



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik der Hochbau-Constructions

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

1) Verfahren für die Bestimmung der Stabspannungen

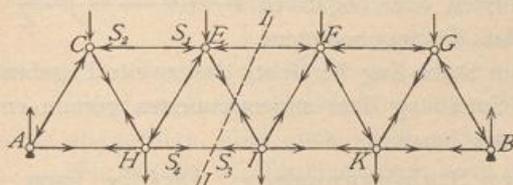
[urn:nbn:de:hbz:466:1-77733](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77733)

1) Verfahren für die Bestimmung der Stabspannungen.

Die Ermittlung der Spannungen in den einzelnen Stäben des Fachwerkes erfolgt nach dem allgemeinen Verfahren, welches in Art. 4 (S. 6) angegeben worden ist. Man untersucht den Gleichgewichtszustand irgend eines Theiles des Fachwerkes unter der Einwirkung aller an demselben thätigen Kräfte. In jeder Stabaxe wirken zwei Kräfte, welche einander an Gröfse gleich sind, aber entgegengesetzten Sinn

169.
Erläuterungen.

Fig. 190.



haben: die Stabspannungen. Im Stabe CE (Fig. 190) wird von C eine Kraft S_1 auf E übertragen, und eine gleich große Kraft S_2 von E auf C ; beide sind Druck. In HI wird von H auf I ein Zug S_3 , von I auf H ein gleich großer Zug S_4 ausgeübt. In Fig. 190 sind alle auf die Knotenpunkte wirkenden Stabspannungen angegeben.

Betrachtet man nur einen Theil des Trägers, etwa den links vom Schnitte II gelegenen, so wirken auf denselben außer den äußeren Kräften die Stabspannungen. Alle Stäbe, deren beide Knotenpunkte dem betreffenden Theile angehören, enthalten zwei Kräfte, die einander das Gleichgewicht halten, also für die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nicht in Betracht kommen. In anderer Lage sind diejenigen Stäbe, welche vom Schnitte II getroffen werden, von denen also nur ein Knotenpunkt links vom Schnitte liegt. Nur diejenigen Spannungen dieser Stäbe, welche auf die dem betreffenden Trägertheile angehörnden Knotenpunkte wirken, sind als auf das Bruchstück wirkende Kräfte einzufetzen; so viele Stäbe also durch den Schnitt getroffen werden, so viele Stabspannungen sind in den Gleichgewichtsgleichungen vorhanden, welche für den Trägertheil aufzustellen sind. Diese Spannungen sind die unbekannt Kräfte, für deren Ermittlung die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen zu Gebote stehen. Da für Kräfte in der Ebene drei Gleichgewichtsbedingungen vorhanden sind, so ist die Aufgabe auf dem angegebenen, rein statischen Wege nur dann lösbar, wenn sich bei jedem Schnitte nur drei unbekannt Stabspannungen ergeben.

Ein solches Fachwerk, bei welchem sämtliche Stabspannungen durch die Gesetze des Gleichgewichtes starrer Körper bestimmbar sind, nennt man statisch bestimmt; reichen diese Gesetze dazu nicht aus, so ist das Fachwerk statisch unbestimmt. In letzterem Falle sind die Stabspannungen auch noch von den elastischen Formänderungen abhängig. Es ist aus verschiedenen Gründen empfehlenswerth, im Hochbau nur statisch bestimmte Fachwerke zu verwenden.

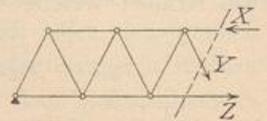
Unter Berücksichtigung des Vorstehenden ist nun folgendermaßen zu verfahren. Das Fachwerk wird an derjenigen Stelle durchschnitten gedacht, an welcher man die inneren Kräfte, hier die Stabspannungen, kennen lernen will; an den Schnittstellen werden die inneren Kräfte angebracht und auf das Bruchstück die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen angewendet. Da hier die Stäbe, wie angenommen wurde, um die Knotenpunkte frei drehbar sind, so muß jede Stabspannung mit der Richtung des betreffenden Stabes zusammenfallen. Sonach ergibt sich die folgende Regel.

170.
Verfahren
im
Allgemeinen.

Man denke sich den Träger so durchgeschnitten, daß die Stäbe, deren Spannung man sucht, durch den Schnitt getroffen werden, bringe die mit den Stabrichtungen zusammenfallenden Spannungen dieser Stäbe als vorläufig unbekannte Kräfte an (Fig. 191) und stelle für das Bruchstück die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf.

Die Stäbe werden gezogen oder gedrückt; im ersten Falle wirkt die Spannung vom Knotenpunkte ab (Y und Z in Fig. 191); im zweiten Falle wirkt sie nach dem Knotenpunkt hin (X in Fig. 191). Da man beim Beginne der Berechnung vielfach noch nicht den Sinn der Beanspruchung kennt, so werden wir zunächst stets alle Spannungen als Zugspannungen, d. h. vom Knotenpunkte ab gerichtet, einführen; die Rechnung ergibt entweder einen positiven oder negativen Werth. Das erstere Ergebniss bedeutet, daß die angenommene Pfeilrichtung die richtige war, d. h. daß im Stabe Zug herrscht; das zweite Ergebniss bedeutet, daß der Sinn der wirklichen Spannung dem angenommenen gerade entgegengesetzt ist, d. h. daß im Stabe Druck herrscht.

Fig. 191.



171.
Verfahren
durch
Rechnung.

a) Analytische Bestimmung der Stabspannungen. Dieselbe kann in zweifacher Weise geschehen: entweder durch Aufstellung aller Gleichgewichtsbedingungen oder nach der folg. Momenten-Methode.

172.
Gleichgewichts-
bedingungen.

a) Die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für das Bruchstück (Fig. 192), welches, wie in Art. 170 angegeben, behandelt ist, ergibt drei Gleichungen, welche nach Art 6 (S. 8) lauten:

$$\left. \begin{aligned} X \cos \sigma + Y \sin \tau + Z = 0; & \quad D_0 - P_1 - P_2 + X \sin \sigma - Y \cos \tau = 0 \\ D_0 \cdot 2a - P_1 a - Zz = 0 & \end{aligned} \right\} \dots 211.$$

Als Drehpunkt für die dritte Gleichung ist der Punkt C gewählt; alsdann haben X , Y und P_2 kein statisches Moment, weil sie für diesen Drehpunkt keinen Hebelsarm haben.

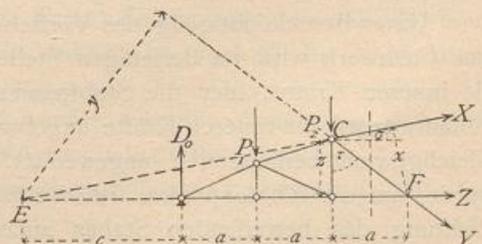
Der angegebene Weg führt stets, wenn nur 3 Unbekannte, also 3 geschnittene Stäbe vorhanden sind, zum Ziele; er hat den Nachtheil, daß meistens 3 Gleichungen gelöst werden müssen, selbst wenn man nur eine Spannung kennen lernen will.

173.
Ritter'sches
Verfahren.

b) Das Charakteristische der von Ritter angegebenen Momenten-Methode ist, daß man für jede Spannung nur eine Gleichung erhält; das Mittel dazu bietet die Gleichgewichtsbedingung, welche besagt, daß die algebraische Summe der statischen Momente aller Kräfte, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene, gleich Null sein muß. Wird der Momentenpunkt so gewählt, daß zwei von den drei Unbekannten das Moment Null haben, so bleibt in der Gleichung nur eine Unbekannte. Das statische Moment jeder der beiden Kräfte ist aber gleich Null für den Schnittpunkt beider Krafrichtungen, weil für diesen Punkt jede der beiden Kräfte den Hebelsarm Null hat. Das Verfahren ist demnach das folgende.

Man lege durch den Träger einen Schnitt, so daß nur 3 Stäbe mit unbekanntem Spannungen geschnitten werden, bringe diese Spannungen und alle am

Fig. 192.



Eben so kann man auch X und Z zu einer Mittelkraft vereinen und erhält die ebenfalls in Fig. 194 gezeichnete Construction.

Die angegebene Construction giebt zugleich Aufschluss darüber, ob die Stäbe gezogen oder gedrückt werden. Da die am Bruchstück wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sind, so haben sie nach Art. 15 (S. 12) denselben Umfahrungsinn, und demnach ist der Sinn aller im Kraftpolygon vorkommenden Kräfte bekannt, wenn der Sinn einer derselben bekannt ist. Hier ist stets der Sinn von Q bekannt; denn dies ist die Querkraft für den bezüglichen Querschnitt. Q hat den Sinn von α nach β ; also ist in Fig. 193 Z von β nach γ , d. h. vom Knotenpunkt L ab gerichtet, Y von γ nach δ und X von δ nach α gerichtet. X wirkt also nach dem Knotenpunkte E hin, ist demnach Druck, während Z und Y Zug bedeuten. Richtung, Gröfse und Lage der Kraft Q für eine gegebene Belastung sind mit Hilfe des Kraft- und Seilpolygons leicht bestimmbar. (Siehe Art. 153, S. 146.)

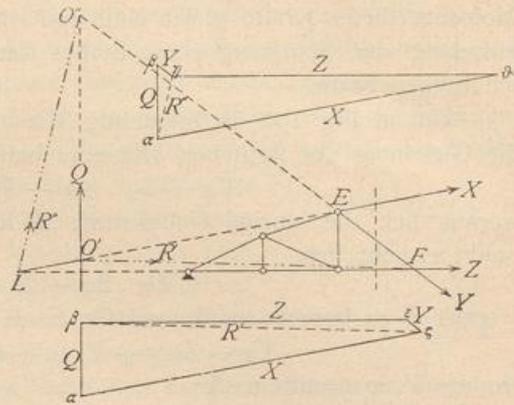
b) Die Vieleckmethode ist von *Cremona* angegeben worden.

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein. Randstäbe seien Stäbe, welche zwei auf einander folgende äußere Knotenpunkte mit einander verbinden, also $I II, II III \dots$ in Fig. 195; Zwischenstäbe seien Stäbe, welche zwei nicht auf einander folgende äußere Knotenpunkte verbinden, also $II V, III V$ in Fig. 195.

Da alle auf das Fachwerk wirkenden äußeren Kräfte im Gleichgewichte sind, so ist für dieselben ein geschlossenes Kraftpolygon möglich, welches, wenn alle äußeren Kräfte nach Gröfse und Richtung gegeben sind, leicht construirt werden kann. Außerdem sind an jedem Knotenpunkte die an demselben wirkenden Kräfte für sich im Gleichgewicht; sonach ist für jeden dieser Knotenpunkte ein weiteres, sich schließendes Kraftpolygon zweiter Ordnung möglich. An jedem Knotenpunkte wirken: eine äußere Kraft, die im besonderen Falle Null sein kann, und die Spannungen der Stäbe, welche sich in ihm schneiden, also im Knotenpunkte II die Kräfte z, B, C, a .

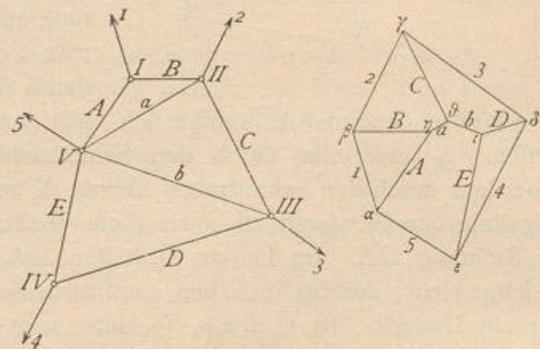
In den meisten der kleinen Kraftpolygone kommt nun je eine äußere Kraft vor, welche bereits im großen Hauptpolygon der äußeren Kräfte enthalten ist; es wird also offenbar möglich sein, jedes kleine Kraftpolygon so an das große zu legen, daß die beiden gemeinsame äußere Kraft durch dieselbe Gerade dargestellt wird. Da ferner jeder Stab zu zwei Knotenpunkten gehört, so kommt jede Stabspannung

Fig. 194.



176.
Cremona'sches
Verfahren.

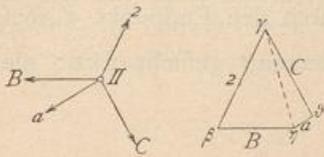
Fig. 195.



in zwei Kraftpolygone zweiter Ordnung vor. Es wird nun durch zweckmäßige Anordnung möglich, die kleinen Kraftpolygone so in das große einzufachtern, daß nicht nur jede äußere Kraft, sondern auch jede Stabspannung nur einmal im Kräftezuge vorkommt, d. h. auch die kleinen Kraftpolygone hängen dann so zusammen, daß die zwei gemeinsame Stabspannung durch dieselbe Gerade dargestellt wird.

Für die Construction der kleinen Kraftpolygone ist Folgendes zu beachten. Wenn, wie hier, die Richtung sämtlicher Kräfte bekannt ist und das Kraftpolygon wegen des Gleichgewichtes der Kräfte sich schließt, so ist die Construction desselben stets möglich, falls am Knotenpunkte nur zwei unbekannte Kräfte vorhanden sind. Denn seien etwa in Fig. 196 B und a bekannt, a und C unbekannt, so erfordert

Fig. 196.



das Gleichgewicht, daß die Mittelkraft von a und C der bekannten Mittelkraft von a und B der Größe nach genau gleich ist. Die bekannte Mittelkraft von a und B ist aber die Verbindungslinie $\gamma\delta$ im Kraftpolygon, und dieselbe ist im entgegengesetzten Sinne genommen ohne Schwierigkeit in die beiden Seitenkräfte C und a zu zerlegen, indem durch den einen Endpunkt, etwa γ , eine Parallele zu C , durch den anderen Endpunkt, etwa δ , eine Parallele zu a gezogen wird. Der Schnittpunkt ϕ ergibt $\gamma\phi = C$ und $\phi\delta = a$. Alsdann ist $\phi\gamma\delta\phi$ das kleine Kraftpolygon für Punkt II . Man muß demnach die kleinen Kraftpolygone so construiren, daß sich stets nur 2 Unbekannte ergeben. Zu diesem Zwecke beginnt man mit demjenigen Knotenpunkte, in welchem sich nur 2 Stäbe schneiden, hier (Fig. 195) also etwa mit I . Die äußere Kraft ist bekannt; unbekannt sind demnach nur A und B und nach Obigem leicht zu ermitteln. Man geht nun zu einem Knotenpunkt über, von welchem man wiederum alle Kräfte mit Ausnahme von zweien kennt, hier zu II . Bekannt sind hier a und B , unbekannt C und a , demnach leicht ermittelt. So schreitet man weiter. Ein Knotenpunkt, in welchem sich nur 2 Stäbe schneiden, ist bei den in der Praxis üblichen Gitterträgern stets vorhanden.

Damit nun jede äußere Kraft und jede Stabspannung nur einmal in dem entstehenden Kräftezuge — dem Kräfteplan — vorkommen, ist folgende Regel zu befolgen. Man vereine sämtliche äußeren Kräfte zu einem geschlossenen Kraftpolygon, indem man sie in der Folge der Knotenpunkte oder, wie man sagt, in cyclischer Reihenfolge an einander legt, und ziehe nun durch die Eckpunkte dieses Kraftpolygons Parallelen zu den Randstäben derart, daß die Parallele zu einem Randstabe, etwa zu A , durch denjenigen Eckpunkt des großen Kraftpolygons geht, welcher zwischen den beiden äußeren Kräften liegt, zwischen denen der betreffende Randstab im Fachwerk sich befindet. Der Randstab A liegt im Fachwerk zwischen den äußeren Kräften 1 und 5 ; die Parallele zu A wird also durch den Punkt a zwischen 1 und 5 gezogen; eben so die Parallele zum Randstab B durch β zwischen 1 und 2 etc. Unter Benutzung der hier gezogenen Parallelen construirt man nun, wie oben angegeben, die kleinen Kraftpolygone; alsdann erhält man einen Linienzug zwischen den Randstäben, in welchem jede einzelne Linie eine Zwischenstabspannung darstellt und in welchem jede Zwischenstabspannung nur einmal vorkommt. Die auf den Parallelen zu den Randstäben abgechnittenen Längen geben die Spannungen der Randstäbe an.

Der Sinn der Stabspannungen wird hier genau in derselben Weise aus dem Kraftpolygon für einen Knotenpunkt ermittelt, wie im vorhergehenden Artikel angegeben ist.

c) Verfahren von Zimmermann für Fachwerke, welche durch parallele äußere Kräfte beansprucht werden.

177.
Zimmermann's
Verfahren.

Die wagrechte Projection des Abstandes je zweier Knotenpunkte derselben Gurtung sei constant; sie sei gleich a (abgesehen von derjenigen der zunächst an den Auflagern gelegenen Knotenpunkte der unteren Gurtung). In einem Stabe der oberen Gurtung (Fig. 197), etwa im Stabe $II III$, ist die Spannung bei einer Belastung, welche für den Punkt 3 das Moment M_3 erzeugt,

$$O_3 = - \frac{M_3}{r_3}.$$

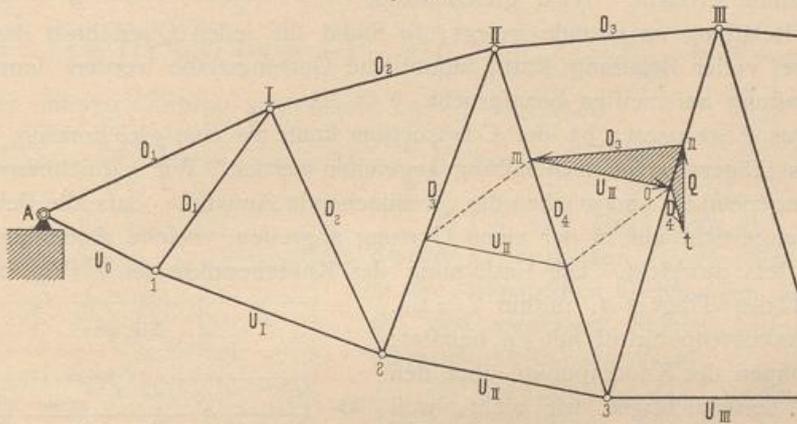
Das Vorzeichen soll zunächst unberücksichtigt gelassen und nur die absolute Größe von O_3 in das Auge gefaßt werden. Alsdann ist

Parallelen die Spannungen der Gurtungsstäbe in demselben Maßstabe an, nach welchem $\frac{M}{a}$ aufgetragen ist.

In Fig. 197 sind für die Stäbe der oberen und unteren Gurtung die Stabspannungen nach vorstehendem Verfahren ermittelt.

Man kann nach diesem Verfahren auch die Spannungen der Gitterstäbe leicht finden. Denkt man in Fig. 198 einen Schnitt durch die Stäbe O_3 , U_{II} und D_4 gelegt, so wirken auf das links von diesem Schnitt liegende Trägerstück vier Kräfte, welche mit einander im Gleichgewicht sein müssen: die Mittelkraft aller auf das Trägerstück wirkenden Kräfte, d. h. die Querkraft Q , ferner die Spannungen O_3 , U_{II} , D_4 der drei vom Schnitt getroffenen Stäbe. Für diese vier Kräfte ergibt sich demnach ein sich schließendes Kraftpolygon. Bekannt sind O_3 und U_{II} nach Größe und Richtung, Q und D_4 nach ihrer Richtung. Man lege U_{II} in m an O_3 und ziehe durch den Endpunkt o dieser Linie die Parallele zu D_4 , durch n eine Parallele zu Q ,

Fig. 198.



d. h. die Lothrechte; beide Parallelen schneiden sich in t ; alsdann ist $ot = D_4$ und $tn = Q$. In Fig. 198 ist das Kraftpolygon schraffirt³³⁾. Die Art der Beanspruchung ergibt sich, wie stets, aus dem Umlaufsinne im Kraftpolygon.

Wenn einzelne Felder in der wagrechten Projection andere Knotenpunktabstände haben, als a , so ändert dies im Grundgedanken nichts; im Einzelnen wird die Construction etwas anders. Die Werthe $\frac{M}{a}$ kann man durch Rechnung oder durch Construction bestimmen.

2) Parallelträger mit Netzwerk oder zwei Scharen von Diagonalen.

a) Berechnung der Spannungen in den Gurtungen. Um diese Spannungen für eine beliebige Belastung zu ermitteln, bezeichnen wir die Mittelkraft aller auf das Bruchstück links vom Schnitte II (Fig. 199) wirkenden äußeren Kräfte mit Q . Für irgend einen Stab CE der oberen Gurtung ist F der Momenten- oder conjugirte Punkt, und das Moment der äußeren Kräfte in Bezug auf diesen Punkt ist $M = Q\eta$. Daraus folgt als Bedingungsgleichung:

$$0 = M + Xh, \text{ woraus } X = -\frac{M}{h} \dots \dots \dots 212.$$

³³⁾ Daß in Fig. 198 der Endpunkt o von U_{II} auf die Diagonale $III3$ fällt, ist zufällig.

178.
Berechnung
der Gurtungs-
spannungen.