelt.

Man kann nach diesem Verfahren auch die Spannungen der Gitterstäbe leicht finden. Denkt man in Fig. 198 einen Schnitt durch die Stäbe  $O_3$ ,  $U_{II}$  und  $D_4$  gelegt, so wirken auf das links von diesem Schnitt liegende Trägerstück vier Kräfte, welche mit einander im Gleichgewicht sein müssen: die Mittelkraft aller äußeren auf das Trägerstück wirkenden Kräfte, d. h. die Querkraft  $Q$ , ferner die Spannungen  $O_3$ ,  $U_{II}$ ,  $D_4$  der drei vom Schnitt getroffenen Stäbe. Für diese vier Kräfte ergibt sich demnach ein sich schließendes Kraftpolygon. Bekannt sind  $O_3$  und  $U_{II}$  nach Größe und Richtung,  $Q$  und  $D_4$  nach ihrer Richtung. Man lege  $U_{II}$  in  $m$  an  $O_3$  und ziehe durch den Endpunkt  $o$  dieser Linie die Parallele zu  $D_4$ , durch  $n$  eine Parallele zu  $Q$ ,

Fig. 198.



d. h. die Lothrechte; beide Parallelen schneiden sich in  $t$ ; alsdann ist  $ot = D_4$  und  $tn = Q$ . In Fig. 198 ist das Kraftpolygon schraffirt<sup>33)</sup>. Die Art der Beanspruchung ergibt sich, wie stets, aus dem Umlaufsinne im Kraftpolygon.

Wenn einzelne Felder in der wagrechten Projection andere Knotenpunktabstände haben, als  $a$ , so ändert dies im Grundgedanken nichts; im Einzelnen wird die Construction etwas anders. Die Werthe  $\frac{M}{a}$  kann man durch Rechnung oder durch Construction bestimmen.

2) Parallelträger mit Netzwerk oder zwei Scharen von Diagonalen.

α) Berechnung der Spannungen in den Gurtungen. Um diese Spannungen für eine beliebige Belastung zu ermitteln, bezeichnen wir die Mittelkraft aller auf das Bruchstück links vom Schnitte  $II$  (Fig. 199) wirkenden äußeren Kräfte mit  $Q$ . Für irgend einen Stab  $CE$  der oberen Gurtung ist  $F$  der Momenten- oder conjugirte Punkt, und das Moment der äußeren Kräfte in Bezug auf diesen Punkt ist  $M = Q\eta$ . Daraus folgt als Bedingungsgleichung:

$$0 = M + Xh, \text{ woraus } X = -\frac{M}{h} \dots \dots \dots 212.$$

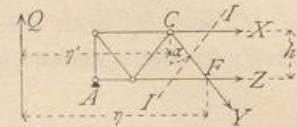
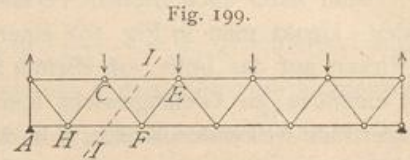
<sup>33)</sup> Daß in Fig. 198 der Endpunkt  $o$  von  $U_{II}$  auf die Diagonale  $III_3$  fällt, ist zufällig.

178.  
Berechnung  
der Gurtungs-  
spannungen.

In gleicher Weise ergibt sich für  $C$  als Momentenpunkt, wenn  $M_1$  das Moment von  $Q$  in Bezug auf  $C$  ist,

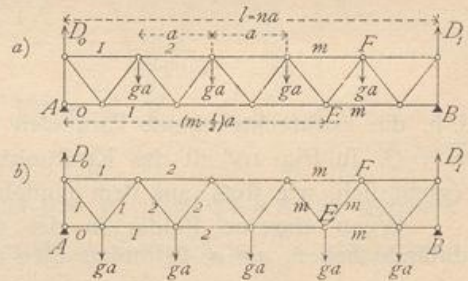
$$0 = M_1 - Zh, \text{ woraus } Z = \frac{M_1}{h} \dots \dots \dots 213.$$

Da bei einem Träger auf zwei Stützen  $M$  stets die angegebene Drehrichtung hat (stets positiv ist, vergl. Art. 156, S. 150), so folgt aus den Gleichungen 212 u. 213: Bei Trägern auf zwei Stützen werden die oberen Gurtungsstäbe stets gedrückt, die unteren Gurtungsstäbe stets gezogen. Ferner:  $X_{max}$  und  $Z_{max}$  werden bei derselben Belastung wie  $M_{max}$  stattfinden, d. h. in jedem Gurtungsstabe findet größte Beanspruchung bei derjenigen Belastung statt, bei welcher das Moment für den dem Stabe conjugirten Punkt sein Maximum erreicht. Wird gleichmäßig verteilte Belastung zu Grunde gelegt, so findet für jeden Querschnitt das größte Moment bei voller Belastung statt; sämtliche Gurtungsstäbe werden demnach bei voller Belastung am meisten beansprucht.



a) Das Eigengewicht der Construction kann als eine gleichmäßig über die Länge des Trägers verteilte Belastung angesehen werden. Wir bezeichnen es mit  $g$  für die Längeneinheit und machen die vereinfachende Annahme, dass alle Belastungen durch Eigengewicht nur in der einen Gurtung angreifen, welche Annahme für den Hochbau stets ausreicht. Die Entfernung der Knotenpunkte sei  $a$  (Fig. 200), die Felderzahl des Trägers  $n$ , mithin  $l = na$ . Jeder Mittenknotenpunkt ist mit  $ga$  belastet; die Belastungen der Knotenpunkte über den Auflagern berücksichtigen wir nicht, weil diese unmittelbar von den Auflagern aufgenommen werden.

Fig. 200.



Greifen die Lasten an der oberen Gurtung an (Fig. 200a), so ist bei der angenommenen Diagonalenanordnung der Auflagerdruck

$$D_0 = D_1 = (n - 1) \frac{g a}{2}.$$

Für den  $m$ -ten Stab der oberen Gurtung ist  $E$  der Momentenpunkt und

$$M = D_0 \left( m - \frac{1}{2} \right) a - (m - 1) g a \left( \frac{m - 2}{2} a + \frac{a}{2} \right);$$

$$M = \frac{g a^2}{2} \left[ (n + 1) \left( m - \frac{1}{2} \right) - m^2 \right];$$

$$X_m^s = - \frac{g a^2}{2 h} \left[ (n + 1) \left( m - \frac{1}{2} \right) - m^2 \right] \dots \dots \dots 214.$$

Für den  $m$ -ten Stab der unteren Gurtung ist  $F$  der Momentenpunkt und

$$M_1 = D_0 m a - (m - 1) g a \frac{m a}{2} = \frac{g a^2}{2} m (n - m);$$

$$Z_m^s = \frac{g a^2}{2 h} m (n - m) \dots \dots \dots 215.$$

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an (Fig. 200 b), so ist

$$D_0 = D_1 = \frac{n g a}{2}.$$

Genau wie oben erhält man

$$X_m^g = -\frac{g a^2}{2 h} \left[ m(n - m + 1) - \frac{n}{2} \right] \quad \text{und} \quad Z_m^g = \frac{g a^2}{2 h} m(n - m). \quad 216.$$

Wenn die Diagonalen eine andere Richtung haben, so daß die erste vom Auflagerpunkt nach der Mitte ansteigt, so ergeben sich etwas andere Formeln, die auf gleiche Weise, wie eben gezeigt, zu ermitteln sind.

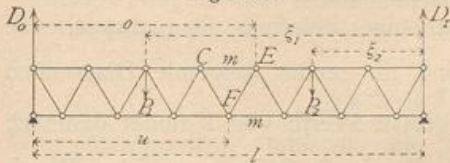
b) Die größten Gurtungsspannungen in Folge gleichmäÙig vertheilter Nutzlast finden statt, wenn der ganze Träger belastet ist. Nennt man die gleichmäÙig vertheilte Nutzlast für die Längeneinheit  $p$ , so ergeben sich offenbar für diese Belastung, die für den Knotenpunkt gleich  $p a$  ist, genau dieselben Formeln, wie für das Eigengewicht, wobei nur  $g$  durch  $p$  zu ersetzen ist. Man erhält also für an der oberen Gurtung angreifende Lasten (Fig. 200 a)

$$X_m^p = -\frac{p a^2}{2 h} \left[ (n + 1) \left( m - \frac{1}{2} \right) - m^2 \right] \quad \text{und} \quad Z_m^p = \frac{p a^2}{2 h} m(n - m), \quad 217.$$

für an der unteren Gurtung angreifende Lasten (Fig. 200 b)

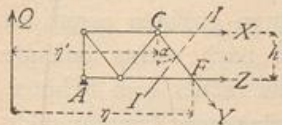
$$X_m^p = -\frac{p a^2}{2 h} \left[ m(n - m + 1) - \frac{n}{2} \right] \quad \text{und} \quad Z_m^p = \frac{p a^2}{2 h} m(n - m). \quad 218.$$

Fig. 201.



c) Für eine Belastung des Trägers durch Einzellasten  $P_1, P_2$  (Fig. 201) sind in die allgemeinen Gleichungen 212 u. 213 die den einzelnen Stäben entsprechenden Momentenwerthe einzusetzen.

Fig. 202.

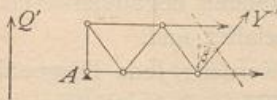


β) Berechnung der Spannungen in den Gitterstäben. Für eine beliebige Belastung sei  $Q$  die Mittelkraft aller links vom Schnitte  $II$  (Fig. 202) wirkenden äußeren Kräfte. Nennt man die Spannung der vom Schnitte getroffenen, nach rechts fallenden Diagonale  $Y$ , so muß, weil die algebraische Summe der auf das Bruchstück wirkenden lothrechten Kräfte gleich Null ist, stattfinden:

$$0 = Q - Y \cos \alpha, \quad \text{woraus} \quad Y = \frac{Q}{\cos \alpha}. \quad 219.$$

für eine nach rechts steigende Diagonale (Fig. 203) ist

Fig. 203.



$$0 = Q' + Y' \cos \beta, \quad \text{woraus} \quad Y' = -\frac{Q'}{\cos \beta}. \quad 220.$$

a) Das Eigengewicht erzeugt, wenn die Lasten an der oberen Gurtung angreifen, den Auflagerdruck (Fig. 200 a)

$$D_0 = D_1 = (n - 1) \frac{g a}{2}.$$

Für den  $m$ -ten nach rechts fallenden Stab ist

$$Q_m = (n - 1) \frac{g a}{2} - (m - 1) g a = \frac{g a}{2} (n - 2m + 1),$$

179-  
Berechnung  
der  
Gitterstäb-  
spannungen.

fonach

$$Y_m^g = \frac{g a}{2 \cos \alpha} (n - 2m + 1); \dots \dots \dots 221.$$

für den  $m$ -ten nach rechts steigenden Stab ist

$$Q'_m = \frac{g a}{2} (n - 2m + 1), \text{ daher } Y'_m^g = - \frac{g a}{2 \cos \beta} (n - 2m + 1) \dots 222.$$

Aus den Gleichungen 221 u. 222 für  $Y_m^g$  und  $Y'_m^g$  folgt leicht: Bei gleichmäÙig über den Träger vertheilter Belastung  $g$  (oder  $p$ ) auf die Längeneinheit werden die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen gedrückt.

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an (Fig. 200 b), so ist für die  $m$ -te rechts fallende Diagonale

$$Y = \frac{g a}{2 \cos \alpha} (n - 2m + 2), \dots \dots \dots 223.$$

für die  $m$ -te rechts steigende Diagonale

$$Y' = - \frac{g a}{2 \cos \beta} (n - 2m) \dots \dots \dots 224.$$

Das Gesetz, daß bei dieser Belastungsart die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen gedrückt werden, ist auch hier gültig.

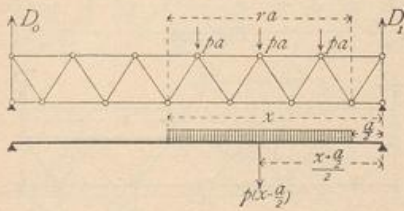
b) Um die ungünstigsten Gitterstabspannungen, welche in Folge der Nutzlast entstehen, zu ermitteln, erwäge man, daß bei beliebiger Belastung für rechts fallende Diagonalen nach Gleichung 219:  $Y = \frac{Q}{\cos \alpha}$  und für rechts steigende Diagonalen nach Gleichung 220:  $Y' = - \frac{Q'}{\cos \beta}$  ist. Der größte Werth von  $Y$  findet demnach bei derjenigen Belastung statt, bei welcher die Querkraft  $Q$  ihren größten Werth hat. Nach Art. 155 (S. 148) hat aber die Querkraft für einen Querschnitt ihren größten positiven Werth, wenn der Trägertheil rechts vom betrachteten Querschnitte belastet, der Trägertheil links davon unbelastet ist, ihren größten negativen Werth bei der umgekehrten Belastung. Daraus folgt: Jede nach rechts fallende Diagonale erleidet den größten Zug durch Nutzlast, wenn die rechts vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte belastet, die links vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte unbelastet sind; dagegen den größten Druck, wenn die links vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte belastet, die übrigen unbelastet sind. Da  $Y' = - \frac{Q'}{\cos \beta}$ , so findet in den nach rechts steigenden Diagonalen der größte Druck statt, wenn  $Q'$  seinen größten positiven Werth hat, wenn also nur die Knotenpunkte rechts vom Schnitte belastet sind, der größte Zug dagegen, wenn  $Q'$  seinen größten negativen Werth hat, wenn also nur die Knotenpunkte links vom Schnitte belastet sind.

Allgemeiner kann die Regel wie folgt ausgesprochen werden: Jede Diagonale erleidet den größten Zug, wenn nur die Knotenpunkte zwischen ihrem Fußpunkte und demjenigen Auflager, nach welchem dieser Fußpunkt zeigt, belastet sind; jede Diagonale erleidet den größten Druck, wenn nur die Knotenpunkte zwischen ihrem Kopfpunkte und demjenigen Auflager belastet sind, nach welchem dieser Kopfpunkt hinweist. Dieser Satz gilt allgemein, ob die Lastpunkte an der oberen oder unteren Gurtung liegen. Daraus folgt, daß für die Diagonalen nicht die volle, sondern die

theilweise Belaftung die ungünstigste ist und dafs man demnach auch im Hochbau, falls einseitige Belaftung möglich ist (in Verfammlungsräumen, Schulen etc.), bei der Berechnung der Träger auf dieselbe Rückficht nehmen mufs. Für jede Diagonale ist eine andere ungünstigste Belaftung einzuführen.

Nachdem nunmehr die ungünstigsten Belaftungsarten für die einzelnen Stäbe ermittelt sind, handelt es sich um die Auffuchung der durch dieselben erzeugten positiven, bezw. negativen Gröfstwerthe von  $Y$  und  $Y'$ . Greifen die Lasten an der oberen Gurtung an (Fig. 204), so ist  $Q$  genau eben so grofs, als wenn beim vollwandigen Träger die Einzellaften  $pa$  je auf die Längen  $a$  gleichmäfsig vertheilt wären, d. h. als wenn die Last  $p$  für die Längeneinheit von der Mitte des äufsersten Feldes am

Fig. 204.



rechten, bezw. linken Auflager bis zur Mitte desjenigen Feldes der oberen Gurtung vorgerückt ist, dem die Diagonale angehört. Denn im ersten Falle ist, wenn  $r$  belaftete Knotenpunkte vorhanden sind,

$$D_0 = \frac{rap}{l} \left( \frac{ra}{2} + \frac{a}{2} \right) = \frac{rapa^2}{2l} (r+1),$$

und da  $x = ra + \frac{a}{2} = a \left( r + \frac{1}{2} \right)$ , also  $x + \frac{a}{2} = a(r+1)$  ist, so wird

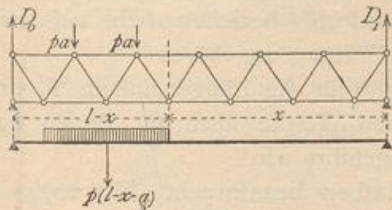
$$D_0 = \left( x + \frac{a}{2} \right) \frac{rap}{2l} = \frac{p}{2l} \left( x + \frac{a}{2} \right) \left( x - \frac{a}{2} \right) = \frac{p}{2l} \left[ x^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right].$$

Derselbe Werth ergibt sich für den vollwandigen Träger in Fig. 204, nämlich

$$D_0 = \frac{p}{2l} \left( x - \frac{a}{2} \right) \left( x + \frac{a}{2} \right).$$

Dies gilt allgemein, falls die den Auflagern zunächst liegenden Knotenpunkte der mit der Nutzlast belafteten Gurtung um eine ganze Feldweite von den Auflagern abliegen.

Fig. 205.



Nun ist für diejenigen Diagonalen, für welche die gezeichnete Belaftung den grössten Zug, bezw. grössten Druck erzeugt,  $Q_{max} = D_0$ , also auch

$$Q_{xmax} = \frac{p}{2l} \left[ x^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right],$$

daher nach Gleichung 219

$$Y_{max} = \frac{p}{2l \cos \alpha} \left[ x^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right] \dots \dots \dots 225.$$

In gleicher Weise ergibt sich nach Fig. 205

$$D_0 = \frac{p \left( l - x - \frac{a}{2} \right)}{l} \left( x + \frac{l - x - \frac{a}{2}}{2} \right) = \frac{p}{2l} \left[ \left( l - \frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right];$$

$$Q_{xmin} = \frac{p}{2l} \left[ \left( l - \frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right] - p \left( l - \frac{a}{2} - x \right) = - \frac{p}{2l} \left[ (l-x)^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right],$$

und

$$Y_{min} = - \frac{p}{2l \cos \alpha} \left[ (l-x)^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right] \dots \dots \dots 226.$$

Dem entsprechend wird

$$Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos \beta} = -\frac{p}{2l \cos \beta} \left[ x^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right], \dots \dots \dots 227.$$

$$Y'_{max} = -\frac{Q_{min}}{\cos \beta} = \frac{p}{2l \cos \beta} \left[ (l-x)^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right] \dots \dots \dots 228.$$

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an (Fig. 206), so ist (wenn mit ganz geringem Fehler die Belastung der beiden den Auflagern zunächst liegenden Knotenpunkte gleichfalls mit  $pa$  eingeführt wird)  $Q_{max}$ , bzw.  $Q_{min}$  eben so groß, wie bei einem vollwandigen Träger, bei welchem die Last  $p$  für die Längeneinheit vom rechten. bzw. linken Auflager aus bis zur Mitte desjenigen Feldes der unteren Gurtung vorgerückt ist, welchem die Diagonale angehört. Der Beweis ist in gleicher Weise, wie oben, zu führen und gilt allgemein, falls die den Auflagern zunächst liegenden Knotenpunkte der mit Nutzlast belasteten Gurtung um eine halbe Feldweite von den Auflagern entfernt sind. Demnach ist

$$Q_{max} = \frac{p x^2}{2l} \quad \text{und} \quad Q_{min} = -\frac{p (l-x)^2}{2l}.$$

$x$  bedeutet in diesen Gleichungen den Abstand der Mitte desjenigen Feldes der unteren Gurtung vom rechten Auflager, zu welchem die Diagonale gehört.

Man erhält

$$Y_{max} = \frac{p x^2}{2l \cos \alpha} \quad \text{und} \quad Y_{min} = -\frac{p (l-x)^2}{2l \cos \alpha}, \dots \dots \dots 229.$$

$$Y'_{min} = -\frac{p x^2}{2l \cos \beta} \quad \text{und} \quad Y'_{max} = \frac{p (l-x)^2}{2l \cos \beta} \dots \dots \dots 230.$$

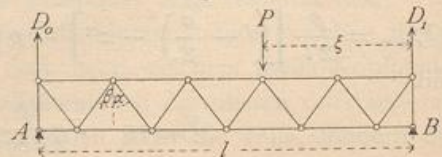
Die zusammengehörigen Werthe von  $Y$  und  $Y'$  beziehen sich auf zwei Diagonalen, welche demselben Felde der unteren Gurtung angehören.

c) Erfährt der Träger eine volle Belastung  $p$  für die Längeneinheit, so sind die unter  $a$  für Eigengewichtsbelastung gefundenen Werthe auch für diesen Fall gültig, wenn statt des dortigen  $g$  die Größe  $p$  eingeführt wird.

d) Wird endlich der Träger durch Einzellaften beansprucht (Fig. 207), so erzeugt die Last  $P$  im Abstände  $\xi$  von  $B$  den Stützendruck  $D_0 = \frac{P\xi}{l}$ . In sämtlichen rechts fallenden Diagonalen links vom Lastpunkt wird dann  $Y = \frac{D_0}{\cos \alpha} = \frac{P\xi}{l \cos \alpha}$ ; in sämtlichen rechts steigenden Diagonalen links vom Lastpunkte ist  $Y' = -\frac{P\xi}{l \cos \beta}$ .

Eben so ist für alle Querschnitte rechts vom Lastpunkte  $Q = D_0 - P = -\frac{P(l-\xi)}{l}$ , mithin für die nach rechts fallenden Diagonalen dieser Strecke  $Y_1 = -\frac{P(l-\xi)}{l \cos \alpha}$ , für die nach rechts steigenden Diagonalen dieser Strecke  $Y'_1 = \frac{P(l-\xi)}{l \cos \beta}$ . Daraus folgt die

Fig. 207.

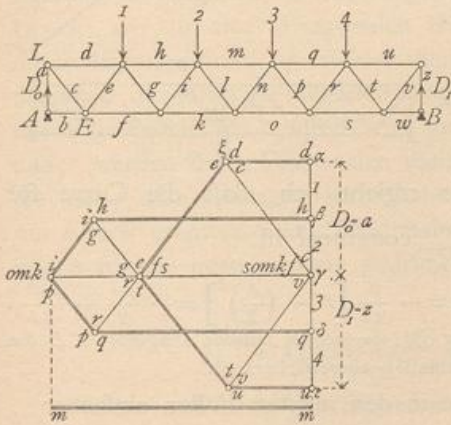


Regel: Die nach dem Lastpunkte zu fallenden Diagonalen werden gezogen, die nach demselben steigenden Diagonalen werden gedrückt.

γ) Graphische Ermittlung der Spannungen. Setzt man zunächst eine gleichmäßig vertheilte Belastung (Eigengewicht, bezw. volle Nutzlast) voraus, so macht es für das Verfahren keinen Unterschied, ob die Lasten an der oberen oder an der unteren Gurtung angreifen. Wenn in jedem Knotenpunkte, z. B. der oberen Gurtung (Fig. 208), die Belastung  $ga$ , bezw.  $pa$  wirkt, so empfiehlt sich für die Ermittlung der Spannungen die Vieleckmethode, weil dieselbe sämtliche Stabspannungen in einem Linienzuge giebt.

180.  
Graphische  
Ermittlung  
der  
Spannungen.

Fig. 208.



Nachdem  $D_0$  und  $D_1$  auf bekannte Art gefunden sind, trägt man alle äußeren Kräfte  $1, 2, 3, 4, D_1$  und  $D_0$  in der Reihenfolge der Knotenpunkte an einander. Es sei  $\alpha\beta = 1, \beta\gamma = 2, \gamma\delta = 3, \delta\varepsilon = 4$ ; nun trägt man an  $\varepsilon$  (den Endpunkt von  $4$ )  $D_1 = \varepsilon\gamma$  und  $D_0 = \gamma\alpha$ . Damit schließt sich das Kraftpolygon der äußeren Kräfte. Wir gehen nun von demjenigen Knotenpunkte, in welchem sich nur 2 Stäbe schneiden, d. h. von  $A$  aus. In  $A$  wirken  $D_0, a$  und  $b$ ; die Zerlegung von  $D_0$  in die beiden Componenten  $a$  und  $b$  ergibt  $a = D_0$  und  $b = 0$ . Im Knotenpunkte  $L$  wirken jetzt  $a, c$  und  $d$ . Bei der Zerlegung von  $a (= \gamma\alpha)$  ist zu beachten, daß die Parallele zum Randstabe  $d$  durch den Punkt im Kraftpolygon gehen muß, der zwischen  $D_0$  und  $1$  liegt, d. h. durch  $\alpha$ . Man erhält  $\alpha\xi = d$  und  $\xi\gamma = c$ . (Nach

Art. 175, S. 171 ist  $d$  Druck und  $c$  Zug.) Geht man nun zum Knotenpunkte  $E$  über, so wirken daselbst ( $b = 0$ )  $c, e$  und  $f$ ; bekannt ist  $c = \gamma\xi$ . Demnach sind  $e$  und  $f$  durch Zerlegung zu ermitteln, wobei die Parallele zum Randstabe  $f$  durch den Punkt  $\gamma$  im Kraftpolygon gehen muß, welcher zwischen  $D_1$  und  $D_0$  liegt, da der Randstab  $f$  im System sich zwischen den Kräften  $D_0$  und  $D_1$  befindet. Man erhält leicht  $e$  und  $f$ . (Da  $c$ , wie oben gefunden, Zug ist, erhält  $e$  Druck,  $f$  Zug.) Geht man so weiter, so ergibt sich der in Fig. 208 gezeichnete Kräfteplan. Darin sind die Druckspannungen durch doppelte, die Zugspannungen durch einfache Linien bezeichnet;  $m$  ist Druck, fällt aber mit einer Anzahl von Zugspannungen zusammen und ist deshalb besonders herausgezeichnet. Die Endpunkte der Stabspannungen sind stets durch diejenigen Buchstaben bezeichnet, welche die bezüglichen Stäbe im System führen. Die Spannungen  $b, l, n, w$  werden gleich Null.

Um die größten in den Gitterstäben durch die Nutzlasten erzeugten Zug-, bezw. Druckspannungen zu bestimmen, beachte man, daß  $Y_{max} = \frac{Q_{max}}{\cos \alpha}, Y_{min} = \frac{Q_{min}}{\cos \alpha}, Y'_{max} = -\frac{Q_{min}}{\cos \beta}$  und  $Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos \beta}$  ist.

Wenn die Lasten  $pa$  an der oberen Gurtung angreifen oder allgemein, wenn die den Auflagern zunächst gelegenen Knotenpunkte der belasteten Gurtung von diesen um eine ganze Feldweite  $a$  abliegen, so ist

$$Q_{max} = \frac{p}{2l} \left[ x^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right] \dots \dots \dots 231.$$

Die graphische Darstellung von  $Q_{max}$  ergibt eine Parabel (Fig. 209a).

Für  $x = 0$  wird  $Q_{max} = -\frac{pa^2}{8l}$ ; für  $x = l$  wird  $Q_{max} = \frac{pl}{2} \left[ l^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right] = \frac{pl}{2} - \frac{pa^2}{8l}$ .

$Q_{max}$  wird Null für  $x = \frac{a}{2}$ ; die Curve hat ein Minimum für  $0 = 2x$ , d. h. für  $x = 0$ . Danach ist die Curve in Fig. 209a construirt.

In der Gleichung für  $Q_{max}$  bedeutet  $x$  den Abstand des Endes der Nutzlast vom rechten Auflager; diese Belastung ist die ungünstigste für die Diagonalen, deren Fußpunkte in demselben Abstände vom





Für eine Einzellaft wird die Ermittlung der Spannungen bequem mittels des *Cremona'schen* Kräfteplans vorgenommen, wie in Fig. 211 geschehen ist; dieselbe ist ohne Weiteres verständlich.

δ) Art der Beanspruchung der Stäbe bei einem Träger auf zwei Stützen. Nach Art. 178 (S. 175) werden die oberen Gurtungsstäbe stets gedrückt, die unteren stets gezogen. Die Diagonalen erhalten verschiedene Beanspruchungen. Durch das Eigengewicht erhalten die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen Zug, die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen Druck; durch die ungünstigste Nutzlast erhalten im Allgemeinen alle Diagonalen sowohl Zug, wie Druck. Wenn der größte Druck, der in einer Diagonalen durch Nutzlast entsteht, kleiner ist, als der Zug durch Eigengewicht, so erleidet die Diagonale nur Zug, umgekehrt nur Druck. Für die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen nahe dem Auflager ist der Zug in Folge des Eigengewichtes meistens viel größer, als der größte Druck durch Nutzlast, und daher werden diese Diagonalen meistens nur gezogen. Eben so ergibt sich, daß die nahe dem Auflager befindlichen, nach der Mitte zu ansteigenden Diagonalen nur Druck erhalten. Die Diagonalen im mittleren Theile des Trägers werden dagegen sowohl gezogen, wie gedrückt.

181.  
Art  
der Stab-  
beanspruchung.

3) Parallelträger mit Diagonalen und Pfofen.

α) Berechnung der Spannungen in den Gurtungen. Für eine beliebige Belastung wird genau so, wie in Art. 178 (S. 175), wenn  $M$  das Biegemoment für den zu einem oberen Gurtungsstabe gehörigen Momentenpunkt,  $M'$  das Biegemoment für den zu einem unteren Gurtungsstabe gehörigen Momentenpunkt bezeichnet,

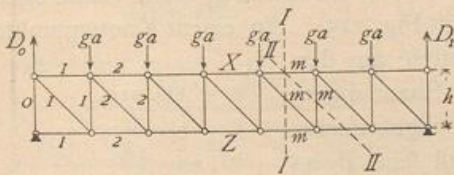
182.  
Berechnung  
der  
Gurtungs-  
spannungen.

$$X = -\frac{M}{h} \quad \text{und} \quad Z = \frac{M'}{h} \quad \dots \quad 233.$$

Auch hier findet also die größte Beanspruchung der Gurtungsstäbe bei voller Belastung des Trägers statt.

Für die Belastung durch Eigengewicht, bzw. volle gleichmäßig vertheilte Nutzlast (Fig. 212) ist die Spannung in den Gurtungsstäben davon unabhängig, ob die Lasten an der oberen oder an der unteren Gurtung angreifen.

Fig. 212.



Für den  $m$ -ten Stab der oberen, bzw. der unteren Gurtung erhält man die durch das Eigengewicht  $g$  für die Längeneinheit erzeugten Spannungen

$$X_g = -\frac{g a^2 m (n - m)}{2 h} \quad \text{und} \quad Z_g = \frac{g a^2}{2 h} (m - 1) (n - m + 1) \quad \dots \quad 234.$$

und die durch volle Nutzlast  $p$  für die Längeneinheit erzeugten Spannungen

$$X_p = -\frac{p a^2 m (n - m)}{2 h} \quad \text{und} \quad Z_p = \frac{p a^2}{2 h} (m - 1) (n - m + 1) \quad \dots \quad 235.$$

$X_p$  und  $Z_p$  sind zugleich die größten Spannungen, die durch Nutzlast hervorgebracht werden.

183.  
Berechnung  
der  
Gitterstäbs-  
spannungen.

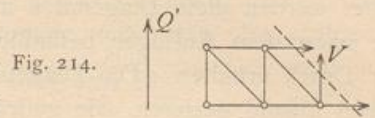
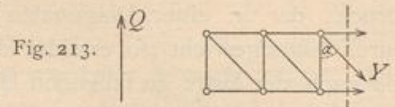
β) Berechnung der Spannungen in den Gitterstäben. Für das Bruchstück in Fig. 213 sei bei beliebiger Belastung die Querkraft  $Q$ ; alsdann ist für die Spannung in der Diagonalen

$$Y \cos \alpha = Q, \text{ woraus } Y = \frac{Q}{\cos \alpha} \dots \dots \dots 236.$$

Ist in Fig. 214 für das Bruchstück die Querkraft  $Q'$ , so ist die Spannung im Pfoften

$$V = -Q' \dots \dots \dots 237.$$

Für die Diagonalen ist es, da der Schnitt lothrecht gelegt werden kann, gleichgiltig, ob die Last in der oberen oder unteren Gurtung liegt; für die Pfoften dagegen ergibt sich, da der Schnitt bei diesen schräg gelegt wird, ein anderes  $Q'$ , wenn die Last oben, als wenn sie unten liegt.



a) Das Eigengewicht erzeugt (Fig. 212) in der  $m$ -ten Diagonale (Schnitt  $II$ ) die Querkraft

$$Q_m = D_0 - (m - 1) g a = \frac{g a}{2} (n - 2m + 1) \text{ und}$$

$$Y_m^s = \frac{Q_m}{\cos \alpha} = \frac{g a}{2 \cos \alpha} (n - 2m + 1) \dots \dots \dots 238.$$

Den selben Ausdruck fanden wir in Art. 179 (S. 178), Gleichung 221, für die beim Netzwerk rechts fallenden Diagonalen. Die in Bezug auf Zug und Druck dort gefundenen Ergebnisse gelten demnach auch hier: Die nach der Mitte fallenden Diagonalen erhalten durch das Eigengewicht Zug; die nach der Mitte steigenden Diagonalen erhalten Druck.

Für die Ermittlung der Spannungen in den Pfoften ist zu unterscheiden, ob sich die Lastpunkte oben oder unten befinden. Im ersteren Falle (Fig. 212) ist

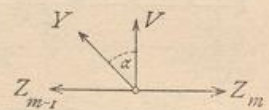
$$V_m = -Q_m = -\frac{g a}{2} (n - 2m + 1), \dots \dots \dots 239.$$

im zweiten Falle

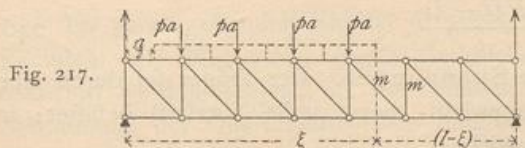
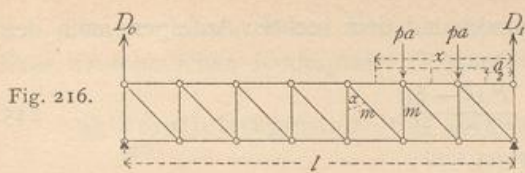
$$V'_m = -Q'_m = -\frac{g a}{2} (n - 1 - 2m) \dots \dots \dots 240.$$

Die Art der Beanspruchung ergibt sich durch Betrachtung eines beliebigen Knotenpunktes an der nicht belasteten Gurtung (Fig. 215). An einem Knotenpunkte der unteren Gurtung wirken, wenn die Lasten an der oberen Gurtung angenommen werden, nur die Spannungen der Stäbe, welche sich an ihm treffen. Die algebraische Summe aller lothrechten Seitenkräfte muß Null sein, d. h. es muß  $0 = Y \cos \alpha + V$ , also  $V = -Y \cos \alpha$  sein. Hieraus folgt der Satz: Pfoften- und Diagonalspannung am Knotenpunkte der nicht belasteten Gurtung haben entgegengesetzte Beanspruchung; die Belastung, welche in einer Diagonalen Zug erzeugt, erzeugt in demjenigen Pfoften, welcher mit ihr an einem Knotenpunkte der nicht belasteten Gurtung zusammentrifft, Druck und umgekehrt.

Fig. 215.



b) Für die ungünstigste Beanspruchung der Gitterstäbe, welche durch die Nutzlast hervorgerufen wird, ergibt sich bezüglich der Diagonalen durch dieselbe Beweisführung, wie in Art. 179 (S. 178), die gleiche Regel wie dort. Für die Pfoften



ergibt sich zugleich aus dem Schlusssatze unter  $\alpha$ : Jeder Pfosten erhält seinen größten Druck (bezw. Zug) bei derjenigen Belastung, bei welcher die mit ihm an einem unbelasteten Knotenpunkte zusammentreffende Diagonale ihren größten Zug (bezw. Druck) erhält.

Wirken die Lasten an der oberen Gurtung, so ergeben sich die Werthe für die Spannungen, wenn wir wiederum zur Ermittlung von  $Q$  die Knotenpunktsbelastungen durch gleichförmig vertheilte Lasten ersetzt denken, wie folgt. Für das Maximum von  $Y_m$  und das Minimum von  $V_m$  ergibt sich nach Fig. 216 der Auflagerdruck

Sonach

$$D_0 = \frac{p \left( x - \frac{a}{2} \right)}{2l} \left( x + \frac{a}{2} \right) = \frac{p}{2l} \left[ x^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right] = Q_m.$$

$$Y_{m_{max}} = \frac{p}{2l \cos \alpha} \left[ x^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right] \quad \text{und} \quad V_{m_{min}} = - \frac{p}{2l} \left[ x^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right]. \quad 241.$$

Für  $Y_{min}$  und  $V_{max}$  findet man nach Fig. 217

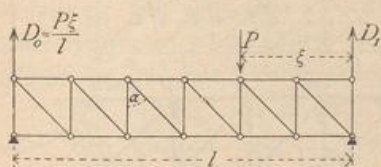
$$Q = - \frac{p}{2l} \left[ \xi^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right];$$

$$Y_{m_{min}} = - \frac{p}{2l \cos \alpha} \left[ (l-x)^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right] \quad \text{und} \quad V_{m_{max}} = + \frac{p}{2l} \left[ (l-x)^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right]. \quad 242.$$

$x$  bedeutet den Abstand der Mitte desjenigen Feldes, zu dem die Diagonale gehört, vom rechten Auflager; bei den Pfosten die Mitte des Feldes, zu welchem diejenige Diagonale gehört, die mit dem Pfosten an einem Knotenpunkte der nicht belasteten Gurtung zusammentrifft (hier also der unteren Gurtung).

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an, so stimmen die Formeln für die Diagonalen genau mit den eben entwickelten; auch diejenigen für die Pfosten, wenn man beachtet, daß  $x$  den soeben erwähnten Werth hat, daß sich also  $x$  hier auf die Mitte des Feldes bezieht, zu dem die Diagonale gehört, welche sich mit dem Pfosten an einem Knotenpunkte der oberen Gurtung schneidet; statt  $V_m$  ist also dann  $V_{m-1}$  zu setzen.

Fig. 218.



c) Wenn der Träger durch eine Einzellast belastet wird (Fig. 218), so erhält jede Diagonale zwischen dem Lastpunkt und dem linken Auflager, nach welchem hier die Diagonalen steigen, einen Zug

$$Y = \frac{P \xi}{l \cos \alpha}, \dots \dots \dots 243.$$

jeder Pfosten auf dieser Seite der Last einen Druck

$$V = - \frac{P \xi}{l} \dots \dots \dots 244.$$

Jede Diagonale zwischen dem Lastpunkt und dem rechten Auflager, nach dem die Diagonalen hier fallen, erhält einen Druck

$$Y = - \frac{P(l - \xi)}{l \cos \alpha}, \dots \dots \dots 245.$$

jeder Pfosten auf dieser Seite einen Zug

$$V = \frac{P(l - \xi)}{l} \dots \dots \dots 246.$$

184.  
Graphische  
Ermittlung  
der  
Spannungen.

γ) Graphische Ermittlung der Spannungen. Der Träger sei durch eine gleichmäßig vertheilt Last (Eigengewicht, bzw. volle Nutzlast) belastet; in jedem Knotenpunkte der oberen Gurtung wirke die Last  $ga$ , bzw.  $pa$ . Hiernach ist in Fig. 219 der Kräfteplan nach dem *Cremona'schen* Verfahren gezeichnet, worüber weitere Bemerkungen unnöthig sind.

Wenn die Zeichnung für eine Belastung  $g$  auf die Längeneinheit contruirt ist, so geben die Längen der einzelnen Linien auch zugleich die Beanspruchungen für die Belastung  $p$  auf die Längeneinheit, falls dieselben nur auf einem Maßstabe abgegriffen werden, auf welchem diejenige Länge  $pa$  bedeutet, welche vorher  $ga$  bedeutet hatte.

Sind die Maximalspannungen in den Gitterstäben, welche durch Verkehrslast erzeugt werden, zu bestimmen, so ergibt die Vergleichung der in Art. 183 (S. 185) für  $Y_{max}$  und  $V_{max}$  gefundenen Werthe mit den in Art. 179 (S. 177) für den Parallelträger mit Netzwerk gefundenen Werthen für  $Y$  und  $Q$  die genaue Uebereinstimmung beider, falls  $x$  den in Art. 183 (S. 185) angegebenen Werth hat.

Die unten stehende Curve (Fig. 220) ergibt demnach die Werthe für  $Q_{max}$ , so wie  $Q_{min}$  und damit, wie gezeichnet, leicht die Werthe für  $Y$  und  $V$ . Der für  $V_{3min}$

Fig. 219.

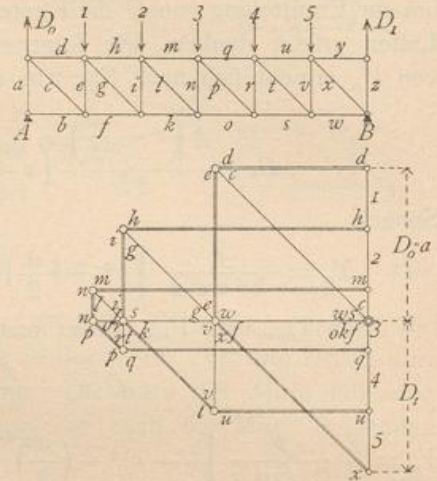


Fig. 220.

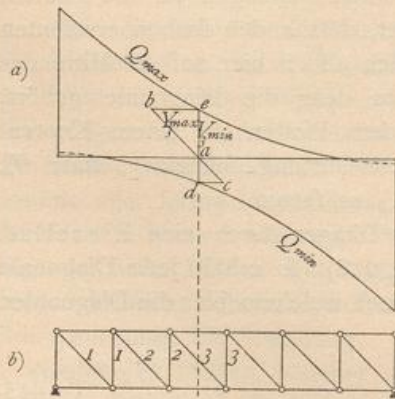
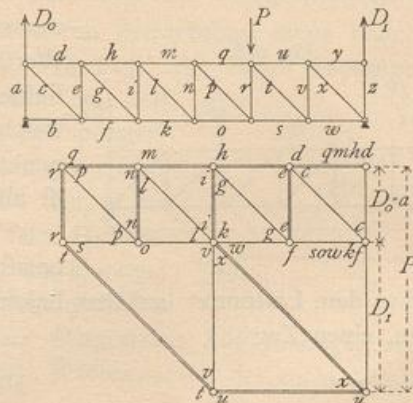


Fig. 221.



angegebene Werth entspricht einer Belastung der oberen Gurtung. Auch hier kann ohne merklichen Fehler an Stelle der Curve in Fig. 220 a diejenige in Fig. 210 a gesetzt werden.

Sämmtliche durch eine Einzellaft erzeugten Spannungen werden leicht mittels eines *Cremona'schen* Kräfteplanes (Fig. 221) ermittelt.

4) Parallelträger mit nur gezogenen, bzw. nur gedrückten Diagonalen.

Im vorhergehenden Kapitel ist gezeigt worden, daß die gedrückten Stäbe mit Rücksicht auf Widerstand gegen Zerknicken unter Umständen wesentlich stärker konstruirt werden müssen, als die einfache Druckbeanspruchung erfordert. Bei der Bestimmung der Querschnittsgröße sind vielfach Zuschläge zu machen, welche bei den gezogenen Stäben nicht nöthig sind. Man hat deshalb bei gewissen Baustoffen, besonders bei Schmiedeeisen und Flusseisen, die Verwendung gedrückter Stäbe möglichst beschränkt und statt derselben, wenn möglich, gezogene angeordnet. Wo aber gedrückte Stäbe nicht entbehrt werden können, empfiehlt es sich, die kürzeren Stäbe als gedrückte, die längeren als gezogene auszuführen. Bei manchen Baustoffen hingegen, insbesondere beim Holz, macht die Anordnung der Verbindungen eine möglichst geringe Verwendung von Zugstäben und eine möglichst ausgedehnte Verwendung von Druckstäben wünschenswerth.

Bei den Trägern mit Fachwerk ist die Anordnung von nur gezogenen, bzw. nur gedrückten Diagonalen möglich.

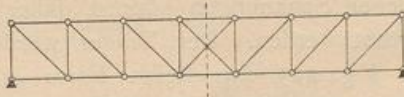
Wir betrachten zunächst die Träger mit nur gezogenen Diagonalen.

Wie in Art. 183 (S. 184) nachgewiesen ist, erzeugt das Eigengewicht, so wie auch eine gleichmäßige Belastung aller Knotenpunkte in den nach der Mitte fallenden Diagonalen Zug, in den nach der Mitte steigenden Diagonalen Druck. Soll also durch die angegebene Belastung, welche für den Hochbau weitaus die wichtigste ist, in den Diagonalen nur Zug entstehen, so ordnet man nur nach der Mitte fallende Diagonalen an, konstruirt also den Träger genau symmetrisch zur Mitte (Fig. 222).

Fig. 222.



Fig. 223.



Ist die Felderzahl ungerade, so erhalten die Diagonalen im Mittelfelde bei dieser Belastung den Zug und Druck Null (Fig. 223). Bei dieser Trägerform erhalten je zwei symmetrisch zur Mitte liegende Stäbe gleiche Spannungen; dieselben wurden früher für die eine Hälfte gefunden und sind demnach leicht zu übertragen.

Die in Fig. 222 u. 223 gezeichneten Diagonalen erhalten aber durch nicht über den ganzen Träger ausgedehnte Belastungen unter Umständen Druckbeanspruchungen, und zwar findet, wie in Art. 179 (S. 178) u. 183 (S. 184) ermittelt, in einer Diagonalen der größte Druck statt, wenn die Knotenpunkte vom Kopf der Diagonalen bis zu demjenigen Auflager, nach welchem der Kopf der Diagonalen hinweist, belastet, die übrigen Knotenpunkte aber unbelastet sind. Durch das stets noch vorhandene Eigengewicht findet andererseits in den Diagonalen eine beständige Zugspannung statt, welche die erwähnte Druckbeanspruchung vermindert. Diejenigen Diagonalen nun, bei denen (beides absolut genommen) die Zugspannung durch das Eigengewicht größer ist, als die größtmögliche Druckspannung in Folge der Verkehrslast, werden stets gezogen, nie gedrückt. Bei denjenigen Diagonalen

185.  
Grundsatz.186.  
Träger  
mit nur  
gezogenen  
Diagonalen.

dagegen, welche durch das Eigengewicht einen geringeren Zug erhalten, als ungünstigstenfalls der Druck durch Nutzlast beträgt (wiederum beides absolut genommen), wird eine Druckbeanspruchung eintreten, die zu vermeiden ist. Man bringt deshalb im betreffenden Felde eine zweite Diagonale mit einer solchen Richtung an, daß die Belastung, welche in der bereits im Felde vorhandenen Diagonalen Druck erzeugen würde, in der zweiten Diagonalen Zug hervorruft. Die Diagonale muß demnach so gerichtet sein, daß die erwähnte Nutzlast die Knotenpunkte vom Fußpunkte dieser Diagonalen an bis zu demjenigen Auflager belastet, nach welchem dieser Fußpunkt hinweist; mit anderen Worten, man bringt eine Diagonale an, welche die bereits vorhandene Diagonale kreuzt, eine sog. Gegendiagonale (in Fig. 224 die punktirte Diagonale  $E'F'$ ).

Damit dieselbe aber auch wirksam sei, erhält die Hauptdiagonale  $EF$  einen derartigen Querschnitt, daß sie bei Druckspannungen ausbiegt, daß sie also in diesem Falle als nicht vorhanden angesehen werden kann.

Solche Gegendiagonalen sind in denjenigen Feldern anzuordnen, in welchen die Hauptdiagonalen unter Umständen Druckspannungen erhalten. In den Feldern nahe am Auflager ist die Zugspannung durch das Eigengewicht meistens groß, die Druckspannung durch Nutzlast meistens klein, so daß in diesen Feldern keine Gegendiagonalen nöthig sind; in den mittleren dagegen sind sie anzuordnen. Die Spannungen in den Gegendiagonalen sind dann genau so zu ermitteln, als wären die Hauptdiagonalen nicht vorhanden; jede Gegendiagonale, z. B.  $E'F'$ , befindet sich genau in derselben Lage, wie die symmetrisch zur Trägermitte liegende Hauptdiagonale im Träger mit nur nach einer Seite fallenden Diagonalen, also hier wie  $RS$  (Fig. 224). Die oben gefundenen Spannungen können daher hier sofort verwertet werden. Der Träger würde demnach die in Fig. 225 dargestellte Form erhalten, in welcher je zwei Stäbe mit gleichen Bezeichnungen gleiche Spannungen erleiden.

Fig. 224.

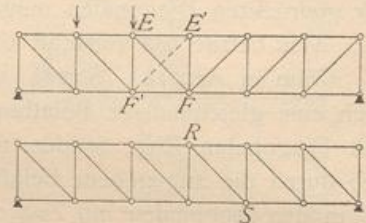
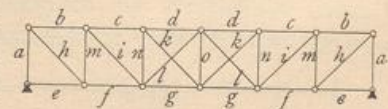
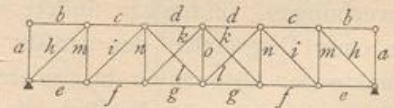


Fig. 225.



Bei der Construction eines Trägers mit nur gedrückten Diagonalen ist nach gleichem Grundsatze zu verfahren. Zunächst sind beiderseits nur nach der Mitte ansteigende Diagonalen zu verwenden, damit man für Belastung durch Eigengewicht, bzw. Gesamtlast nur Druck erhalte. In denjenigen Feldern alsdann, in welchen die Diagonalen unter Umständen Zugspannung erhalten würden, sind wie oben Gegendiagonalen anzuordnen (Fig. 226). Die Verbindung in den Knotenpunkten ist so anzuordnen, daß die Hauptdiagonalen keinen Zug übertragen können.

Fig. 226.



Die Beanspruchung der Pfosten ergibt sich nach Art. 183 (S. 184) stets der Beanspruchung derjenigen Diagonalen entgegengesetzt, welche an einem unbelasteten Knotenpunkte mit dem Pfosten zusammentrifft. Werden demnach alle Diagonalen nur gezogen, so werden alle Pfosten nur gedrückt (Fig. 225); werden alle Diagonalen

187.  
Träger  
mit nur  
gedrückten  
Diagonalen.

nur gedrückt, so werden alle Pfoften nur gezogen (Fig. 226). Im zweiten Falle werden dieselben meistens aus Schmiedeeisen hergestellt, während die Diagonalen aus Holz bestehen.

Beispiel. Ein als Parallelträger mit Diagonalen und Pfoften (nach Art von Fig. 222) hergestellter Unterzug hat folgende Abmessungen und Belastungen: Stützweite  $l = 12$  m; Höhe zwischen den Gurtungs-Schwerpunkten  $h = 1,5$  m; Anzahl der Felder  $n = 8$ ; Feldweite  $a = 1,5$  m. Die Diagonalen fallen jederseits nach der Trägermitte zu; Gegendiagonalen sind nicht vorhanden. Die Belastung durch das Eigengewicht für das laufende Meter ist  $g = 1800$  kg, diejenige durch Nutzlast  $p = 2400$  kg; mithin sind die Knotenpunktlasten bezw.  $ga = 2700$  kg und  $pa = 3600$  kg. Die Lastpunkte liegen in der oberen Gurtung. Die durch diese Belastungen entstehenden Spannungen sind zu berechnen.

188.  
Beispiel.

a) Spannungen in den Gurtungen. Nach Gleichung 234 u. 235 sind für den  $m$ -ten Stab der oberen Gurtung

$$X_g = - \frac{1800 \cdot 1,5^2}{2 \cdot 1,5} m (8 - m) = - 1350 m (8 - m)$$

und

$$X_p = - \frac{2400 \cdot 1,5^2}{2 \cdot 1,5} m (8 - m) = - 1800 m (8 - m).$$

Für den  $m$ -ten Stab der unteren Gurtung sind nach Gleichung 234 u. 235

$$Z_g = \frac{1800 \cdot 1,5^2}{2 \cdot 1,5} (m - 1) (9 - m) = 1350 (m - 1) (9 - m) \quad \text{und} \quad Z_p = 1800 (m - 1) (9 - m).$$

Man erhält aus vorstehenden Ausdrücken, indem man der Reihe nach für  $m$  die Werthe 1, 2, 3, 4 einführt, die Gurtungsspannungen der Stäbe links der Mitte. Die Spannungen in den symmetrisch zur Mitte liegenden Stäben sind den gefundenen genau gleich. Die Addition der Werthe  $X_g$  und  $X_p$  ergibt die Maximalspannungen in der oberen, die Addition der Werthe  $Z_g$  und  $Z_p$  die Maximalspannungen in der unteren Gurtung. Die Ergebnisse sind in umstehender Tabelle angegeben.

β) Spannungen in den Diagonalen. a) Durch das Eigengewicht. Nach Gleichung 238 ist für die  $m$ -te Diagonale die Spannung durch das Eigengewicht, da hier  $\cos \alpha = \cos 45^\circ = 0,707$  ist,

$$Y_g = \frac{1800 \cdot 1,5}{2 \cdot 0,707} (9 - 2m) = 1910 (9 - 2m).$$

Durch Einsetzung der Zahlenwerthe  $m = 1, 2, 3, 4$  erhält man die Spannungen  $Y_g$ .

b) Durch die Nutzlast. Die größten Zug- und Druckspannungen, welche in den Diagonalen hervorgerufen werden, sind nach Gleichung 241 u. 242

$$Y_{pmax} = \frac{2400}{2 \cdot 12 \cdot 0,707} (x^2 - 0,75^2) = 141,4 (x^2 - 0,56)$$

und

$$Y_{pmin} = - \frac{2400}{2 \cdot 12 \cdot 0,707} [(l - x)^2 - 0,75^2] = - 141,4 [(l - x)^2 - 0,56].$$

Man erhält für

$m =$	1	2	3	4
$x =$	11,25	9,75	8,25	6,75 m
$(l - x) =$	0,75	2,25	3,75	5,25 m

und für  $Y_{pmax}$ , bezw.  $Y_{pmin}$  die Werthe, welche in der umstehenden Tabelle folgen.

γ) Spannungen in den Pfoften. a) Durch das Eigengewicht. Nach Gleichung 239 ist, da die Lastpunkte oben liegen,

$$V_g = - \frac{1800 \cdot 1,5}{2} (9 - 2m) = - 1350 (9 - 2m).$$

b) Durch die Nutzlast. Die größten Druck-, bezw. Zugspannungen ergeben sich aus den Gleichungen 241 u. 242 zu

$$V_{pmin} = - \frac{2400}{2 \cdot 12} (x^2 - 0,75^2) = - 100 (x^2 - 0,56) \quad \text{und} \quad V_{pmax} = 100 [(l - x)^2 - 0,56].$$

Für  $x$  sind dieselben Werthe, wie bei den Diagonalen einzuführen. Man erhält die Werthe der umstehenden Tabelle.

Im Endpfoften ist die Druckspannung stets gleich dem Auflagerdruck, also hier, da die Belastung des Endknotenpunktes mit  $\frac{ga}{2}$ , bezw.  $\frac{pa}{2}$  hinzukommt,



$$V_g = - (3,5 + 0,5) g a = - 4 g a = - 4 \cdot 1800 \cdot 1,5 = - 10800 \text{ kg,}$$

$$V_{pmin} = - 4 p a = - 4 \cdot 2400 \cdot 1,5 = - 14400 \text{ kg.}$$

Zug kann in diesem Pfoften nicht entstehen.

Auf den Mittelpfoften sind die obigen Gleichungen nicht anwendbar, weil an diesem unteren Endpunkte sich die zwei Diagonalen der anstoßenden Felder treffen, also der schräge Schnitt andere Stäbe trifft, als bei der Entwicklung der Formeln vorgesehen war. Da am oberen Endpunkt des Pfoftens keine Diagonale ansetzt, so kann derselbe nur solche lothrechte Kräfte aufnehmen, welche im oberen Knotenpunkte unmittelbar angreifen. Wir erhalten also die Spannungen in demselben genau so groß, wie die Knotenpunktsbelastungen. Diese Werthe sind in die Tabelle eingefetzt worden.

Tabelle der Stabspannungen.

Teil der Construction	m	=	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Obere Gurtung	$X_g$	=		- 9450	-16200	-20250	-21600	-21600	-20250	-16200	- 9450
	$X_p$	=		-12600	-21600	-27000	-28800	-28800	-27000	-21600	-12600
Untere Gurtung	$Z_g$	=		0	9450	16200	20250	20250	16200	9550	0
	$Z_p$	=		0	12600	21600	27000	27000	21600	12600	0
Diagonalen	$Y_g$	=		13370	9550	5730	1910	1910	5730	9450	13370
	$Y_{pmax}$	=		17820	13362	9545	6363	6363	9545	13362	17820
	$Y_{pmin}$	=		0	- 636	- 1910	- 3818	- 3818	- 1910	- 636	0
Pfoften	$V_g$	=	-10800	- 9450	- 6750	- 4050	- 2700	- 4050	- 6750	- 9450	-10800
	$V_{pmin}$	=	-14400	-12600	- 9450	- 6750	- 3600	- 6750	- 9450	-12600	-14400
	$V_{pmax}$	=	0	0	4500	1350	0	1350	450	0	0

K i l o g r a m m

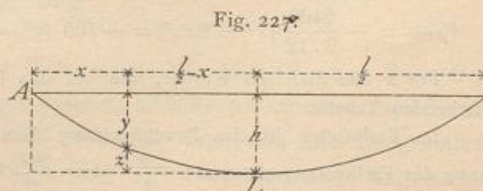
Zur Bestimmung der Querschnitte nach den Gleichungen 42 bis 48 (siehe Art. 84 u. 85, S. 62 u. 63) dient die Zusammenstellung der nachstehenden Tabelle.

Obere Gurtung: Druck			Untere Gurtung: Zug			Diagonalen: Ueberwiegender Zug			Pfoften: Ueberwiegender Druck				
Stab Nr.	$P_0$	$P_1$	Stab Nr.	$P_0$	$P_1$	Stab Nr.	$P_0$	$P_1$	$P_2$	Stab Nr.	$P_0$	$P_1$	$P_2$
1 u. 8	- 9450	-12600	1 u. 8	0	0	1 u. 8	13370	17820	0	0 u. 8	-10800	-14400	0
2 u. 7	-16200	-21600	2 u. 7	9450	12600	2 u. 7	9550	13362	- 636	1 u. 7	- 9450	-12600	0
3 u. 6	-20250	-27000	3 u. 6	16200	21600	3 u. 6	5730	9545	-1910	2 u. 6	- 6750	- 9450	450
4 u. 5	-21600	-28800	4 u. 5	20250	27000	4 u. 5	1910	6363	-3818	3 u. 5	- 4050	- 6750	1350
										4	- 2700	- 3600	0
Kilogramm			Kilogramm			Kilogramm			Kilogramm				

5) Parabelträger.

189.  
Berechnung  
der  
Spannungen:

Parabelträger sind Träger, bei denen die Knotenpunkte einer oder beider Gurtungen auf Parabeln liegen. Hier sollen nur solche Parabelträger behandelt werden, bei welchen die obere Gurtung eine gerade Linie, die untere Gurtung ein der Parabel eingeschriebenes Vieleck ist (Fig. 227). Bezeichnet man die Pfeilhöhe der Parabel mit  $h$ , die Trägerstützweite mit  $l$  und legt man den Anfangspunkt der Coordinaten in das linke Auflager (nach  $A$ ), so ist, wenn  $L$  der Scheitel der Parabel ist,



$$\frac{z}{h} = \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}, \text{ woraus } z = h \left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2, \text{ ferner } y = (h - z);$$

folglich lautet die Gleichung der Parabel bezogen auf *A* als Koordinaten-Anfang:

$$y = \frac{4h}{l^2} (lx - x^2). \dots \dots \dots 247.$$

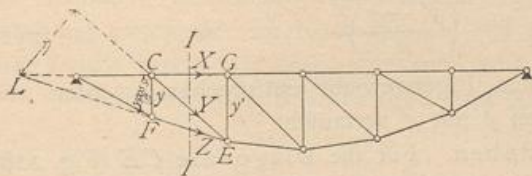
Die Spannungen in den sämtlichen Stäben können nun mittels der in Art. 170 bis 177 (S. 169 bis 173) vorgeführten Verfahren leicht ermittelt werden. Dabei macht es keine Schwierigkeit, die Berechnung auch für den Fall durchzuführen, daß die obere Gurtung gekrümmt, die untere eine gerade Linie ist.

a) Spannungen in den Gurtungen. Für einen Stab *FE* der unteren Gurtung (Fig. 228) ist *C* der conjugirte Punkt; wird mit *M* das Moment der an der einen Seite des Schnittes *II* wirkenden äußeren Kräfte bezeichnet, so ergibt sich

190.  
in den  
Gurtungen;

$$0 = M - Zy \cos \sigma, \text{ woraus } Z = \frac{M}{y \cos \sigma} \dots \dots \dots 248.$$

Fig. 228.



Für einen Stab *CG* der oberen Gurtung ist *E* der conjugirte Punkt, und wenn das Moment der äußeren Kräfte für diesen Punkt mit *M'* bezeichnet wird,

$$0 = M' + Xy', \text{ woraus } X = -\frac{M'}{y'} \dots \dots \dots 249.$$

Wie beim Parallelträger in Art. 178 (S. 175) ergibt sich auch hier, daß die oberen Gurtungsstäbe stets gedrückt, die unteren Gurtungsstäbe stets gezogen werden, so wie daß alle Gurtungsstäbe bei voller Belaftung am meisten beansprucht werden.

Nunmehr können die durch Eigengewicht, bezw. durch gleichmäßig über den ganzen Träger vertheilte Nutzlast erzeugten Gurtungsspannungen ermittelt werden. Das erstere sei *g*, die letztere *p* für die Längeneinheit; beide Belaftungsarten sind einander genau gleich; es genügt also eine, etwa die letztere, zu betrachten. Es wird wieder angenommen, daß die Lasten nur in den Knotenpunkten wirken; bei einer Feldweite *a* (Fig. 229) ist die Knotenpunktlast gleich *pa* (bezw. *ga*). Die Auflagerdrücke sind  $D_0 = D_1 = \frac{pa(n-1)}{2}$  und, da  $a(n-1) = (l-a)$  ist,

$$D_0 = D_1 = \frac{p(l-a)}{2} \dots \dots \dots 250.$$

Für einen beliebigen Knotenpunkt *E* mit der Abscisse *x* ist nun das Moment

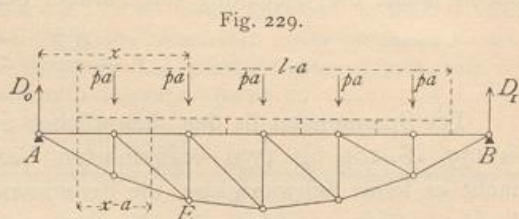
$$M_x = \frac{p(l-a)}{2} x - p(x-a) \left(\frac{x-a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \frac{p}{2} (lx - x^2).$$

Dies ist aber nach Art. 154 (S. 147) auch der Ausdruck für das Moment im Punkte *E* bei einem vollwandigen, gleichmäßig mit *p* für die Längeneinheit belafteten Träger.

Werden die Werthe von *M* und *y* (Gleichung 247) in die Ausdrücke von *Z* und *X* eingeführt, so ergibt sich allgemein

$$\left. \begin{aligned} Z \cos \sigma &= \frac{M}{y} = \frac{p}{2} \cdot \frac{(lx - x^2) l^2}{4h(lx - x^2)} = \frac{pl^2}{8h} \\ X &= -\frac{p}{2} \cdot \frac{(lx - x^2) l^2}{4h(lx - x^2)} = -\frac{pl^2}{8h} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 251.$$

$Z \cos \sigma$  ist die wagrechte Seitenkraft der Spannung in der gekrümmten Gurtung. Die rechte Seite obiger Ausdrücke enthält nur constante Größen, so dass sich ergibt: Beim Parabelträger ist für gleichmäßige Belastung des ganzen Trägers die Spannung in der geraden Gurtung ( $X$ ) und die wagrechte Seitenkraft der Spannung in der gekrümmten Gurtung constant.



Da  $\cos \sigma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (y' - y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2}}$  ist, erhält man aus

Gleichung 251

$$Z = \frac{pl^2}{8h} \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2} \dots \dots \dots 252.$$

Die Spannungen  $Z$  und  $X$ , welche dem Eigengewicht entsprechen, werden aus obigen Gleichungen erhalten, indem man  $p$  mit  $g$  vertauscht.

191.  
in den  
Gitterstäben.

β) Spannungen in den Gitterstäben. Für die Diagonale  $CE$  (Fig. 228) ist  $L$  der conjugirte Punkt,  $\eta$  der Hebelsarm von  $Y$ , und wenn mit  $M_1$  das Moment der äusseren Kräfte am Bruchstück links vom Schnitt  $II$ , bezogen auf  $L$  als Drehpunkt, bezeichnet wird, ist

$$0 = Y\eta - M_1, \text{ woraus } Y = + \frac{M_1}{\eta} \dots \dots \dots 253.$$

Liegt die Diagonale rechts der Mitte, so fällt der conjugirte Punkt rechts vom rechten Auflager. Die Aufstellung der Momentengleichung für diesen Punkt ergibt genau wie in Gleichung 253 die Diagonalspannung als Quotienten aus dem Moment der am Bruchstück wirkenden äusseren Kräfte, dividirt durch den Hebelsarm der Diagonalspannung.

Fig. 230.

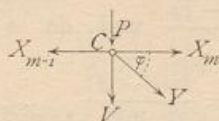
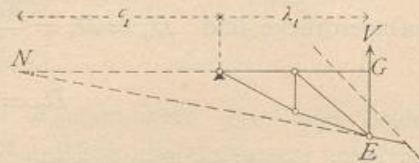


Fig. 231.



Häufig ist ein anderer Ausdruck der Diagonalspannung bequemer, als Gleichung 253. Die am Knotenpunkt  $C$  der geraden Gurtung (Fig. 230) angreifenden Kräfte sind im Gleichgewicht; die algebraische Summe aller wagrechten Seitenkräfte ist demnach gleich Null; mithin

$$0 = Y \cos \varphi + X_m - X_{m-1}, \text{ woraus } Y = - \frac{X_m - X_{m-1}}{\cos \varphi} \dots \dots 254.$$

Für die Bestimmung der Spannungen in den Pfoften ist der Schnitt schief zu legen (Fig. 231). Der conjugirte Punkt für den Pfoften  $EG$  ist  $N$ . Bezeichnet

—  $M_2$  das Moment der am Bruchstück wirkenden äußeren Kräfte für  $N$  als Drehpunkt, so wird

$$0 = -V(\lambda_1 + c_1) - M_2, \text{ woraus } V = -\frac{M_2}{\lambda_1 + c_1} \dots 255.$$

Falls der conjugirte Punkt nach rechts vom rechten Auflager fällt, ergibt sich eine geringe Abänderung der Gleichung 255.

Ein für manche Fälle bequemerer Ausdruck wird wiederum durch Betrachtung des Knotenpunktes an der geraden Gurtung erhalten. Es ergibt sich, da die Kräfte an demselben im Gleichgewicht sind,

$$0 = Y \sin \varphi + V + P, \text{ woraus } V = -(Y \sin \varphi + P) \dots 256.$$

a) Das Eigengewicht, bezw. eine gleichmäßig über den ganzen Parabelträger vertheilte Last  $p$  für die Längeneinheit erzeugt in allen Diagonalen die Spannung Null. Denn bei dieser Belastung ist nach Art. 190 (S. 191) die Gurtungsspannung  $X$  constant, also  $X_m = X_{m-1}$ , mithin nach Gleichung 254:  $Y = 0$ .

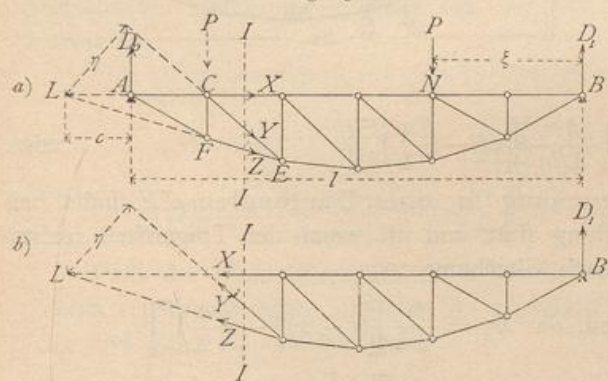
Die Spannung in den Pfoften ergibt sich nach Gleichung 256, da  $Y = 0$  und  $P = pa$  (bezw.  $ga$ ) ist, zu

$$V_p = -pa, \text{ bezw. } V_g = -ga \dots 257.$$

Die Spannung in den Pfoften ist sonach beim Parabelträger und der angegebenen Belastung gleich der im Knotenpunkte der geraden Gurtung wirkenden Last, und zwar Druck, wenn, wie hier angenommen ist, die obere gerade Gurtung belastet ist.

b) Ungünstigste Belastungen und größte Stabspannungen der Gitterstäbe.

Fig. 232.



Die ungünstigste Belastung für eine Diagonale  $CE$  (Fig. 232) wird folgendermaßen erhalten. Eine rechts von dem durch die Diagonale verlaufenden Schnitt  $II$  gelegene Last  $P$  erzeugt in  $A$  den Auflagerdruck  $D_0 = \frac{P\xi}{l}$  und in  $CE$  eine Diagonalspannung  $Y$ , die aus der Momentengleichung für Punkt  $L$  und das links vom Schnitt liegende Bruchstück folgt:

$$0 = Y\eta - D_0 c,$$

woraus

$$Y = \frac{D_0 c}{\eta} = \frac{P\xi c}{l\eta} \dots 258.$$

So lange sich die Last rechts vom Schnitt  $II$  befindet, gilt der hier für  $Y$  gefundene Ausdruck. Jede Last rechts vom Schnitt erzeugt also in  $CE$  einen Zug.

Befindet sich die Last  $P$  links vom Schnitt  $II$ , so betrachte man das Bruchstück an der rechten Seite des Schnittes (Fig. 232 *b*). Auf dasselbe wirken der Auflagerdruck  $D_1$  in  $B$  und die drei Spannungen  $X$ ,  $Y'$  und  $Z$ ; die Gleichung der statischen Momente für  $L$  als Drehpunkt heißt dann:

$$0 = Y'\eta + D_1(l + c), \text{ woraus } Y' = -\frac{D_1(l + c)}{\eta} \dots 259.$$

Die Last  $P$  links von  $II$  erzeugt also in der Diagonale Druck und in gleicher Weise jede links vom Schnitt liegende Last.

Für die rechts von der Mitte gelegenen Diagonalen, bei welchen der Momentenpunkt rechts von *B* liegt, ergibt sich die gleiche Gesetzmäßigkeit.

Es folgt, daß auch hier das für die Parallelträger (Art. 179, S. 177) gefundene Gesetz gilt: Jede Belastung zwischen dem durch die Diagonalenmitte gelegten lothrechten Schnitte und demjenigen Auflager, nach welchem der Fußpunkt der Diagonalen hinweist, erzeugt in derselben Zug; jede Belastung zwischen dem erwähnten Schnitte und demjenigen Auflager, nach welchem der Kopf der Diagonale hinweist, erzeugt in derselben Druck.

Größter Zug findet demnach in einer Diagonalen dann statt, wenn alle Knotenpunkte zwischen dem Schnitte und demjenigen Auflager belastet sind, nach welchem der Fuß der Diagonale hinweist; größter Druck, wenn die Knotenpunkte zwischen dem Schnitte und demjenigen Auflager belastet sind, nach welchem der Kopf der Diagonalen hinweist.

Die größte Zugbeanspruchung in einer Diagonalen *CE* findet daher bei der in Fig. 233 gezeichneten Belastung statt; sie ist

$$Y_{max} = \frac{D_0 c}{\eta}$$

Genau, wie in Art. 179 (S. 177), erhält man für den Auflagerdruck:

$$D_0 = \frac{p}{2l} \left[ x^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right],$$

also

$$Y_{max} = \frac{p c}{2l \eta} \left[ x^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right] \dots \dots \dots 260.$$

Die größte Druckbeanspruchung in einer Diagonalen *CE* findet bei der in Fig. 234 gezeichneten Belastung statt und ist (wenn der Trägertheil rechts vom Schnitte *II* betrachtet wird) nach Gleichung 259

$$Y_{min} = -D_1 \left( \frac{l+c}{\eta} \right) \text{ und, da } D_1 = \frac{p}{2l} \left[ (l-x)^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right],$$

$$Y_{min} = -\frac{p}{2l} \left[ (l-x)^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right] \left( \frac{l+c}{\eta} \right) \dots \dots \dots 261.$$

Die Gleichungen 260 u. 261 gelten, wenn die Diagonalen, wie hier, nach rechts fallen, nur für diejenigen links der Mitte; für die Diagonalen rechts der Mitte, bei denen der Momentenpunkt rechts von *B* fällt, ergeben sich folgende Werthe, in denen  $\eta_1$  den Hebelsarm von *Y*,  $c_2$  den Abstand des Momentenpunktes von *B* bedeutet:

$$Y_{max} = \frac{p}{2l} \left[ x^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right] \frac{l+c_2}{\eta_1} \text{ und } Y_{min} = -\frac{p}{2l} \left[ (l-x)^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right] \frac{c_2}{\eta_1} \dots \dots \dots 262.$$

Bei der angenommenen Belastungsart genügt es, entweder  $Y_{max}$  oder  $Y_{min}$  auszurechnen; denn für die Belastung aller Knotenpunkte mit je  $pa$  ist die Diagonalspannung (siehe oben) gleich Null. Sind nur die Knotenpunkte der Druckabtheilung belastet, so ist die Spannung in der Diagonalen gleich  $Y_{min}$ ; sind nur die Knoten-

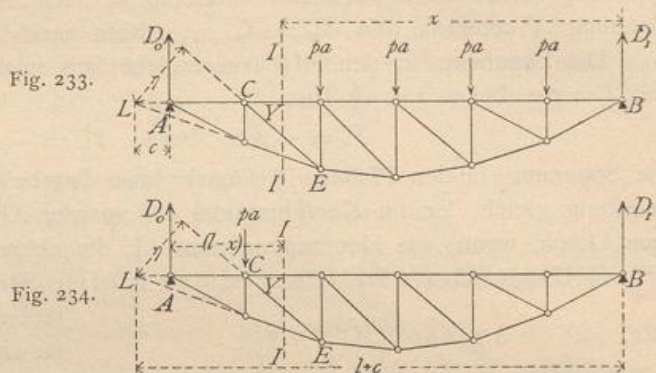
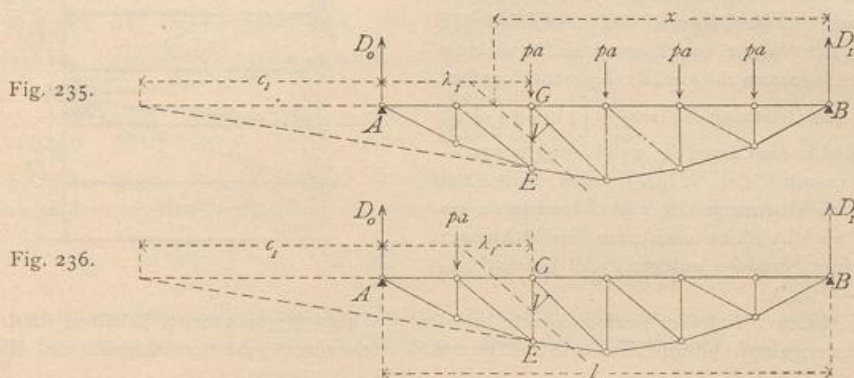


Fig. 233.

Fig. 234.

punkte der Zugabtheilung belastet, so ist die Spannung gleich  $Y_{max}$ . Bei voller Belastung ist die Spannung  $Y_{summa} = Y_{max} + Y_{min}$ , und zwar ist  $Y_{summa} = 0$ , d. h.  $0 = Y_{max} + Y_{min}$  und  $Y_{min} = -Y_{max}$ .

Um die ungünstigste Belastung der Pfoften zu ermitteln, verfährt man eben so, wie bei den Diagonalen gezeigt ist. Man findet, dass Diagonale und Pfoften, welche an einem Knotenpunkte der unbelasteten Gurtung zusammentreffen, dieselbe ungünstigste Belastungsart haben; nur findet im Pfoften grösster Druck statt bei derjenigen Belastung, welche in der entsprechenden Diagonalen grössten Zug



erzeugt und umgekehrt. Somit wird grösster Druck in  $GE$  bei der in Fig. 235 gezeichneten Belastung, grösster Zug bei der in Fig. 236 gezeichneten Belastung stattfinden.

Die grössten Spannungen in den Pfoften ergeben sich mit

$$\left. \begin{aligned} V_{min} &= -\frac{D_0 c_1}{\lambda_1 + c_1} = -\frac{p}{2l} \left[ x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] \frac{c_1}{\lambda_1 + c_1} \\ V_{max} &= \frac{D_1 (l + c_1)}{\lambda_1 + c_1} = \frac{p}{2l} \left[ (l - x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] \frac{l + c_1}{\lambda_1 + c_1} \end{aligned} \right\} \dots 263.$$

Falls der Momentenpunkt um  $c_1'$  nach rechts von  $B$  fällt, was hier bei allen Pfoften rechts der Mitte, einschl. der Mittelpfoften, stattfindet, so ergeben sich für  $V_{min}$  und  $V_{max}$  die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} V'_{min} &= -\frac{D_0 (l + c_1')}{c_1' + l - \lambda_1} = -\frac{p}{2l} \left[ x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] \frac{l + c_1'}{c_1' + l - \lambda_1} \\ V'_{max} &= \frac{D_1 c_1'}{c_1' + l - \lambda_1} = \frac{p}{2l} \left[ (l - x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] \frac{c_1'}{c_1' + l - \lambda_1} \end{aligned} \right\} \dots 264.$$

c) Bei entgegengesetzter Richtung der Diagonalen ergeben sich nur geringe Aenderungen, welche leicht aus Vorstehendem folgen.

Die Spannungen durch eine oder mehrere Einzellaften sind gleichfalls nach einem der in Art. 172 u. 173 (S. 170) angegebenen Verfahren leicht zu finden.

γ) Graphische Ermittlung der Spannungen. Wird eine gleichmäfsig vertheilte Belastung (Eigengewicht, bezw. volle zufällige Belastung) vorausgesetzt, so ergibt der in Fig. 237 gezeichnete *Cremona'sche* Kräfteplan sofort die Spannungen.

Was die durch zufällige Belastung erzeugten Maximalspannungen betrifft, so ergeben sich die grössten Gurtungsspannungen aus dem eben erwähnten Kräfte-

192.  
Graphische  
Ermittlung  
der  
Spannungen.

plan (Fig. 237), falls eine Belastung des ganzen Trägers mit der Last  $p$  für die Längeneinheit zu Grunde gelegt wird.

Zur Bestimmung der grössten Diagonalspannungen, welche bei den oben angegebenen Belastungen stattfinden, empfiehlt sich die Schnittmethode.

Auf das Trägerstück links vom Schnitte  $II$  wirken bei der in Fig. 238 *a* gezeichneten grössten Zugbelastung für die Diagonale  $CE$  die Kräfte  $D_0$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Die Werthe von  $D_0$ , welche für die verschiedenen Diagonalen zu Grunde zu legen sind, ergeben sich aus der Gleichung  $D_0 = \frac{p}{2l} \left[ x^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right]$ ; dieselben sind in der Curve (Fig. 238 *b*) aufgetragen. — Für die Diagonale  $CE$  z. B. ist  $D_0 = mn$ ; diese Kraft ist nach den Richtungen  $AE$  und  $X$  zerlegt in  $no$  und  $om$ ;  $no$  ist alsdann noch nach den Richtungen  $Z$  und  $Y$  in  $np$  und  $po$  zerlegt;  $po$  ist gleich  $Y_{max}$  ( $Y_{min} = -Y_{max}$ ).

Im Pfosten  $CF$  findet grösster Druck bei der in Fig. 239 gezeichneten Belastung statt.  $D_0$  ist hier gleich derjenigen Ordinate der Curve in Fig. 238 *b*, welche zu  $x'$  gehört, d. h. gleich  $rs$ . Nun wird

Fig. 237.

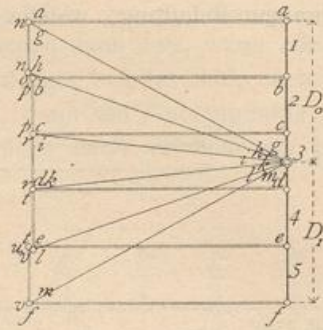
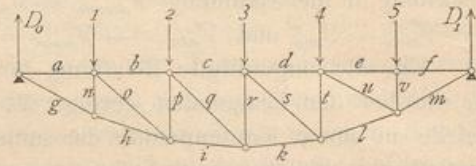


Fig. 238.

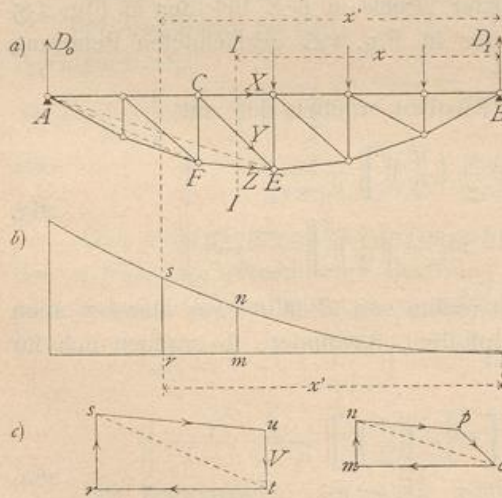


Fig. 239.

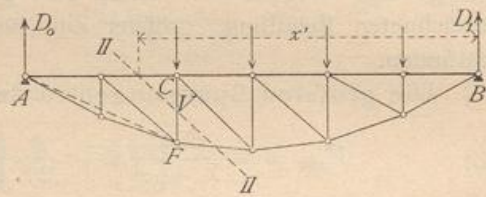
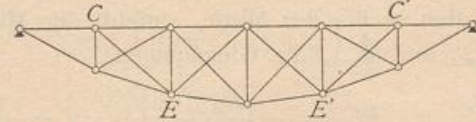


Fig. 240.



genau wie oben zerlegt. Es wird  $V_{min} = ut$ . Entsprechend ist der grösste in  $CF$  auftretende Zug zu ermitteln.

193.  
Gegen-  
diagonalen.

δ) Träger mit Gegendiagonalen. Durch die Verkehrslast erhält jede Diagonale sowohl Zug wie Druck, durch das Eigengewicht gar keine Spannung. Die ungünstigsten Zug-, bzw. Druckspannungen sind also genau so gross, wie diejenigen durch die ungünstigsten Verkehrslasten. Sollen nur gezogene Diagonalen vorkommen, so wird nach Art. 186 (S. 187) in jedem Felde eine Gegendiagonale angeordnet werden müssen. Man erhält die in Fig. 240 gezeichnete Trägerform. Die Gegendiagonale  $C'E'$  wird genau eben so beansprucht, wie die symmetrisch zur Mitte liegende Hauptdiagonale  $CE$  des Trägers mit einseitig fallenden Diagonalen.

Dasselbe gilt von allen Gegendiagonalen; fomit wird die Berechnung eines Trägers mit nach einer Richtung fallenden Diagonalen genügen.

Beispiel. Ein als Unterzug dienender Parabelträger mit gerader oberer und gekrümmter unterer Gurtung hat die nachfolgenden Hauptabmessungen und Belastungen: Stützweite  $l = 12,0$  m; Pfeilhöhe  $h = 1,20$  m; Feldweite  $a = 1,00$  m; Eigengewicht für das laufende Meter des Trägers  $g = 320$  kg, also  $ga = 320$  kg; Verkehrslast für das laufende Meter des Trägers  $p = 1280$  kg, also  $pa = 1280$  kg. Der Träger hat ein aus Pfosten und Diagonalen bestehendes Gitterwerk; die Diagonalen fallen beiderseits nach der Mitte zu; der Träger ist also zur Mitte symmetrisch angeordnet. Die in den einzelnen Stäben entstehenden Spannungen sind zu ermitteln. Wegen der Symmetrie des Trägers braucht man nur die Spannungen in den Stäben links der Mitte zu bestimmen; die symmetrisch zur Mitte liegenden Stäbe erhalten gleiche Beanspruchungen.

194.  
Beispiel.

a) Form der unteren Gurtung. Die Parabel-Ordinaten ergeben sich nach Gleichung 247 aus der Beziehung  $y = \frac{4 \cdot 1,2}{144} x(12 - x) = 0,033 x(12 - x)$ . Man erhält:

für $x =$	1 m	2 m	3 m	4 m	5 m	6 m	7 m	8 m	9 m	10 m	11 m
$y =$	0,36 m	0,66 m	0,89 m	1,06 m	1,16 m	1,2 m	1,16 m	1,06 m	0,89 m	0,66 m	0,36 m.

b) Spannungen in der oberen Gurtung. Durch das Eigengewicht, bzw. volle zufällige Belastung entsteht in sämtlichen Stäben der oberen Gurtung eine Spannung nach Gleichung 251

$$X_g = -\frac{320 \cdot 12^2}{8 \cdot 1,2} = -4800 \text{ kg} \quad \text{und} \quad X_p = -\frac{1280 \cdot 12^2}{8 \cdot 1,2} = -19200 \text{ kg.}$$

$X_p$  ist zugleich die größte durch zufällige Belastung entstehende Spannung.

c) Spannungen in der unteren Gurtung. Nach Gleichung 252 sind

$$Z_g = 4800 \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2} \quad \text{und} \quad Z_p = 19200 \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2}.$$

Hiernach erhält man die in der linksseitigen Hälfte der nächstfolgenden Tabelle zusammengestellten Ergebnisse. Die Werthe  $Z_p$  sind zugleich die größten durch die zufällige Last entstehenden Spannungen.

b) Spannungen in den Diagonalen. Die Spannungen durch das Eigengewicht sind gleich Null (siehe Art. 191, S. 192). Die durch Verkehrslast erzeugten größten Zug- und Druckspannungen sind für die Diagonalen links der Mitte nach Gleichung 260 u. 261

$$Y_{max} = \frac{1280}{2 \cdot 12} (x^2 - 0,25) \frac{c}{\eta} = 53,33 \frac{c}{\eta} (x^2 - 0,25) \quad \text{und} \quad Y_{min} = -53,33 \left[ (l - x)^2 - 0,25 \right] \frac{l + c}{\eta}.$$

Die Größen  $c$  und  $\eta$  können berechnet oder konstruiert werden; die Werthe für  $c$  werden besser berechnet, weil die Zeichnung wegen der spitzen Schnittwinkel der Gurtungsabrichtungen nicht genaue Werthe ergibt. Man erhält mit Hilfe ähnlicher Dreiecke leicht

$$\frac{c_2 + a}{\eta_1} = \frac{a}{\eta_2 - \eta_1}; \quad \frac{c_3 + 2a}{\eta_2} = \frac{a}{\eta_3 - \eta_2}; \quad \frac{c_4 + 3a}{\eta_3} = \frac{a}{\eta_4 - \eta_3} \quad \text{u. f. w.}$$

Die Werthe für  $\eta$  können in ähnlicher Weise leicht berechnet werden; doch kann man, besonders wenn  $c$  berechnet und der Schnittpunkt entsprechend den Rechnungsergebnissen aufgetragen wird, die  $\eta$  mit hinreichender Genauigkeit konstruieren. Die Werthe für  $c, \eta, x, Y_{max}$  und  $Y_{min}$  sind in nachstehender Tabelle zusammengestellt.

Stab Nr.	$y'$	$y$	$Z_g$	$Z_p$	Diagonale Feld-Nr.	$c$	$\eta$	$x$	$Y_{max}$	$Y_{min}$
1	0,36	0,0	5102	20410	2	0,2	0,66	10,5	+ 1777	- 1971
2	0,66	0,36	5011	20045	3	0,37	1,91	9,5	+ 2186	- 2156
3	0,89	0,66	4925	19699	4	2,23	3,8	8,5	+ 2304	- 2396
4	1,06	0,89	4867	19469	5	6,6	8,03	7,5	+ 2449	- 2460
5	1,16	1,06	4824	19296	6	24	22,3	6,5	+ 2410	- 2582
6	1,20	1,16	4804	19216						
	Meter		Kilogramm			Meter		Kilogramm		



Nach Art. 191 (S. 192) müssen die absoluten Werthe von  $V_{max}$  und  $V_{min}$  einander gleich sein; dies ist hier nicht der Fall, was seinen Grund darin hat, daß nicht die genauen Parabel-Ordinaten der Berechnung zu Grunde gelegt sind, sondern eine Abrundung auf zwei Decimalen stattgefunden hat. Aus demselben Grunde würden sich auch die durch das Eigengewicht erzeugten Spannungen nicht genau gleich Null ergeben, wenn man sie nach Gleichung 253 berechnete. Immerhin ergeben sich diese Unterschiede so gering, daß sie vernachlässigt werden können.

e) Spannungen in den Pfosten. Durch das Eigengewicht entsteht in jedem Pfosten nach Art. 191 (S. 193) der Druck  $V = -320$  kg. Die durch Verkehrslast in den Pfosten links der Mitte erzeugten Maximalspannungen sind nach Gleichung 263

$$V_{min} = -53,33 (x^2 - 0,25) \frac{c_1}{\lambda + c_1} \quad \text{und} \quad V_{max} = +53,33 [(l-x)^2 - 0,25] \frac{12 + c_1}{\lambda_1 + c_1}.$$

Man erhält die in folgender Tabelle zusammengestellten Werthe von  $c_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $x$ ,  $(l-x)$ ,  $V_{min}$  und  $V_{max}$ . Der 6. (der Mittel-) Pfosten, an dessen Fußpunkt sich die beiden Diagonalen der anschließenden Felder schneiden, kann nicht nach den obigen Gleichungen berechnet werden, da die dort für den Schnitt gemachten Voraussetzungen hier nicht zutreffen. Da aber im oberen Knotenpunkte derselben keine Diagonale ansetzt, so kann dieselbe nur die Kräfte aufnehmen, welche unmittelbar in derselben wirken, d. h. der größte Druck ist gleich der Knotenpunktsbelastung dafelbst.

Pfosten Nr.	$c_1$	$\lambda_1$	$x$	$l-x$	$V_{min}$	$V_{max}$
1	0,2	1,0	11,5	0,5	- 1173	0
2	0,87	2,0	10,5	1,5	- 1778	+ 478
3	2,23	3,0	9,5	2,5	- 2047	+ 870
4	6,60	4,0	8,5	3,5	- 2391	+ 1123
5	24	5,0	7,5	4,5	- 2469	+ 1324
6	—	—	—	—	- 1280	0

Meter Kilogramm

f) Zur Bestimmung der Querschnitte nach den Gleichungen 42 bis 48 (siehe Art. 84 u. 85, S. 62 u. 63) dient die Zusammenstellung in der folgenden Tabelle:

Obere Gurtung: Druck			Untere Gurtung: Zug			Diagonalen:				Pfosten: Druck überwiegt			
Stab Nr.	$P_0$	$P_1$	Stab Nr.	$P_0$	$P_1$	Stab Nr.	$P_0$	$P_1$	$P_2$	Stab Nr.	$P_0$	$P_1$	$P_2$
1 u. 13	-4800	-19200	1 u. 12	5102	20410					1 u. 11	-320	-1173	0
2 u. 11	-4800	-19200	2 u. 11	5011	20045	2 u. 11	0	1777	-1971	2 u. 10	-320	-1778	478
3 u. 10	-4800	-19200	3 u. 10	4925	19699	3 u. 10	0	2186	-2156	3 u. 9	-320	-2047	870
4 u. 9	-4800	-19200	4 u. 9	4867	19469	4 u. 9	0	2304	-2396	4 u. 8	-320	-2301	1123
5 u. 8	-4800	-19200	5 u. 8	4824	19296	5 u. 8	0	2449	-2460	5 u. 7	-320	-2469	1324
6 u. 7	-4800	-19200	6 u. 7	4804	19216	6 u. 7	0	2410	-2582	6	-320	-1280	0

Kilogr. Kilogr. Kilogramm Kilogramm

In die Gleichungen 42 bis 48 sind die absoluten Zahlenwerthe für  $P_0$ ,  $P_1$  und  $P_2$  einzusetzen.

### 6) Dreiecksträger.

195.  
Trägerformen.

Dreieck- und Trapezträger sind, wie bereits in Art. 167 (S. 168) gesagt wurde, Träger, deren Gurtungen ein Dreieck, bzw. ein Paralleltapez bilden. Die eine Gurtung zeigt eine gerade, die andere eine gebrochene Linie. Ist die untere Gurtung gerade, so erhält man die unter dem Namen des einfachen, bzw. doppelten Hängebockes bekannte Trägerform (Fig. 241 a, bzw. 242 a) — nicht zu verwechseln mit den Hängewerkträgern, welche nach Art. 150 (S. 140) von den hier betrachteten

Fig. 241.

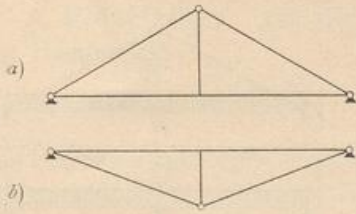
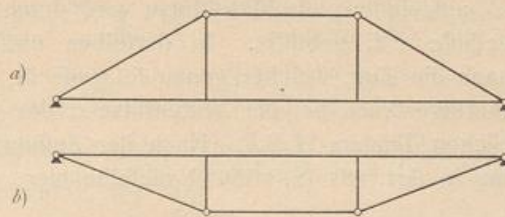


Fig. 242.

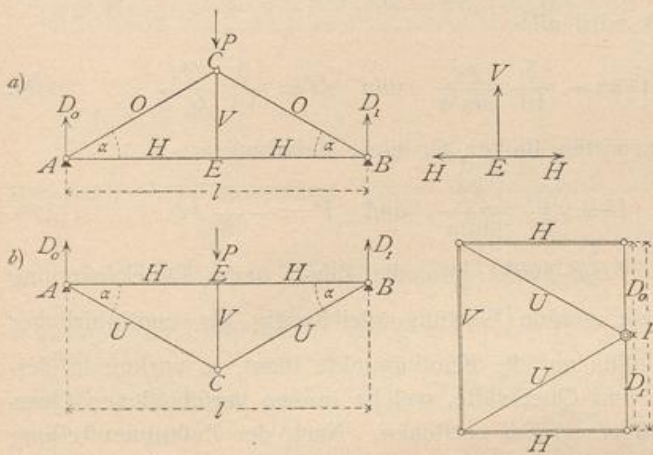


wesentlich verschieden sind. Ist die obere Gurtung gerade, so erhält man die unter dem Namen des armierten Balkens bekannte Trägeranordnung (Fig. 241 b u. 242 b).

α) Belastung durch Einzellaft (Fig. 243). Wenn im Knotenpunkte

196.  
Belastung durch Einzellaft.

Fig. 243.



$$D_0 = D_1 = \frac{P}{2}$$

Die im Punkte A wirkenden drei Kräfte  $D_0$ ,  $O$  und  $H$  halten einander im Gleichgewicht; demnach sind die algebraischen Summen der in diesem Knotenpunkte wirkenden wagrechten, bzw. lothrechten Seitenkräfte je gleich Null, d. h. es ist

$$0 = D_0 + O \sin \alpha, \text{ woraus } O = -\frac{P}{2 \sin \alpha} \dots \dots \dots 265.$$

$$0 = O \cos \alpha + H, \text{ woraus } H = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} \dots \dots \dots 266.$$

Die Spannungen der symmetrisch zur Mitte liegenden Stäbe sind gleich.

Falls die Last  $P$  im Punkte  $C$  angreift, so ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung für den Punkt  $E$  die Beziehung  $0 = V$ ; falls  $P$  in  $E$  angreift, so heißt die Gleichgewichtsbedingung:  $0 = V - P$ , woraus

$$V = P \dots \dots \dots 267.$$

Eben so ergibt sich für den armierten Träger (Fig. 243 b)

$$U = \frac{P}{2 \sin \alpha}, \quad H = -\frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{und} \quad V = -P \dots \dots \dots 268.$$

Die Construction der Spannungen ergibt den Kräfteplan in Fig. 243, welcher ohne weitere Erläuterung verständlich ist.

β) Gleichförmig vertheilte volle Belastung. Wird der Berechnung eine gleichförmig vertheilte Belastung zu Grunde gelegt, so ist die volle Belastung für die Stabspannungen auch die ungünstigste; denn jede Last, wo sie auch liegen möge, erzeugt in  $A$  und  $B$  (Fig. 244) Auflagerdruck, also in den Stäben der oberen Gurtung Druck, in denen der unteren Gurtung Zug. Bei dieser Belastung ist  $AEB$

197.  
Gleichförmig vertheilte Belastung.

wie ein continuirlicher Balken auf drei Stützen  $A$ ,  $E$  und  $B$  aufzufassen; die Mittelftütze wird durch die Hängefäule  $CE$  gebildet. In derselben entsteht demnach ein Zug, welcher genau so groß ist, wie der Auflagerdruck bei der Mittelftütze  $E$  des continuirlichen Trägers  $AEB$ . Nach der Zusammenstellung in Art. 165 (S. 166) ist dieselbe hier

$$d_1 = 1,25 p \frac{l}{2} = \frac{5}{8} pl,$$

während  $d_0 = d_2 = 0,375 p \frac{l}{2} = \frac{3}{16} pl$  ist; die letzteren Drücke werden vom Auflager aufgenommen und belasten den Träger nicht. Die Stabspannungen werden demnach die unter  $\alpha$  gefundenen Werthe haben, wenn statt  $P$  die Größe  $\frac{5}{8} pl$  eingesetzt wird. Beim Hängebock wird also

$$V = P = \frac{5}{8} pl, \quad O = -\frac{5}{16} \frac{pl}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad H = \frac{5}{16} \frac{pl}{\operatorname{tg} \alpha} \quad 269.$$

Eben so ergibt sich im armirten Balken für diese Belastungsart

$$H = -\frac{5}{16} \frac{pl}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad U = \frac{5}{16} \frac{pl}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad V = -\frac{5}{8} pl. \quad 270.$$

In der geraden Gurtung  $AEB$  wirkt also die Zug-, bzw. Druckspannung  $H = \pm \frac{5}{16} \frac{pl}{\operatorname{tg} \alpha}$ ; da aber diese gerade Gurtung gleichzeitig als continuirlicher Träger zum Übertragen der Lasten auf die Knotenpunkte dient, so wirken in derselben auch noch die Momente und Querkräfte, welche in den verschiedenen Querschnitten des continuirlichen Trägers  $AEB$  entstehen. Nach der Zusammenstellung in Art. 165 (S. 166) findet das größte Moment am Mittelauger statt, und daselbe ist

$$M_1 = 0,125 p \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{pl^2}{32}.$$

198.  
Querschnitts-  
bestimmung.

γ) Querschnittsbestimmung. Die Querschnitte der nur gezogenen, bzw. nur gedrückten Stäbe ergeben sich leicht, wie in Art. 82 bis 86 (S. 59 ff.) und im vorhergehenden Kapitel angegeben ist. Der Querschnitt der geraden Gurtung  $AEB$  ist für die gemeinsame Beanspruchung durch Zug, bzw. Druck und die Momente zu construiren. Wird der ganze Querschnitt (für Holz) als constant angenommen, so ist das größte im Balken wirkende Moment der Berechnung zu Grunde zu legen. An der Stelle, wo das größte Moment  $M_{max}$  wirkt, ist die größte in den äußersten Querschnittspunkten stattfindende Axialspannung für die Flächeneinheit nach Gleichung 54 (S. 75)

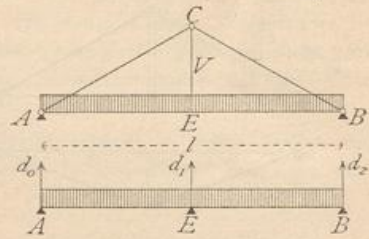
$$\sigma_{max} = \pm \left( \frac{H}{F} + \frac{M_{max} a}{\mathcal{I}} \right).$$

Beim Rechteckquerschnitt ist  $F = bh$ , und  $\frac{\mathcal{I}}{a} = \frac{bh^2}{6}$ ; wenn noch statt  $\sigma_{max}$  die größte zulässige Spannung  $K$  eingeführt wird, so ergibt sich als Bedingungsgleichung für den Querschnitt:

$$K = \pm \left( \frac{H}{bh} \pm \frac{6 M_{max}}{bh^2} \right) \dots \dots \dots 271.$$

In dieser Gleichung sind  $b$  und  $h$  unbekannt. Man nimmt zunächst für  $b$  einen Werth probeweise an und bestimmt  $h$  aus Gleichung 271; ergibt sich für  $h$  eine unzuweckmäßige Größe, so nehme man für  $b$  einen anderen Werth an und bestimme wiederum  $h$  nach Gleichung 271. Meistens werden sich bei der zweiten Rechnung entsprechende Werthe für  $b$  und  $h$  ergeben.

Fig. 244.



7) Trapezträger.

α) Einzellaften. Für die Belastungen in Fig. 245 a sind die Auflagerdrücke beim Hängebock 199  
Einzellaften.

$$D_0 = \frac{P_2 a + P_1 (a + b)}{l} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{P_1 a + P_2 (a + b)}{l}.$$

Die Stabspannungen ergeben sich dann durch Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Knotenpunkte, wie folgt:

Fig. 245 a.

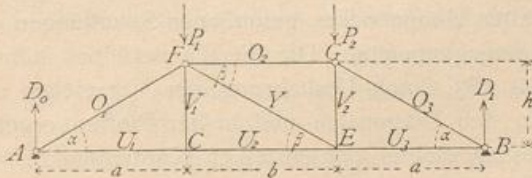
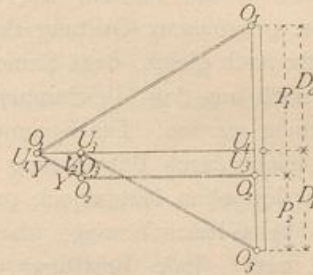


Fig. 245 b.



$$0 = D_0 + O_1 \sin \alpha, \text{ woraus } O_1 = - \frac{P_2 a + P_1 (a + b)}{l \sin \alpha} \quad \dots \quad 272.$$

$$0 = O_1 \cos \alpha + U_1, \text{ woraus } U_1 = \frac{P_2 a + P_1 (a + b)}{l \operatorname{tg} \alpha} = [P_2 a + P_1 (a + b)] \frac{a}{lh} \quad 273.$$

$$0 = U_1 - U_2, \text{ woraus } U_2 = U_1 = [P_2 a + P_1 (a + b)] \frac{a}{lh} \quad \dots \quad 274.$$

$$0 = D_1 + O_3 \sin \alpha, \text{ woraus } O_3 = - \frac{P_1 a + P_2 (a + b)}{l \sin \alpha} \quad \dots \quad 275.$$

$$0 = U_3 + O_3 \cos \alpha, \text{ woraus } U_3 = \frac{P_1 a + P_2 (a + b)}{l \operatorname{tg} \alpha} = [P_1 a + P_2 (a + b)] \frac{a}{lh} \quad 276.$$

$$0 = O_2 - O_3 \cos \alpha, \text{ woraus } O_2 = - \frac{P_1 a + P_2 (a + b)}{l \operatorname{tg} \alpha} = - [P_1 a + P_2 (a + b)] \frac{a}{lh} \quad 277.$$

$$0 = V_1 \text{ (falls die Last } P_1 \text{ in } C \text{ wirkt, so ist } V_1' = P_1) \quad \dots \quad 278.$$

$$0 = P_2 + V_2 + O_3 \sin \alpha, \text{ woraus } V_2 = (P_1 - P_2) \frac{a}{l} \quad \dots \quad 279.$$

Falls die Last  $P_2$  in  $E$  wirkt, so wird

$$0 = V_2' + O_3 \sin \alpha, \text{ woraus } V_2' = \frac{P_1 a + P_2 (a + b)}{l} \quad \dots \quad 280.$$

$$0 = U_2 + Y \cos \beta - U_3, \text{ woraus } Y = - \frac{U_2 - U_3}{\cos \beta} = - \frac{ab}{lh \cos \beta} (P_1 - P_2),$$

$$Y = + (P_2 - P_1) \frac{a}{l \sin \beta} \quad \dots \quad 281.$$

Falls die Lasten in der unteren Gurtung, in  $C$  und  $E$ , angreifen, so wird

$$Y' \sin \beta + V_2' - P_2 = 0, \text{ woraus } Y' = \frac{P_2 - V_2'}{\sin \beta} = \frac{P_2}{\sin \beta} - \frac{P_1 a + P_2 (a + b)}{l \sin \beta},$$

$$Y' = (P_2 - P_1) \frac{a}{l \sin \beta}, \quad \dots \quad 282.$$

d. h. eben so groß, wie in Gleichung 281.

Wenn, wie meistens,  $P_1 = P_2 = P$  ist, wird

$$\left. \begin{aligned} O_1 &= -\frac{P}{\sin \alpha}; & U_1 &= \frac{Pa}{h} = U_2; & O_2 &= -\frac{Pa}{h}; & O_3 &= -\frac{P}{\sin \alpha}; \\ U_3 &= \frac{Pa}{h}; & V_1 &= 0; & V_2 &= 0; & Y &= 0 \end{aligned} \right\} 283.$$

Die Construction ergibt den auf der vorhergehenden Seite stehenden, ohne Erklärung verständlichen Kräfteplan (Fig. 245 b).

Was den armirten Balken anbelangt, so sind bei diesem die Spannungen sowohl in der oberen, wie in der unteren Gurtung den oben für die gerade, bzw. gebrochene Gurtung des doppelten Hängebockes gefundenen Spannungen der Grösse nach gleich, dem Sinne nach entgegengesetzt. Die Werthe derselben können demnach aus den Gleichungen 272 bis 283 durch Umkehrung der Vorzeichen entnommen werden. Die Spannungen in den Diagonalen und in den Pfosten ergeben sich leicht durch Betrachtung des Gleichgewichtes der einzelnen Knotenpunkte, wie beim doppelten Hängebock gezeigt ist.

200.  
Gleichförmig  
vertheilte  
Belastung.

β) Gleichförmig über den ganzen Träger vertheilte Belastung (Fig. 246). Jede Belastung erzeugt in den Stäben der unteren Gurtung Zug, in denjenigen der oberen Gurtung Druck, wie sich aus den Gleichungen 272 bis 277 ergibt. Größter Zug, beziehungsweise Druck findet also in den Gurtungen bei Belastung des ganzen Trägers statt.

Die untere Gurtung wirkt, wenn keine Gelenke in den Knotenpunkten derselben angenommen werden, wie ein continuirlicher Balken auf 4 Stützen. Die Endstützen sind  $A$  und  $B$ ; die Mittelstützen werden durch die Pfosten  $FC$  und  $GE$  gebildet. Wird  $a = b$  gesetzt, so ergibt sich bei Belastung des ganzen Trägers mit der Last  $p$  für die Längeneinheit als Auflagerdruck der Mittelstützen nach der Zusammenstellung in Art. 165 (S. 166)  $d_1 = d_2 = 1,1 \frac{pl}{3} = 0,37 pl$ . Eben so groß ist die Last, welche in den Knotenpunkten  $C$  und  $E$  des Systems nach unten wirkt. Werden diese Werthe für  $P_1$  und  $P_2$  in die obigen Gleichungen eingeführt, so ergibt sich

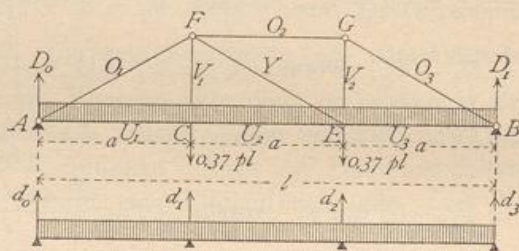
$$\left. \begin{aligned} O_1 &= -\frac{0,37 pl}{\sin \alpha}; & U_1 &= 0,37 pl \frac{a}{h}; & O_2 &= -0,37 pl \frac{a}{h}; & O_3 &= -\frac{0,37 pl}{\sin \alpha}; \\ U_2 &= 0,37 pl \frac{a}{h}; & U_3 &= 0,37 pl \frac{a}{h}; & V_1 &= 0,37 pl; & V_2 &= 0,37 pl; & Y &= 0 \end{aligned} \right\} 284.$$

Die hier gefundenen Spannungen  $O$  und  $U$  sind die größten Stabspannungen, welche durch gleichförmig vertheilte Nutzlast entstehen. Wird statt  $p$  das Eigengewicht  $g$  für die Längeneinheit eingeführt, so ergeben sich die durch das Eigengewicht entstehenden Stabspannungen.

201.  
Ungünstigste  
Beanspruchung  
der  
Gitterstäbe.

γ) Ungünstigste Beanspruchung der Diagonale und der Pfosten. Den allgemeinen Ausdruck für die Diagonalspannung giebt die Gleichung 281.  $Y$  wird seinen größten positiven Werth (Zug) haben, wenn  $P_2$  möglichst groß,  $P_1$  möglichst klein ist;  $Y$  wird seinen größten negativen Werth (Druck) erreichen, wenn  $P_2$  mög-

Fig. 246.



licht klein,  $P_1$  möglichst groß ist. Wird als Nutzlast eine gleichmäßig vertheilte Last eingeführt, so kann man, wenn  $a = b$  ist, mit einer für die Zwecke des Hochbaues hinreichenden Sicherheit annehmen, dass die Diagonale den größten Zug erleidet, wenn der Punkt  $E$  am Fußpunkte derselben mit  $p a + 0,37 g l$  belastet ist, der Punkt  $C$  (in der Lothrechten des Kopfes der Diagonalen) nur das Eigengewicht  $0,37 g l$  trägt. Bei der umgekehrten Belastung dagegen erleidet die Diagonale ihren größten Druck. Demnach wird

$$Y_{\max} = \pm \frac{p a^2}{l \sin \beta} \dots \dots \dots 285.$$

Ferner ist hier, wo die Lasten unten wirken,  $V_1 = P_1$ , d. h.

$$V_{1\max} = 0,37 (g + p) l \text{ und } V_{1\min} = 0,37 g l \dots \dots \dots 286.$$

Auch  $V_2$  erleidet den größten Zug bei voller Belastung; da bei dieser Belastung  $Y = 0$  ist, so wird auch

$$V_{2\max} = 0,37 (g + p) l \text{ und } V_{2\min} = 0,37 g l \dots \dots \dots 287.$$

δ) Die Querschnittsbestimmung ist in genau gleicher Weise vorzunehmen, wie dies in Art. 198 (S. 200) beim Dreiecksträger gezeigt ist. Die Maximalmomente in der geraden Gurtung finden bei  $C$  und  $E$  statt und sind genau genug für  $a = b$  nach der Zusammenstellung in Art. 165 (S. 166)  $M = p \left(\frac{l}{3}\right)^2 \frac{1}{10} = \frac{p l^2}{90}$ . Die Abmessungen  $b$  und  $h$  des rechteckigen Querschnittes (für Holz) sind demnach aus der Gleichung zu bestimmen:

$$\tau_{\max} = K = \pm \left( \frac{U}{b h} + \frac{6 M_{\max}}{b h^2} \right).$$

Die Dreieck- und Trapezträger mit einer größeren Anzahl von Lastpunkten werden durch Einfügen von Dreiecken in die oben (Fig. 241 u. 242) dargestellten Trägerformen hergestellt. Die Berechnung entspricht der vorstehenden, kann aber auch bequem nach der Momentenmethode vorgenommen werden.

202.  
Querschnitts-  
bestimmung.

#### Literatur.

Bücher über »Statik der Stützen und Träger«.

- KLOSE, H. A. Theorie der eisernen Träger mit Doppelflanchen. Hannover 1862.  
 RITTER, A. Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brücken-Constructionen. Berlin 1863. —  
 5. Aufl.: Hannover 1894.  
 ASSMANN, G. Hilfstabeln zur Berechnung eiserner Träger und Stützen. Berlin 1865.  
 FRANCIS, J. B. On the strength of cast-iron pillars. New-York 1866.  
 KLERITJ, L. J. Abhandlung über genauere Berechnung und Construction einiger Träger von gleichem Widerstande. Freiberg 1869.  
 LIPPICH, F. Theorie des continuirlichen Trägers constanten Querschnittes. Elementare Darstellung der von CLAPEYRON und MOHR begründeten analytischen und graphischen Methoden und ihres Zusammenhanges. Wien 1871.  
 RITTER, W. Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken etc. Zürich 1871. —  
 2. Aufl. 1883.  
 KECK, W. Ueber die Ermittlung der Spannungen in Fachwerksträgern, mit Hilfe der graphischen Statik. Hannover 1872.  
 WEYRAUCH, J. Allgemeine Theorie und Berechnung der continuirlichen und einfachen Träger. Leipzig 1873.  
 TETMAJER, L. Die äußern und innern Kräfte an statisch bestimmten Brücken- und Dachstuhl-Constructionen. Zürich 1875.  
 PINZGER, L. Neue Methode zur Berechnung von Trägern mit unsymmetrischen Querschnittsformen. München 1879.