Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

a) Kuppeldächer

urn:nbn:de:hbz:466:1-77733

5. Kapitel.

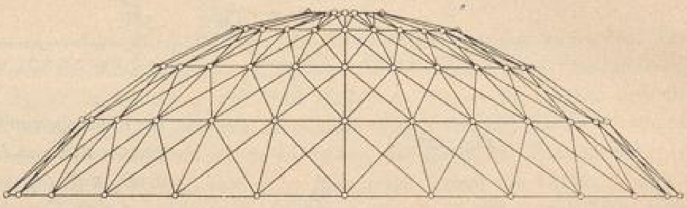
Kuppel-, Zelt- und Thurmdächer.

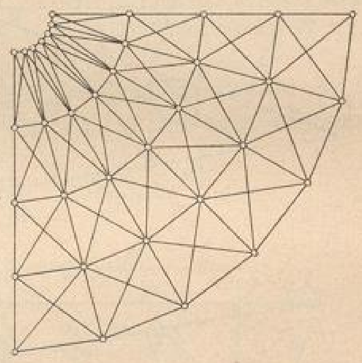
a) Kuppeldächer.

240. Allgemeines. Die Kuppelfläche entſteht durch Drehung einer Curve um eine lothrechte Mittelaxe; ſie iſt alſo eine Umdrehungsfläche.

Während man früher die Kuppeldächer aus einer Anzahl radial geſtellter Binder conſtruirte, ſind bei den neueren, von *Schwedler* erfundenen und vielfach mit beſtem Erfolg ausgeführten Kuppeldächern ſämmtliche Conſtructionstheile in die Kuppelfläche verlegt. Eine Anzahl von Sparren wird in der Richtung der Meridiane der Kuppelfläche angeordnet und in verſchiedenen Höhen durch wagrechte Ringe mit einander verbunden; letztere ſind den Parallelkreiſen der Kuppelfläche eingeſchriebene Vielecke. In den ſo entſtehenden Vierecken ſind alsdann, wegen der ungleichmäſsigen Belaſtung, noch Diagonalen angeordnet, und zwar meiſtens gekreuzte Zugdiagonalen. Gewöhnlich iſt eine Belaſtung der Kuppelmitte durch eine ſog. Laterne vorhanden. Die ganze Conſtruction bildet demnach ein der Kuppelfläche eingeſchriebenes Polyeder; in Fig. 328 ſind Anſicht und Grundriſs derſelben dargeſtellt (letzterer nur für ein Viertel der Kuppel). Man nennt ſolche Kuppeln *Schwedler*'ſche oder Flechtwerkkuppeln.

Fig. 328.





Die von *Schwedler*[35]) angegebene Berechnungsweiſe dieſer Kuppeln kann nur als eine Annäherungsrechnung betrachtet werden: ſie legt nur lothrechte Laſten und der Hauptſache nach gleichförmig vertheilte Belaſtung ganzer oder halber Ringzonen zu Grunde. Bei dieſen Annahmen wird die Berechnung ſehr einfach, führt aber trotzdem zu Ergebniſſen, welche ſich in einer groſsen Zahl ausgeführter Conſtructionen ſeit einer längeren Reihe von Jahren vollauf bewährt und allen Kräfteangriffen gewachſen gezeigt haben. Deſshalb ſoll dieſe Berechnungsweiſe, welche in den allermeiſten Fällen für die Praxis genügt, nachſtehend vorgeführt werden (Art. 241 bis 245).

Eine neuere, auf der Theorie des Raumfachwerkes beruhende Berechnungs-

35) In: Die Conſtruction der Kuppeldächer. Zeitſchr. f. Bauw. 1866, S. 7.

weiſe der Flechtwerkkuppeln, und zwar für ganz beliebige Belaſtungen, iſt von *Müller-Breslau* [36]) aufgeſtellt worden.

Nach Vorführung der *Schwedler*'ſchen Berechnungsweiſe ſollen in Art. 246 bis 249 die Grundlagen derjenigen von *Müller-Breslau* angegeben werden.

1) Berechnungsweiſe von *Schwedler*.

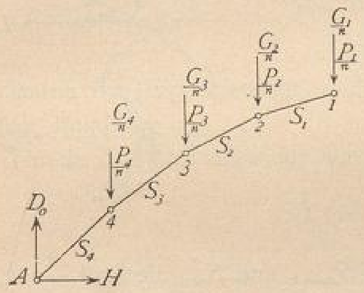
α) Belaſtungen und Auflagerdrücke.

Die hier zu betrachtenden Kuppeln ſind ſo flach, daſs der Winddruck nur von geringer Bedeutung iſt; derſelbe ſoll deſshalb, unter Zugrundelegung einer mittleren Dachneigung, in allen Theilen der Kuppel conſtant angenommen werden. Hier wird nur die lothrechte Seitenkraft 𝔳 (vergl. Art. 30, S. 23) des Winddruckes berückſichtigt; die in die Dachfläche fallende Seitenkraft kann vernachläſſigt werden. Endlich iſt es empfehlenswerth, alle Belaſtungen auf das Quadr.-Meter der Grundfläche, alſo der wagrechten Projection des Daches, zu beziehen. 241. Belaſtungen.

Die Laſten greifen in den Knotenpunkten der Conſtruction an; demnach ſind die auf die einzelnen Knotenpunkte entfallenden Flächen zu berechnen und mit dieſen die Belaſtungen für die Einheit der Grundfläche zu multipliciren.

Wären keine Ringe angeordnet, ſo würden die einzelnen Sparren ſchiefe Drücke auf die Auflager ausüben und von dieſen erleiden; durch einen Ring, gegen welchen ſich ſämmtliche Sparrenfüſse ſetzen, den ſog. Mauerring oder Fuſsring, werden die wagrechten Seitenkräfte der in den unterſten Sparrenſtäben (S_4 in Fig. 329) vorhandenen Spannungen aufgehoben, ſo daſs bei den angenommenen Belaſtungen als Auflagerdrücke nur lothrechte Kräfte wirken. Entſprechend den im folgenden Artikel vorzuführenden Annahmen braucht die Berechnung der Auflagerdrücke nur für Belaſtungen vorgenommen zu werden, bei welchen ganze Ringzonen belaſtet ſind. Wenn der Grundriſs der Kuppel ein regelmäſsiges n-Eck iſt, und demnach n Sparren vorhanden ſind, ſo kann angenommen werden, daſs bei den erwähnten Belaſtungen alle Sparren gleiche Laſten tragen. Die Kuppel trage eine Laterne, deren Gewicht im Eigengewicht der erſten Ringzone mit enthalten ſei. Die Eigengewichte der ganzen Ringzonen ſeien bezw. (Fig. 329) G_1, G_2, G_3, G_4 ... und die zufälligen Laſten der ganzen Ringzonen P_1, P_2, P_3, P_4 ...; alsdann iſt, wenn der Stützendruck auf jeden Sparren D_0 beträgt, für volle Belaſtung der ganzen Dachfläche 242. Auflagerdrücke.

Fig. 329.



$$n D_0 = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \ldots + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \ldots = \Sigma\,(G) + \Sigma\,(P).$$

Wenn etwa nur die drei oberſten Zonen voll belaſtet ſind, ſo wird

$$n D_0' = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \ldots + P_1 + P_2 + P_3$$

ſein. Auf dieſe Art ſind die Auflagerdrücke leicht zu ermitteln.

---

36) In: Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Centralbl. d. Bauverw. 1892, S. 201. (Auch als Sonderabdruck erſchienen.) — Vergl. auch:

KOFAHL. Beitrag zur Theorie der Kuppeldächer. Zeitſchr. d. Ver. deutſch. Ing. 1896, S. 1133; 1898, S. 713.

HÜBNER. Bemerkungen über das räumliche Fachwerk. Ebendaſ. 1897, S. 477, 632, 634.

MÜLLER-Breslau, H. Beitrag zur Theorie der Kuppel- und Thurmdächer etc. Ebendaſ. 1898, S. 1205, 1233.

β) Stabſpannungen.

243. Berechnung der Stabſpannungen.

𝔄) Ungünſtigſte Beanſpruchung der einzelnen Stäbe. Es ſollen, nach *Schwedler*, für die Grenzen der Spannungen die folgenden vereinfachenden Annahmen gemacht werden:

𝔞) die Sparren erhalten den gröſsten Druck, wenn die ganze Kuppel voll belaſtet iſt;

𝔟) ein Ring erhält ſeinen gröſsten Zug, wenn der innerhalb deſſelben befindliche Kuppeltheil voll belaſtet, der Ring ſelbſt mit ſeiner Zone aber unbelaſtet iſt; bei der entgegengeſetzten Belaſtungsart treten die entgegengeſetzten Grenzen ein;

𝔠) die Diagonalen zwiſchen zwei Sparren erhalten ihren gröſsten Zug, wenn die halbe Kuppel auf einer Seite des durch die Mitte der Diagonalen gehenden Durchmeſſers voll, die andere halbe Kuppel nur durch das Eigengewicht belaſtet iſt.

𝔅) Spannungen in den Sparren. Wir betrachten nur zwei Belaſtungsarten, nämlich die Belaſtung der ganzen Kuppel durch zufällige Laſt und die Belaſtung der Kuppel durch Eigengewicht. Die zweite Belaſtungsart ergiebt die Minimalſpannungen. Die Maximalſpannungen der Sparren ſind die Summen der bei den beiden angeführten Belaſtungsarten ſich ergebenden Spannungen. Die Formeln für beide Belaſtungsarten unterſcheiden ſich nur durch die Gröſse der Laſten.

Fig. 330.

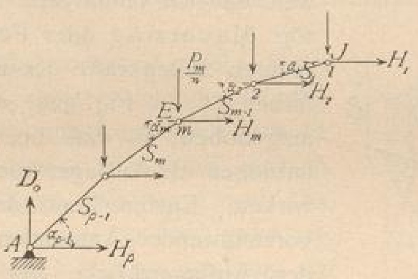
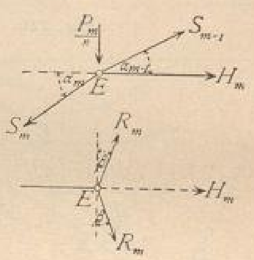


Fig. 331.



Was zunächſt die zufällige Belaſtung betrifft, ſo ſind im m-ten Knotenpunkte (vom Laternenringe an gerechnet) in E (Fig. 330 u. 331) folgende Kräfte im Gleichgewicht: die Spannungen der Sparren S_{m-1} und S_m, die Laſt $\frac{1}{n} P_m$, endlich die beiden Ringſpannungen R_m. Letztere ſind einander, der Symmetrie wegen, gleich und haben in der wagrechten Ebene des m-ten Ringes die Mittelkraft H_m. Die algebraiſche Summe der lothrechten Kräfte für den Punkt E iſt gleich Null; mithin

$$0 = \frac{1}{n} P_m + S_m \sin \alpha_m - S_{m-1} \sin \alpha_{m-1},$$

woraus

$$S_m = \frac{S_{m-1} \sin \alpha_{m-1}}{\sin \alpha_m} - \frac{1}{n} \frac{P_m}{\sin \alpha_m}.$$

Für den erſten Knotenpunkt, den Knotenpunkt am Laternenringe, für $\mathfrak{J}$, iſt $S_{m-1} = 0$; mithin folgt der Reihe nach für $m = 1, 2, 3 \ldots$

$$S_1 = -\frac{1}{n} \frac{P_1}{\sin \alpha_1}; \quad S_2 = -\frac{1}{n} \frac{P_1 \sin \alpha_1}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} - \frac{1}{n} \frac{P_2}{\sin \alpha_2} = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2};$$

$$S_3 = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2} \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} - \frac{1}{n} \frac{P_3}{\sin \alpha_3} = -\frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3};$$

oder allgemein

$$S_m = -\frac{1}{n \sin \alpha_m} \sum_1^m (P) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 334.$$

Eben ſo ergiebt ſich die Spannung in den Sparren für eine Belaſtung durch das Eigengewicht zu

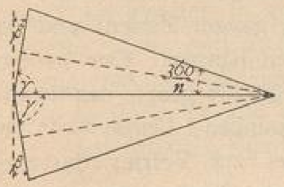
$$S_1' = -\frac{G_1}{n \sin \alpha_1};\quad S_2' = -\frac{(G_1 + G_2)}{n \sin \alpha_2};\ \ldots\ S_m' = -\frac{\sum_1^m (G)}{n \sin \alpha_m} \quad . \quad 335.$$

𝔈) Spannungen in den Ringen. Die Gleichgewichtsbedingung, nach welcher die algebraiſche Summe der wagrechten Kräfte im Punkte E gleich Null iſt, lautet (Fig. 331):

$0 = H_m + S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} - S_m \cos \alpha_m$, woraus $H_m = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1}$.

Da H_m die Mittelkraft der beiden Ringſpannungen R_m iſt, ſo ergiebt ſich $H_m = 2 R_m \sin \beta$, woraus $R_m = \frac{H_m}{2 \sin \beta}$. Nun iſt (Fig. 332) $\beta = \frac{360^0}{2n} = \frac{\pi}{n}$,

Fig. 332.



ſonach $R_m = \frac{H_m}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$. Wird in dieſe Gleichung der für H_m gefundene Werth eingeſetzt, ſo folgt

$$R_m = \frac{S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1}}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad 336.$$

Wir beſtimmen nach Gleichung 336 die Ringſpannung durch das Eigengewicht und die Maximal- und Minimal-Ringſpannung durch zufällige Belaſtung.

Durch das Eigengewicht wird

$$R_m^g = \frac{-\frac{\sum_1^m (G) \cos \alpha_m}{n \sin \alpha_m} + \frac{\sum_1^{m-1} (G) \cos \alpha_{m-1}}{n \sin \alpha_{m-1}}}{2 \sin \frac{\pi}{n}},$$

$$R_m^g = -\frac{\sum_1^m (G) \operatorname{cotg} \alpha_m - \sum_1^{m-1} (G) \operatorname{cotg} \alpha_{m-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \ldots\ldots \quad 337.$$

Man erhält

$$\left.\begin{array}{l}
\text{für den Laternenring } (m = 1)\text{: } R_1^g = -\dfrac{G_1 \operatorname{cotg} \alpha_1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}; \\[2ex]
\text{für den Ring 2 } (m = 2)\text{: } R_2^g = -\dfrac{(G_1 + G_2) \operatorname{cotg} \alpha_2 - G_1 \operatorname{cotg} \alpha_1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}; \\[2ex]
\text{für den Ring 3 } (m = 3)\text{: } R_3^g = -\dfrac{(G_1 + G_2 + G_3) \operatorname{cotg} \alpha_3 - (G_1 + G_2) \operatorname{cotg} \alpha_2}{2 n \sin \frac{\pi}{n}},
\end{array}\right\} \quad 338.$$

etc.

Für den Mauerring ist S_m, also das erste Glied im Zähler gleich Null; mithin, wenn für den Auflagerpunkt $m = \rho$ ist,

$$R_\rho^g = \frac{\sum_1^{\rho-1} (G) \operatorname{cotg} \alpha_{\rho-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{(G_1 + G_2 + \ldots + G_{\rho-1}) \operatorname{cotg} \alpha_{\rho-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \ldots \quad 339.$$

Um die durch zufällige Belastung erzeugten Ringspannungen zu ermitteln, setzen wir in die Gleichung 336 die Werthe für S_m und S_{m-1} ein. Es soll $\mathfrak{S}_1^m (P)$ die zwischen den Knotenpunkten 1 und m befindlichen zufälligen Lasten bezeichnen, wobei $\mathfrak{S}$ ausdrückt, dass nicht alle Knotenpunkte $1 - m$ belastet zu sein brauchen; im Gegensatz dazu soll $\sum_1^m (P)$ andeuten, dass alle Knotenpunkte von 1 bis m belastet sind. Man erhält demnach allgemein für zufällige Belastung aus Gleichung 336

$$R_m = - \frac{\mathfrak{S}_1^m (P) \operatorname{cotg} \alpha_m - \mathfrak{S}_1^{m-1} (P) \operatorname{cotg} \alpha_{m-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \ldots \quad 340.$$

Diese Gleichung ermöglicht die Feststellung der für die einzelnen Ringe ungünstigsten Belastungen (unter Voraussetzung der Belastung ganzer Zonen) und die Ermittelung der grössten Druck- und Zugspannungen in den Ringen. Der grösste Druck wird stattfinden, wenn im Zähler das erste Glied möglichst gross, das zweite Glied möglichst klein ist. Jede Belastung eines der Knotenpunkte 1 bis $(m - 1)$ hat sowohl ein Wachsen des ersten, wie des zweiten Gliedes zur Folge; da aber $\operatorname{cotg} \alpha_{m-1}$ stets grösser ist, als $\operatorname{cotg} \alpha_m$, so wächst das zweite Glied mehr, als das erste, d. h. jede Belastung des Knotenpunktes 1 bis $(m - 1)$ verringert den Druck, vergrössert also den Zug. Die Belastung des Knotenpunktes m vergrössert nur das erste Glied, also den Druck. Die Belastung der ausserhalb des m-ten Ringes liegenden Ringe ist nach der Gleichung ohne Einfluss auf die Spannung im m-ten Ringe. Daraus folgt, dass in den Stäben eines Ringes (des m-ten) der grösste Druck stattfindet, wenn die Knotenpunkte 1 bis $(m - 1)$ unbelastet, die zum Ringe gehörigen Knotenpunkte dagegen belastet sind. Da die Belastung der äusseren Ringe ohne Einfluss ist, so kann man sagen: Grösster Druck findet statt, wenn der innere Kuppeltheil unbelastet, der äussere Kuppeltheil, einschliesslich des betrachteten Ringes, belastet ist. Daraus folgt dann weiter, dass grösster Zug in den Stäben des m-ten Ringes auftritt, wenn nur der innere Kuppeltheil, ausschliesslich der Zone, zu welcher der m-te Ring gehört, belastet ist. Die hier gefundenen Ergebnisse stimmen demnach mit den in Art. 243 (S. 248) gemachten Annahmen über die ungünstigsten Belastungen überein.

Man erhält

$$R_m^{p\,min} = - \frac{P_m \operatorname{cotg} \alpha_m}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_m^{p\,max} = \frac{\sum_1^{m-1} (P) (\operatorname{cotg} \alpha_{m-1} - \operatorname{cotg} \alpha_m)}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \ldots \quad 341.$$

Es ergiebt sich

$$\left.\begin{array}{l} \text{für den Laternenring } (m=1): \quad R_1^{p\,min} = -\dfrac{P_1 \operatorname{cotg} \alpha_1}{2n \sin \dfrac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_1^{p\,max} = 0; \\ \text{für } m=2: \quad R_2^{p\,min} = -\dfrac{P_2 \operatorname{cotg} \alpha_2}{2n \sin \dfrac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_2^{p\,max} = \dfrac{P_1 (\operatorname{cotg} \alpha_1 - \operatorname{cotg} \alpha_2)}{2n \sin \dfrac{\pi}{n}}; \\ \text{für } m=3: \quad R_3^{p\,min} = -\dfrac{P_3 \operatorname{cotg} \alpha_3}{2n \sin \dfrac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_3^{p\,max} = \dfrac{(P_1+P_2)(\operatorname{cotg} \alpha_2 - \operatorname{cotg} \alpha_3)}{2n \sin \dfrac{\pi}{n}}, \end{array}\right\} \quad 342.$$

etc.

$$\text{für den Mauerring: } R_\rho^{p\,min} = 0 \text{ und } R_\rho^{p\,max} = \frac{(P_1+P_2+\ldots+P_{\rho-1}) \operatorname{cotg} \alpha_{\rho-1}}{2n \sin \dfrac{\pi}{n}}. \quad 343.$$

D) Spannungen in den Diagonalen. Neben dem Durchmeffer, welcher für die ungünftigfte Diagonalenbelaftung die belaftete und unbelaftete Kuppelhälfte trennt, liegt ein belafteter und ein unbelafteter Sparren. Nehmen wir nun an, dafs die Spannung im erfteren fo grofs ift, als wenn die ganze Kuppel voll belaftet wäre, im zweiten fo grofs, als wenn die ganze Kuppel nur durch das Eigengewicht belaftet wäre, und machen wir die im Knotenpunkte anfchliefsende Diagonale ftark genug, um den ganzen Spannungsunterfchied zu übertragen, fo wird diefelbe jedenfalls zu ftark, ift alfo als ausreichend zu betrachten.

Im oberften Sparrenftück find die gröfsten und kleinften Druckfpannungen bezw.

$$S_{1max} = -\frac{P_1+G_1}{n \sin \alpha_1} \quad \text{und} \quad S_{1min} = -\frac{G_1}{n \sin \alpha_1}.$$

Die Differenz beider Spannungen ift $\Delta_1 = -\dfrac{P_1}{n \sin \alpha_1}$. Diefelbe foll durch die Diagonale übertragen werden. Bezeichnet man die wirkliche Länge der Diagonale und des Sparrens bezw. mit d und s, fo ift allgemein

$$Y = -\Delta \frac{d}{s};$$

mithin

$$\left.\begin{array}{ll} Y_1 = \dfrac{P_1}{n \sin \alpha_1} \cdot \dfrac{d_1}{s_1}, & Y_2 = \dfrac{P_1+P_2}{n \sin \alpha_2} \cdot \dfrac{d_2}{s_2}, \\ Y_3 = \dfrac{P_1+P_2+P_3}{n \sin \alpha_3} \cdot \dfrac{d_3}{s_3}, & Y_4 = \dfrac{P_1+P_2+P_3+P_4}{n \sin \alpha_4} \cdot \dfrac{d_4}{s_4}, \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad 344.$$

244. Graphifche Ermittelung der Stabfpannungen.

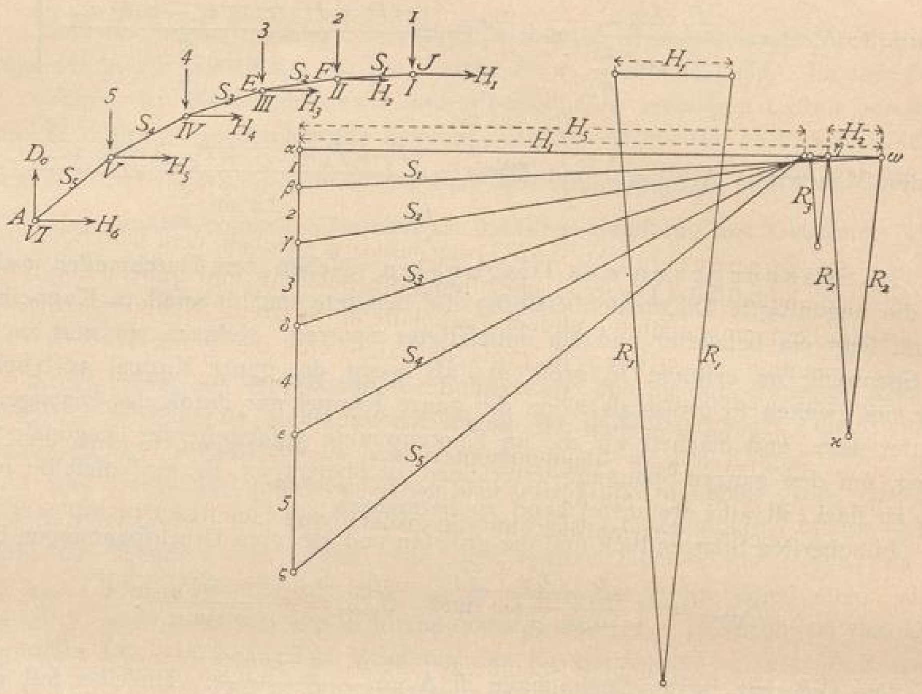
Auf graphifchem Wege laffen fich die Spannungen in den einzelnen Stäben einer Kuppel in folgender Weife ermitteln.

a) Sparrenfpannungen durch das Eigengewicht. Die Laften in den einzelnen Knotenpunkten feien *1, 2, 3, 4, 5* (Fig. 333); man trage diefelben zu einem Kraftpolygon $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ an einander. Im Knotenpunkte *J* wirken *1*, die Sparrenfpannung S_1 und die Mittelkraft H_1 der Ringfpannungen R_1. Die Zerlegung der Kraft *1* nach den beiden Richtungen von S_1 und H_1 ergiebt $\beta\omega = S_1$, $\omega\alpha = H_1$ Am Knotenpunkt *F* wirken nun *2*, S_1, S_2 und H_2; bekannt find jetzt *2* und S_1; man erhält $\gamma\eta = S_2$, $\eta\omega = H_2$. Eben fo ergeben fich die übrigen Sparrenfpannungen.

b) Spannungen in den Sparren durch zufällige Belaftung. Die Conftruction ift in gleicher Weife, wie unter a vorzunehmen, nachdem die in den einzelnen Knotenpunkten wirkenden zufälligen Laften genau wie oben aufgetragen und behandelt find.

c) Ringſpannungen durch das Eigengewicht. Die Zerlegung der für dieſe Belaſtung gefundenen Werthe von H ergiebt ohne Schwierigkeit die Werthe für R_1^g, R_2^g ...., wie in Fig. 333 gezeichnet. Die Conſtruction empfiehlt ſich für die vorliegende Ermittelung nicht ſehr, weil ſie der ſpitzen Schnittwinkel wegen nur ungenaue Reſultate giebt, die Schnittpunkte vielfach nicht mehr auf die Zeichen-

Fig. 333.



fläche fallen. So iſt H_1 in Fig. 333 im fünffach verkleinerten Maſsſtabe aufgetragen, um R_1 zu conſtruiren.

b) Ringſpannungen durch zufällige Belaſtung. Maximalſpannung im Ringe II findet ſtatt, wenn nur die Ringzone I belaſtet iſt. Es ſei (Fig. 334 a) $ab = \frac{P_1}{n}$; alsdann wird $bf = S_1$, $= H_1$.

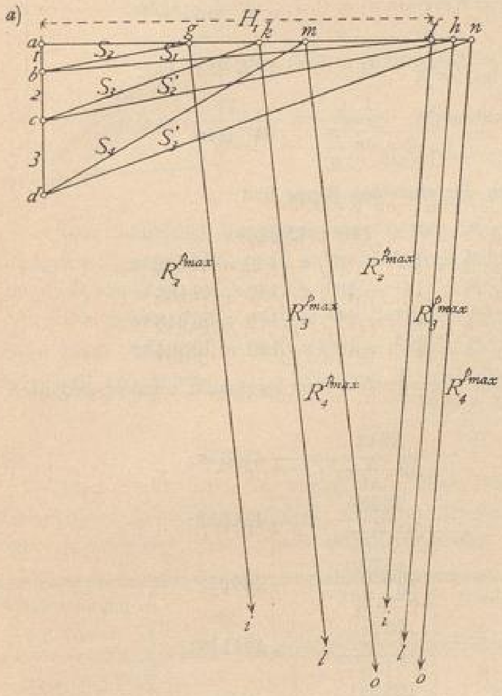
Im Knotenpunkt F (Fig. 335) ſind S_1, S_2 und H_2 im Gleichgewicht, d. h. das Kräftedreieck für Punkt F wird bgf. Darin iſt $H_2 = gf$ und $gi = if = R_2^p{}_{max}$.

Im Ringe III iſt Maximalſpannung, wenn die Zonen zu den Ringen I und II belaſtet ſind; alsdann wirken in F die Kräfte $S_1 = fb$, $2 = bc = \frac{P_2}{n}$, S_2' und H_2'. Man erhält leicht $H_2' = hf$, $S_2' = ch$. In E ſind dann S_2', S_3 und H_3 im Gleichgewicht und $H_3 = kh$, woraus $R_3^p{}_{max} = kl = lh$. Eben ſo wird $R_4^p{}_{max} = on = mo$ etc.

Minimalſpannung im Ringe I findet bei voller Kuppelbelaſtung ſtatt; alsdann wirkt in J die Kraft $1 = \frac{P_1}{n}$, und es wird, wenn (Fig. 334 b) $ab = 1$ iſt, $ia = H_1$. Die Zerlegung in die beiden Ringſpannungen iſt dann in gleicher Weiſe wie oben vorzunehmen. Für Ring II findet Minimalſpannung bei einer Belaſtung der Zonen II, III, IV ſtatt; I iſt unbelaſtet; mithin iſt S_1 alsdann gleich Null (ſiehe Gleichung 334). Iſt $bc = \frac{P_2}{n} = 2$, ſo wird $hb = H_2$. Eben ſo wird weiter für die Minimalbelaſtungen der einzelnen Ringe $H_3 = kc$, $H_4 = md$, $H_5 = ne$.

e) Die Conſtruction der Spannungen in den Diagonalen iſt ſo einfach, daſs dieſelbe nicht weiter gezeigt zu werden braucht.

Fig. 334.



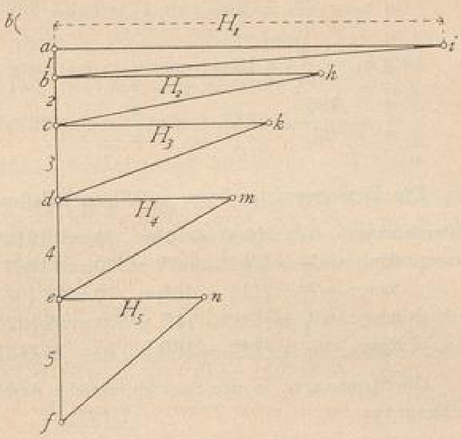
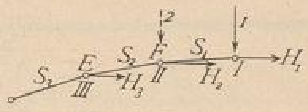
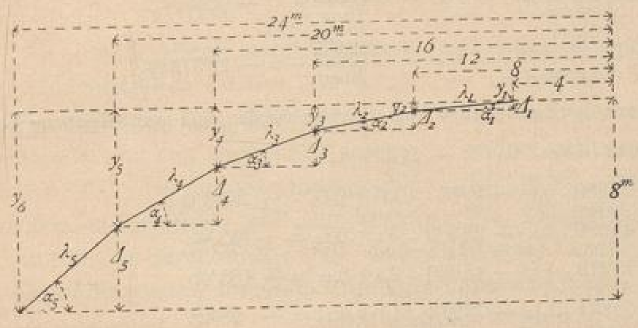


Fig. 335.



Beifpiel. Ein Kuppeldach von nachfolgenden Hauptmafsen und Belaftungen ift zu conftruiren: Durchmeffer des zu überdachenden kreisförmigen Raumes gleich 47^{m}, demnach der Durchmeffer des dem Mauerring umfchriebenen Parallelkreifes $2L = 48^{m}$; Scheitelhöhe der Kuppel $h = 8^{m}$; es find 6 Ringe mit den Halbmeffern 4, 8, 12, 16, 20 und 24^{m} und $n = 32$ Sparren anzuordnen. Das Eigengewicht ift zu 70^{kg} für 1^{qm} Grundfläche anzunehmen; als mittlere Dachneigung ift $\frac{h}{2L} = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$ einzuführen, und es ergiebt fich hieraus nach Art. 28 (S. 21 ff.) als Belaftung durch Schnee für 1^{qm} Grundfläche 75^{kg}, als Belaftung durch Winddruck (fiehe Art. 30, S. 23) für 1^{qm} Grundfläche $\mathfrak{v} = 64^{kg}$, fo dafs die gefammte zufällige Belaftung für 1^{qm} Grundfläche abgerundet 140^{kg} beträgt; die Laterne wiegt 2000^{kg}. 245. Beifpiel.

Fig. 336.



Die Kuppelfläche fei durch Umdrehung einer cubifchen Parabel der Gleichung

$$y = \frac{h x^3}{r^3} = \frac{8}{24^3} x^3 = 0{,}000_{58}\, x^3$$

entftanden. Man erhält für die verfchiedenen, durch die Ringe vorgefchriebenen Eckpunkte des Vieleckes (Fig. 336):

$x =$	4	8	12	16	20	24^{m}
$y =$	$0{,}04$	$0{,}30$	$1{,}00$	$2{,}38$	$4{,}64$	$8{,}0$
$h - y = z =$	$7{,}96$	$7{,}70$	$7{,}00$	$5{,}62$	$3{,}36$	0

Ferner ift

$$\Delta_1 = y_2 - y_1 = 0{,}26^{m};\ \Delta_2 = y_3 - y_2 = 0{,}7^{m};\ \Delta_3 = y_4 - y_3 = 1{,}38^{m};\ \Delta_4 = y_5 - y_4 = 2{,}26^{m};$$

$$\Delta_5 = y_6 - y_5 = 3{,}36^{m}.$$

$$\lambda_1 = \sqrt{4^2 + \Delta_1{}^2} = 4{,}01\ \text{m};\ \lambda_2 = 4{,}06\ \text{m};\ \lambda_3 = 4{,}23\ \text{m};\ \lambda_4 = 4{,}59\ \text{m};\ \lambda_5 = 5{,}22\ \text{m}.$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\lambda_1} = 0{,}0648;\ \sin\alpha_2 = 0{,}1724;\ \sin\alpha_3 = 0{,}32;\ \sin\alpha_4 = 0{,}492;\ \sin\alpha_5 = 0{,}644.$$

$$\operatorname{cotg}\alpha_1 = \frac{4}{\Delta_1} = 15{,}38;\ \operatorname{cotg}\alpha_2 = 5{,}7;\ \operatorname{cotg}\alpha_3 = 2{,}9;\ \operatorname{cotg}\alpha_4 = 1{,}77;\ \operatorname{cotg}\alpha_5 = 1{,}19.$$

$$\frac{\pi}{n} = \frac{180}{32} = 5^0 37{,}5';\ \sin\frac{\pi}{n} = \sin 5^0 37{,}5' = 0{,}098;\ \frac{1}{2\,n\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{64 \cdot 0{,}098} = 0{,}16.$$

Die Eigengewichte, bezw. zufälligen Belaftungen der einzelnen Ringe find:

Laternenring: $G_1 = 2000 + 6^2\pi \cdot 70 = 9913^{\text{kg}},\ P_1 = 6^2\pi \cdot 140 = 15826^{\text{kg}};$
2. Ring: $G_2 = (10^2 - 6^2)\pi \cdot 70 = 14067^{\text{kg}},\ P_2 = (10^2 - 6^2)\pi \cdot 140 = 28122^{\text{kg}};$
3. Ring: $G_3 = (14^2 - 10^2)\pi \cdot 70 = 21100^{\text{kg}},\ P_3 = (14^2 - 10^2)\pi \cdot 140 = 42186^{\text{kg}};$
4. Ring: $G_4 = (18^2 - 14^2)\pi \cdot 70 = 28133^{\text{kg}},\ P_4 = (18^2 - 14^2)\pi \cdot 140 = 56243^{\text{kg}};$
5. Ring: $G_5 = (22^2 - 18^2)\pi \cdot 70 = 35168^{\text{kg}},\ P_5 = (22^2 - 18^2)\pi \cdot 140 = 70304^{\text{kg}}.$

Die Spannungen in den Sparren, welche durch das Eigengewicht hervorgebracht werden, find nach Gleichung 335:

$$S_1^g = -\frac{G_1}{n\sin\alpha_1} = -\frac{9913}{32 \cdot 0{,}065} = -4766^{\text{kg}};$$

$$S_2^g = -\frac{G_1 + G_2}{n\sin\alpha_2} = -\frac{23980}{32 \cdot 0{,}1724} = -4346^{\text{kg}};$$

$$S_3^g = -\frac{G_1 + G_2 + G_3}{n\sin\alpha_3} = -\frac{45080}{32 \cdot 0{,}32} = -4402^{\text{kg}};$$

$$S_4^g = -\frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}{n\sin\alpha_4} = -\frac{73213}{32 \cdot 0{,}492} = -4651^{\text{kg}};$$

$$S_5^g = -\frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5}{n\sin\alpha_5} = -\frac{108381}{32 \cdot 0{,}644} = -5258^{\text{kg}}.$$

Die durch zufällige Belaftung erzeugten Sparrenfpannungen betragen:

$$S_1^p = -\frac{P_1}{n\sin\alpha_1} = -\frac{15826}{2{,}08} = -7608^{\text{kg}};$$

$$S_2^p = -\frac{P_1 + P_2}{n\sin\alpha_2} = -\frac{43948}{5{,}517} = -7966^{\text{kg}};$$

$$S_3^p = -\frac{P_1 + P_2 + P_3}{n\sin\alpha_3} = -\frac{86130}{10{,}24} = -8400^{\text{kg}};$$

$$S_4^p = -\frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{n\sin\alpha_4} = -\frac{142373}{15{,}74} = -9045^{\text{kg}};$$

$$S_5^p = -\frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5}{n\sin\alpha_5} = -\frac{212677}{20{,}61} = -10319^{\text{kg}}.$$

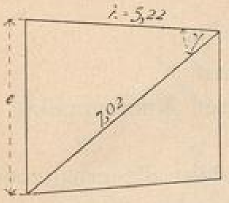
Die Ringfpannungen, welche durch das Eigengewicht hervorgerufen werden, find nach Gleichung 338:

Laternenring: $R_1^g = -9913 \cdot 15{,}38 \cdot 0{,}16 = -24396^{\text{kg}};$
2. Ring: $R_2^g = -(23980 \cdot 5{,}7 - 9913 \cdot 15{,}38)\,0{,}16 = +2524^{\text{kg}};$
3. Ring: $R_3^g = -(45080 \cdot 2{,}9 - 23980 \cdot 5{,}7)\,0{,}16 = +953^{\text{kg}};$
4. Ring: $R_4^g = -(73213 \cdot 1{,}77 - 45080 \cdot 2{,}9)\,0{,}16 = +183^{\text{kg}};$
5. Ring: $R_5^g = -(108381 \cdot 1{,}19 - 73213 \cdot 1{,}77)\,0{,}16 = +98^{\text{kg}};$
Mauerring: $R_6^g = 108381 \cdot 1{,}19 \cdot 0{,}16 = 20636^{\text{kg}}.$

Die Maximal- und Minimalfpannungen in den Ringen, durch zufällige Belaftung erzeugt, betragen nach Gleichung 342:

Laternenring: $R_1^p{}_{min} = -15826 \cdot 15{,}38 \cdot 0{,}16 = -38932^{\text{kg}}$ und $R_1^p{}_{max} = 0;$
2. Ring: $R_2^p{}_{min} = -28122 \cdot 5{,}7 \cdot 0{,}16 = -25647^{\text{kg}},$
$R_2^p{}_{max} = 15826\,(15{,}38 - 5{,}7) \cdot 0{,}16 = +24514^{\text{kg}};$

Fig. 337.



3. Ring: $R_3^p min = -42182 . 2{,}9 . 0{,}16 = -19572$ kg,

$R_3^p max = 43948 . 2{,}8 . 0{,}16 = +19689$ kg;

4. Ring: $R_4^p min = -56243 . 1{,}77 . 0{,}16 = -15926$ kg,

$R_4^p max = 86130 . 1{,}13 . 0{,}16 = +15589$ kg;

5. Ring: $R_5^p min = -70304 . 1{,}19 . 0{,}16 = -13386$ kg,

$R_5^p max = 142373 . 0{,}58 . 0{,}16 = +13212$ kg;

Mauerring: $R_6^p min = 0$ und $R_6^p max = 212677 . 1{,}19 . 0{,}16 = +40494$ kg.

Was fchliefslich die Spannungen in den Diagonalen betrifft, fo braucht nur die am ftärkften beanfpruchte Diagonale berechnet zu werden, weil felbft diefe noch fehr fchwach wird. Gewöhnlich macht man dann alle Diagonalen gleich ftark.

Die gröfste durch zufällige Belaftung erzeugte Sparrenfpannung ift durch die Diagonale zu übertragen (fiehe Art. 243, S. 251); diefelbe ift $S_5^p = -10319$ kg, und eine Diagonale hat demnach höchftens diefe Kraft aufzunehmen. Die Spannung in den Diagonalen wird daher

$$Y_5 = \frac{10319 . 7{,}02}{5{,}22} = 13877 \text{ kg}$$

fein.

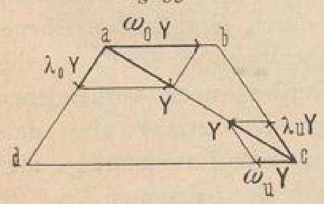
Man könnte noch für einige der oberen Diagonalen die Spannungen auffuchen, was nach dem Vorftehenden keine Schwierigkeit macht. Für die Querfchnittsbeftimmungen kann nun, wie bei den früheren Beifpielen, eine Tabelle aufgeftellt werden.

Bezeichnung des Stabes	P_0	P_1	Bezeichnung des Stabes	P_0	P_1	P_2
Sparren:			Ringe:			
S_1	− 4766	− 7608	R_1	− 24396	− 38932	0
S_2	− 4346	− 7966	R_2	+ 2524	+ 24514	− 25647
S_3	− 4402	− 8400	R_3	+ 953	+ 19689	− 19572
S_4	− 4651	− 9045	R_4	+ 183	+ 15589	− 15926
S_5	− 5258	− 10319	R_5	+ 98	+ 13212	− 13386
Diagonalen:			R_6	+ 20636	+ 40494	0
Y	0	13877				
	Kilogramm			Kilogramm		

2) Verfahren von *Müller-Breslau*.

In jedem durch zwei Sparren- und zwei Ringftäbe gebildeten Trapez des Kuppelflechtwerkes fei nur eine Diagonale vorhanden, welche fowohl Zug wie Druck aufnehmen kann. Handelt es fich um eine Conftruction mit gekreuzten Diagonalen, deren jede nur Zug aufnehmen kann, fo nimmt man genau, wie in Art. 186 (S. 187) bei den Trägern mit Gegendiagonalen gezeigt ift, zunächft nur eine, die bei der betreffenden Belaftung auf Zug beanfpruchte, Diagonale als vorhanden an. Ergiebt fich durch die Berechnung, dafs diefe Diagonale Druck erhält, fo tritt an ihre Stelle die Gegendiagonale, und das Ergebnifs kann durch eine Verbefferungsrechnung leicht richtig geftellt werden. 246. Vorbemerkungen.

Fig. 338.



Die in der Diagonale *ac* auftretende Spannung *Y* (Fig. 338) wird in der Ebene des betreffenden Feldes in jedem der beiden Knotenpunkte in zwei Seitenkräfte zerlegt, welche bezw. in die Richtung des anfchliefsenden Ringftabes und diejenige des anfchliefsenden Sparrenftabes fallen. Diefe Seitenkräfte ftehen in ganz beftimmtem, durch die Form des Trapezes vorgefchriebenem Verhältnifs zu Y. Im oberen Knotenpunkte a zerlegt fich Y in die Seitenkräfte:

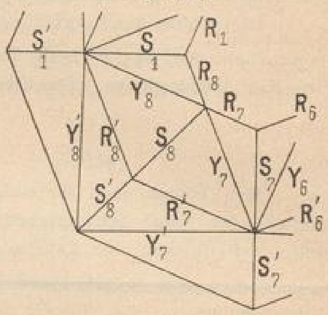
$\omega_0 Y$, welche in die Richtung des Ringftabes ab, und

$\lambda_0 Y$, welche in die Richtung des Sparrenftabes ad

fällt. Eben fo bezeichnen wir die Seitenkräfte von Y am unteren Knotenpunkte c mit $\omega_u Y$, bezw. $\lambda_u Y$.

Verfährt man in diefer Weife mit jeder Diagonale und addirt die erhaltenen Seitenkräfte zu den in den Ring-, bezw. Sparrenftäben wirkenden Spannungen $R_1, R_2 \ldots, S_1, S_2 \ldots$, fo hat man bei den Unterfuchungen, zunächft wenigftens, nur mit Kräften in den Ring- und Sparrenftäben zu thun; die Diagonalen find vorläufig ausgefchaltet. Die Summenfpannungen in den Sparrenftäben follen mit $\mathfrak{S}$, diejenigen in den Ringftäben mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet werden, wobei die Zeiger die gleichen find, wie bei den mit lateinifchen Buchftaben bezeichneten Spannungen. Demnach ift (Fig. 339)

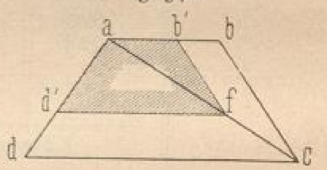
Fig. 339.



$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}_8 &= S_8 + \lambda_0 Y_8 + \lambda_0 Y_7 \\ \mathfrak{S}_8' &= S_8' + \lambda_u' Y_8' + \lambda_u' Y_7' \\ \mathfrak{R}_8 &= R_8 + \omega_0 Y_8 \\ \mathfrak{R}_8' &= R_8' + \omega_u Y_8 + \omega_0' Y_8' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 345.$$

Die Werthe von ω und λ kann man leicht durch Rechnung oder Zeichnung finden; graphifch, indem man das Trapezfeld in wahrer Gröfse aufzeichnet, auf der Diagonale eine beliebige Länge für Y abträgt (etwa $\overline{af}$ in Fig. 340) und das dem Felde ähnliche Trapez $ad'fb'$ mit $\overline{af}$ als Diagonale conftruirt; alsdann find feine Seiten:

Fig. 340.



$$ab' = \omega_u Y, \quad fd' = \omega_0 Y, \quad d'a = \lambda_0 Y$$

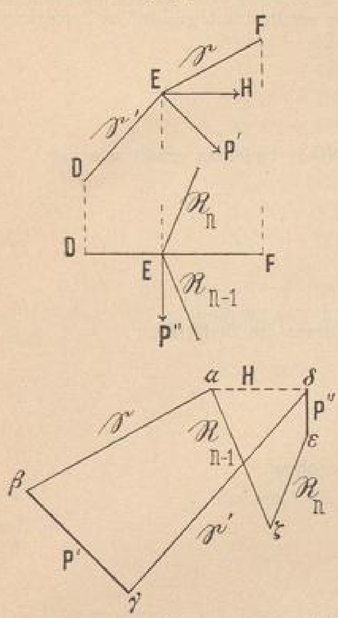
und $$b'f = \lambda_u Y,$$

ω und λ haben in den Feldern der verfchiedenen Zonen und allgemein auch in den Feldern derfelben Zone verfchiedene Werthe; diefem Umftande ift in Gleichung 345 durch die Zeiger Rechnung getragen.

247. Ermittelung der Stabfpannungen.

Im Knotenpunkte E (Fig. 341) wirke eine äufsere Kraft P in beliebiger Richtung. Man zerlegt P in eine Seitenkraft, welche in die lothrechte Ebene des betrachteten Sparrenzuges $DEF\ldots$ fällt, die Kraft P' und in eine zu diefer Ebene fenkrechte Seitenkraft P'' (in Fig. 341 im Grundrifs angegeben). Fig. 341 zeigt den Sparrenzug DEF im Grundrifs und Aufrifs. Die Aufrifsebene ift durch DEF gelegt. Auch weiterhin, insbefondere bei der Berechnung des Beifpieles in Art. 248, foll jeder Sparrenzug vor der graphifchen Zerlegung der Kräfte in die Zeichenebene gedreht werden, wodurch fich die Arbeit wefentlich vereinfacht. Im Punkte E halten einander nunmehr die Kräfte $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, P' und H im Gleichgewicht; H ift die Mittelkraft der im Punkte E wirkenden Ringftabfpannungen $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_{n-1}$ und der Seitenkraft P''; diefe drei Kräfte wirken in einer wagrechten, durch E gehenden Ebene, alfo auch ihre Mittelkraft H. Diefe Mittelkraft H mufs aber auch in die Ebene des Sparrenzuges DEF fallen; denn die fämmtlichen aufserdem noch vorhandenen Kräfte $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ und P' fallen in diefe Ebene; das Gleichgewicht verlangt alfo, dafs auch die letzte Kraft H in diefe Ebene falle. Geht man nun vom Laternenringe aus, fo ift für den oberften Punkt $\mathfrak{S}$ gleich Null; mithin find aus der bekannten Kraft P'

Fig. 341.

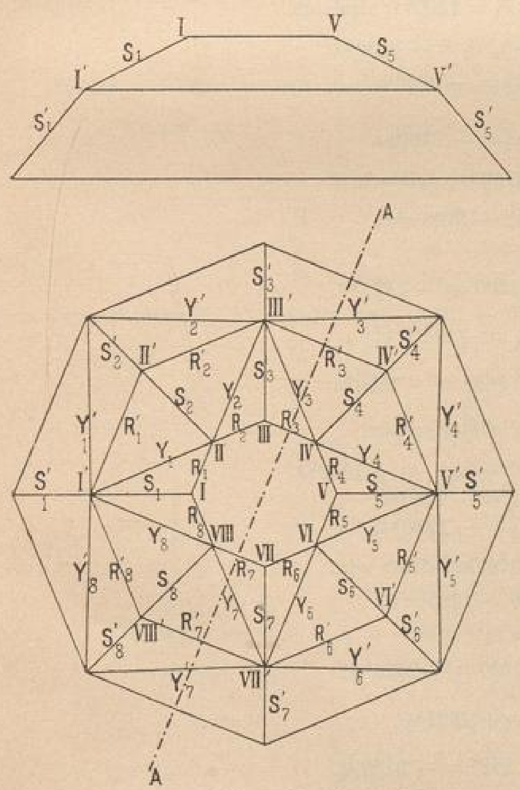


leicht durch Zerlegung H und $\mathfrak{S}'$ zu finden. Im Grundrifs kennt man jetzt H und P''; daher können auch hier die beiden fehlenden Kräfte ($\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_{n-1}$) durch Conftruction eines Kraftpolygons gefunden werden. Bei den weiter unten folgenden Knotenpunkten ift aber $\mathfrak{S}$ nach Vorftehendem bereits ermittelt, und man hat wiederum für jedes Kraftpolygon nur zwei Unbekannte.

In Fig. 341 ift $\overline{\alpha\beta} = \mathfrak{S}$ und $\overline{\beta\gamma} = P'$ durch vorherige Conftruction gefunden, bezw. gegeben; die zu $\mathfrak{S}'$ und H gezogenen Parallelen vervollftändigen das Kraftpolygon. Es ift $\gamma\delta = \mathfrak{S}'$ und $\delta\alpha = H$. An H ift nunmehr in δ die Kraft $P'' = \overline{\delta\varepsilon}$ gelegt und da die Mittelkraft von H und P'' gleich derjenigen von $\mathfrak{R}_{n-1}$ und $\mathfrak{R}_n$ ift, fo geben die durch α und ε gezogenen Parallelen zu $\mathfrak{R}_{n-1}$ und $\mathfrak{R}_n$ die Kräfte $\mathfrak{R}_n = \overline{\varepsilon\zeta}$ und $\mathfrak{R}_{n-1} = \overline{\zeta\alpha}$. Das Kraftpolygon $\overline{\alpha\zeta\varepsilon\delta\alpha}$ gehört zum Grundrifs; man kann aber beide Kraftpolygone, wie in Fig. 341 gefchehen ift, vereinen, wobei man das eine um die Linie $\alpha\delta$ in die Ebene des anderen gedreht denkt.

Aus den Werthen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}$, λ und ω können nun die Werthe S, R und Y ermittelt werden, indem man zunächft für die Knotenpunkte ohne Diagonalen die Werthe für S und R auffucht und fo eine Reihe von bekannten Gröfsen erhält, durch deren Einführung in die Gleichungen 345 alle Unbekannten beftimmbar werden.

Fig. 342.



Das vorgeführte Verfahren foll an einem Beifpiele gezeigt werden.

Beifpiel. Die in Fig. 342 im Grundrifs und Aufrifs dargeftellte Kuppel über achteckiger Grundfläche, bei welcher der Durchmeffer des umfchriebenen Kreifes 20 m beträgt, fei links der lothrechten Schnittebene AA nur mit dem Eigengewicht, rechts von der Ebene AA voll belaftet. Die Knotenpunktslaften betragen 248. Beifpiel.

	durch Eigengewicht allein	insgefammt
im Laternenring:	$G_1 = 500$ kg,	$G_1 + P_1 = 1500$ kg;
im mittleren Ring:	$G_2 = 800$ kg,	$G_2 + P_2 = 2500$ kg.

Die Laften werden als lothrecht angenommen; die diefer Belaftung entfprechenden Stabfpannungen find zu ermitteln.

Zunächft find nach Fig. 340 die Zahlenwerthe für ω_0, λ_u, ω_u, λ_u der oberen Felder und ω_0', λ_0', ω_u', λ_u' der unteren Felder ermittelt. Man erhält

$$\omega_0 = 0{,}94, \qquad \lambda_0 = 0{,}8,$$
$$\omega_u = 0{,}39, \qquad \lambda_u = 0{,}8,$$
$$\omega_0' = 0{,}96, \qquad \lambda_0' = 6{,}6,$$
$$\omega_u' = 0{,}67, \qquad \lambda_u' = 0{,}6.$$

Stäbe der oberen Felder. In den Knotenpunkten I, III, V, VII des Laternenringes treffen nur je drei Stäbe zufammen; die Zerlegung wird ganz, wie in Art. 247 gezeigt ift, vorgenommen. In jedem der Knotenpunkte *I* und *III* wirkt die Laft $G = 500^{kg}$, und man erhält durch graphifche Zerlegung

$$S_1 = S_3 = -1050^{kg}$$

und

$$R_1 = R_8 = R_2 = R_3 = -1230^{kg}.$$

In den Knotenpunkten *V* und *VII* wirkt die Belaftung $G_1 + P_1 = 1500^{kg}$, und man erhält wie vor

$$S_5 = S_7 = -3150^{kg}$$

und

$$R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = -3700^{kg}.$$

Nunmehr find die Knotenpunkte mit Diagonalen zu betrachten.

Knotenpunkt II. Es wirken: Knotenpunktlaft $G_1 = 500^{kg}$; ferner die Stabkräfte

$$\mathfrak{S}_2 = S_2 + \lambda_0 Y_1 + \lambda_0 Y_2,$$
$$\mathfrak{R}_1 = R_1 + \omega_0 Y_1,$$
$$\mathfrak{R}_2 = R_2 + \omega_0 Y_2.$$

Die graphifche Zerlegung von G_1 in $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ ergiebt wie oben

$$\mathfrak{S}_2 = -1050^{kg}$$

und

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = -1230^{kg}.$$

Hieraus folgt

$$\omega_0 Y_1 = \mathfrak{R}_1 - R_1 = 0, \qquad Y_1 = 0,$$
$$\omega_0 Y_2 = \mathfrak{R}_2 - R_2 = 0, \qquad Y_2 = 0.$$
$$S_2 = \mathfrak{S}_2 = -1050^{kg}.$$

Eben fo ergiebt fich durch Betrachtung des Knotenpunktes VI:

$$Y_6 = Y_5 = 0 \quad \text{und} \quad S_6 = -3150^{kg}.$$

Knotenpunkt IV. Knotenpunktslaft $G_1 + P_1 = 1500^{kg}$; demnach

$$\mathfrak{S}_4 = S_4 + \lambda_0 Y_4 + \lambda_0 Y_3 = -3150^{kg},$$
$$\mathfrak{R}_3 = R_3 + \omega_0 Y_3 = -3700^{kg}$$

und

$$\mathfrak{R}_4 = R_4 + \omega_0 Y_4 = -3700^{kg}.$$

Oben war gefunden: $R_3 = -1230^{kg}$ und $R_4 = -3700^{kg}$; demnach ift

$$\omega_0 Y_4 = -3700 + 3700 = 0,$$
$$Y_4 = 0;$$
$$\omega_0 Y_3 = -3700 + 1230 = -2470^{kg},$$
$$Y_3 = -\frac{2470}{0{,}94} = -2627^{kg};$$
$$S_4 = -3150 + 0{,}8 \,.\, 2627 = -1050^{kg}.$$

Knotenpunkt VIII. Knotenpunktslaft $G_1 = 500^{kg}$; mithin

$$\mathfrak{S}_8 = S_8 + \lambda_0 Y_8 + \lambda_0 Y_7 = -1050^{kg},$$
$$\mathfrak{R}_8 = R_8 + \omega_0 Y_8 = -1230^{kg},$$
$$\mathfrak{R}_7 = R_7 + \omega_0 Y_7 = -1230^{kg}.$$

Oben ift gefunden: $R_8 = -1230^{kg}$ und $R_7 = -3700^{kg}$; daher wird

$$\omega_0 Y_8 = -1230 + 1230 = 0,$$
$$Y_8 = 0;$$
$$\omega_0 Y_7 = -1230 + 3700 = +2470^{kg},$$
$$Y_7 = \frac{2470}{0{,}94} = +2627^{kg};$$
$$S_8 = -1050 - 0{,}8 \,.\, 2627 = -3150^{kg}.$$

Demnach ift in den oberen Feldern

$$
\begin{array}{lll}
R_1 = -1230^{kg}, & S_1 = -1050^{kg}, & Y_1 = 0; \\
R_2 = -1230^{kg}, & S_2 = -1050^{kg}, & Y_2 = 0; \\
R_3 = -1230^{kg}, & S_3 = -1050^{kg}, & Y_3 = -2627^{kg}; \\
R_4 = -3700^{kg}, & S_4 = -1050^{kg}, & Y_4 = 0; \\
R_5 = -3700^{kg}, & S_5 = -3150^{kg}, & Y_5 = 0; \\
R_6 = -3700^{kg}, & S_6 = -3150^{kg}, & Y_6 = 0; \\
R_7 = -3700^{kg}, & S_7 = -3150^{kg}, & Y_7 = +2627^{kg}; \\
R_8 = -1230^{kg}, & S_8 = -3150^{kg}, & Y_8 = 0.
\end{array}
$$

Stäbe der unteren Felder. In den Knotenpunkten *II'*, *IV'*, *VI'*, *VIII'* fetzen keine Diagonalen an. Die graphifche Zerlegung erfolgt hier, genau wie in Art. 247 (S. 256) gezeigt ift. Man erhält

Knotenpunkt II': $S_2 = -1050^{kg}, \quad G_2 = 800^{kg}$

und

$$S_2' = -1700^{kg};$$
$$R_1' = -150^{kg} \text{ und } R_2' = -150^{kg}.$$

Knotenpunkt VIII': $S_8 = -3150^{kg}, \quad G_2 = 800^{kg}$

und

$$S_8' = -2800^{kg};$$
$$R_7' = +1350^{kg} \text{ und } R_8' = +1350^{kg}.$$

Knotenpunkt IV': $S_4 = -1050^{kg}, \quad G_2 + P_2 = 2500^{kg}$

und

$$S_4' = -3880^{kg};$$
$$R_3' = -1950^{kg} \text{ und } R_4' = -1950^{kg}.$$

Knotenpunkt VI': $S_6 = -3150^{kg}, \quad G_2 + P_2 = 2500^{kg}$

und

$$S_6' = -5050^{kg};$$
$$R_5' = -550^{kg} \text{ und } R_6' = -550^{kg}.$$

In den Knotenpunkten mit Diagonalen ergiebt fich das Folgende.

Knotenpunkt I': $S_1 = -1050^{kg}, \quad Y_1 = 0, \quad Y_8 = 0$

und

$$G_2 = 800^{kg};$$
$$\mathfrak{S}_1' = S'_1 + \lambda_0' Y_1' + \lambda_0' Y_8' = -1700^{kg},$$
$$\mathfrak{R}_1' = R_1' + \omega_0' Y_1' = -150^{kg},$$
$$\mathfrak{R}_8' = R_8' + \omega_0' R_2' = -150^{kg}.$$

Oben war gefunden: $R_1' = -150^{kg}$ und $R_8' = +1350^{kg}$; demnach ift

$$\omega_0' Y_1' = -150 + 150 = 0$$

und

$$Y_1' = 0;$$
$$\omega_0' Y_8' = -150 - 1350 = -1500^{kg},$$
$$Y_8' = -\frac{1500}{0{,}96} = -1560^{kg};$$

$$S_1' = -1700 + 0{,}6 \cdot 1560 = -760^{kg};$$

daher

$$Y_1' = 0 \text{ und } Y_8' = -1560^{kg}.$$

Knotenpunkt V': $S_5 = -3150^{kg}, \quad G_2 + P_2 = 2500^{kg}$

und

$$Y_5 = Y_4 = 0;$$
$$\mathfrak{S}_5' = S_5' + \lambda_0' Y_4' + \lambda_0' Y_5' = -5050^{kg},$$
$$\mathfrak{R}_4' = R_4' + \omega_0' Y_4' = -550^{kg},$$
$$\mathfrak{R}_5' = R_5' + \omega_0' Y_5' = -550^{kg}.$$

Oben war gefunden: $R_5' = -550^{kg}$; demnach $Y_5' = 0$;
$R_4' = -1950^{kg}$;

alfo

$$\omega_0' Y_4' = -550 + 1950 = +1400^{kg},$$
$$Y_4' = \frac{1400}{0{,}96} = +1460^{kg};$$
$$S_5' = -5050 - 0{,}6 \cdot 1460 = -5930^{kg}.$$

Knotenpunkt III': $\mathfrak{S}_3 = -1050^{kg} + \lambda_u Y_3 = -1050 - 0{,}8 \cdot 2627 = -3150^{kg}$,
$G_2 = 800^{kg}$,

fomit

$$Y_2 = 0 \text{ und } Y_3 = -2627^{kg};$$
$$\mathfrak{S}_3' = S_3' + \lambda_0' Y_2' + \lambda_0' Y_3' = -2800^{kg},$$
$$\mathfrak{R}_2' = R_2' + \omega_u Y_2 + \omega_0' Y_2' = +1350^{kg},$$
$$\mathfrak{R}_3' = R_3' + \omega_u Y_3 + \omega_0' Y_3' = +1350^{kg}.$$

Es ift

$$\omega_u Y_2 = 0$$

und

$$\omega_u Y_3 = -0{,}39 \cdot 2627 = -1025^{kg}.$$

Oben war gefunden: $R_2' = -150^{kg}$ und $R_3' = -1950^{kg}$; daher ift

$$\omega_0' Y_2' = 1350 + 150 = +1500^{kg}$$

und

$$Y_2' = \frac{1500}{0{,}96} = +1560^{kg};$$
$$\omega_0' Y_3' = +1350 + 1950 + 1025 = +4325^{kg},$$
$$Y_3' = \frac{4325}{0{,}96} = +4510^{kg};$$
$$S_3' + 0{,}6 \cdot 1560 + 0{,}6 \cdot 4510 = -2800^{kg},$$
$$S_3' = -6410^{kg}.$$

Knotenpunkt VII': $Y_6 = 0$, $Y_7 = 2627^{kg}$

und

$$G_2 + P_2 = 2500^{kg};$$

demnach

$$\mathfrak{S}_7 = S_7 + \lambda_u Y_6 + \lambda_u Y_7 = -3150 + 0{,}8 \cdot 2627 = -1050^{kg},$$
$$\mathfrak{S}_7' = S_7' + \lambda_0' Y_7' + \lambda_0' Y_6' = -3880^{kg},$$
$$\mathfrak{R}_6' = R_6' + \omega_u Y_6 + \omega_0' Y_6' = -1950^{kg},$$
$$\mathfrak{R}_7' = R_7' + \omega_u Y_7 + \omega_0' Y_7' = -1950^{kg}.$$

Oben ift gefunden: $R_6' = -550^{kg}$, $R_7' = +1350^{kg}$ und $Y_7 = 2627^{kg}$; alfo
$Y_7 = 0{,}39 \cdot 2627 = 1025^{kg}$;

fomit wird

$$\omega_0' Y_6' = -1950 + 550 = -1400^{kg}$$

und

$$Y_6' = -\frac{1400}{0{,}96} = -1460^{kg};$$
$$1350 + 1025 + \omega_0' Y_7' = -1950^{kg},$$
$$\omega_0 Y_7' = -1950 - 2375 = -4325^{kg},$$
$$Y_7' = -\frac{4325}{0{,}96} = -4510^{kg};$$
$$S_7' = -3880 + 0{,}6\,(4510 + 1460) = -300^{kg}.$$

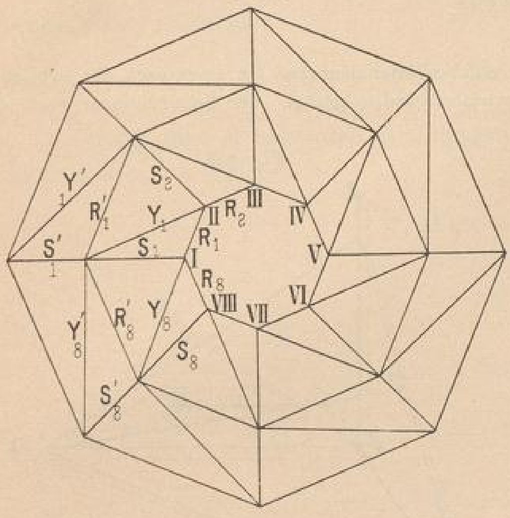
Die Spannungen in den unteren Feldern find daher:

$R_1' = -150^{kg}$,	$S_1' = -760^{kg}$,	$Y_1' = 0$,
$R_2' = -150^{kg}$,	$S_2' = -1700^{kg}$,	$Y_2' = +1560^{kg}$,
$R_3' = -1950^{kg}$,	$S_3' = -6410^{kg}$,	$Y_3' = +4510^{kg}$,
$R_4' = -1950^{kg}$,	$S_4' = -3880^{kg}$,	$Y_4' = +1460^{kg}$,
$R_5' = -550^{kg}$,	$S_5' = -5930^{kg}$,	$Y_5' = 0$,
$R_6' = -550^{kg}$,	$S_6' = -5050^{kg}$,	$Y_6' = -1460^{kg}$,
$R_7' = +1350^{kg}$,	$S_7' = -300^{kg}$,	$Y_7' = -4510^{kg}$,
$R_8' = +1350^{kg}$,	$S_8' = -2800^{kg}$,	$Y_8' = -1560^{kg}$.

Die Spannungen im Fufsring können auf den gefundenen Werthen leicht ermittelt werden. Es wird empfohlen, von den 8 Auflagern eines um das andere als feftes Auflager zu conftruiren.

Wenn kein Knotenpunkt ohne Diagonalen vorhanden ift, wenn z. B. die Anordnung nach Fig. 343 vorliegt, fo ift die Ermittelung der Diagonalen-Spannungen auf gleichem Wege leicht durchführbar. Man zerlege die Knotenlaft im Knotenpunkte I in die Stabkräfte 249. Andere Anordnung der Diagonalen.

Fig. 343.



$$\mathfrak{R}_8 = R_8 + \omega_0 Y_8,$$
$$\mathfrak{S}_1 = S_1 + \lambda_0 Y_8 \quad \text{und} \quad R_1;$$

ferner die im Knotenpunkte II wirkende Belaftung in die Stabkräfte

$$\mathfrak{R}_1 = R_1 + \omega_0 Y_1,$$
$$\mathfrak{S}_2 = S_2 + \lambda_0 Y_1 \quad \text{und} \quad R_2.$$

Man kennt alfo $\mathfrak{R}_1$ aus der Zerlegung am Knotenpunkt II, R_1 aus der Zerlegung am Knotenpunkte I; mithin kann man Y_1 aus der Gleichung

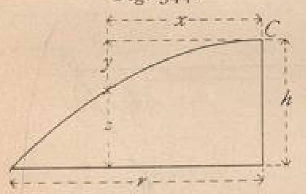
$$\omega_0 Y_1 = \mathfrak{R}_1 - R_1$$

finden. In gleicher Weife ergeben fich alle Diagonalfpannungen.

3) Erzeugende Kuppelcurve.

Die erzeugende Curve ift in den meiften Fällen eine Parabel (Fig. 344) der Gleichung $y = \frac{h x^2}{r^2}$, bei welcher der Anfangspunkt der Coordinaten im Scheitel C liegt, die halbe Spannweite gleich r, die Pfeilhöhe gleich h gefetzt ift, oder eine cubifche Parabel der Gleichung $y = \frac{h x^3}{r^3}$. Letztere Curvenform hat den Vortheil, dafs in den Zwifchenringen bei gleichmäfsig vertheilter Belaftung die Spannung Null herrfcht und dafs die Spannungen in den Sparren nahezu conftant find, was fich folgendermafsen ergiebt. 250. Parabel-Kuppel.

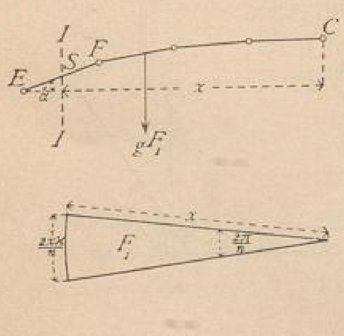
Fig. 344.



Die Spannung im Sparrenftab EF (Fig. 345) ift durch Betrachtung des Theiles zwifchen dem Scheitel C und dem durch die Sparrenmitte gelegten Schnitte II zu ermitteln. Die algebraifche Summe der auf diefes Stück wirkenden lothrechten Kräfte ift gleich Null, daher, wenn die belaftende Grundfläche mit F_1 und die Belaftung für 1 qm der Grundfläche mit g bezeichnet wird, $S \sin \alpha = g F_1$. Nun ift

$$F_1 = \frac{x^2 \pi}{n}, \quad \text{mithin} \quad S \sin \alpha = \frac{g x^2 \pi}{n} = S \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha.$$

Fig. 345.



Wird ftatt des Vieleckes die ftetig gekrümmte Curve der Berechnung zu Grunde gelegt, fo ift

$$y = \frac{h x^3}{r^3} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{3 h x^2}{r^3};$$

mithin

$$S \cos \alpha \, \frac{3 h x^2}{r^3} = \frac{g x^2 \pi}{n}, \quad \text{woraus} \quad S \cos \alpha = \frac{g \pi r^3}{3 n h}, \qquad 346.$$

d. h. $S \cos \alpha$ ift conftant. Da aber wegen der flachen Neigung der Kuppel der Winkel α fehr klein ift, fo ändert fich auch $\cos \alpha$ fehr wenig; die Spannung ift daher im ganzen Sparren nahezu conftant.

Betrachtet man nun einen Knotenpunkt E (Fig. 331) und fetzt die algebraifche Summe der in ihm wirkenden wagrechten Kräfte gleich Null, fo wird

$$0 = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} - H_m, \text{ woraus } H_m = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} = 0,$$

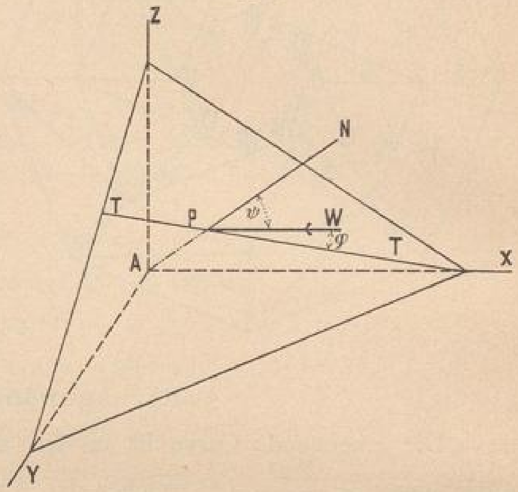
da nach Gleichung 346 $S \cos \alpha$ conftant ift. Die Ringfpannung ift dann

$$R = \frac{H}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 347.$$

Die obigen Angaben find damit bewiefen.

Noch möge bemerkt werden, dafs der theoretifche Materialaufwand bei einer nach der cubifchen Parabel gekrümmten Kuppel nur $^2/_3$ desjenigen Materialaufwandes beträgt, der fich bei einer nach der gemeinen Parabel gekrümmten Kuppel ergiebt.

Fig. 346.



4) Winddruck auf die Kuppel.

251. Winddruck auf die Kuppel.

Bei fteilen Kuppeln ift es nicht angängig, nur die lothrechte Componente $\mathfrak{v}$ des Winddruckes (vergl. Art. 30, S. 23) zu berückfichtigen; man mufs in folchen Fällen die wirklich auf die Kuppel übertragenen Windkräfte kennen.

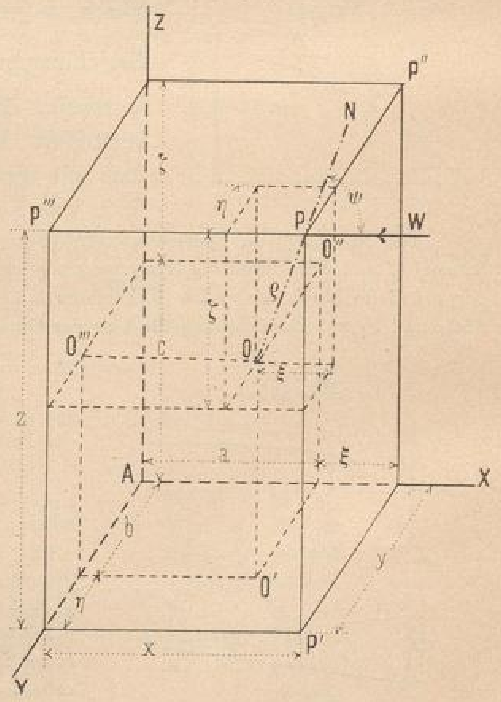
Der Winddruck gegen eine beliebige Ebene (Tangentenebene an die Kuppel) ergiebt fich folgendermafsen (Fig. 346). Durch einen Punkt A im Raume werden drei Coordinatenaxen gelegt, welche fenkrecht zu einander ftehen; die X-Axe fei wagrecht und parallel zu der gleichfalls wagrecht angenommenen Windrichtung gelegt. Im Punkte P der Ebene wird die Normale $\overline{PN}$ errichtet, aufserdem die Linie PW parallel zur Windrichtung gezogen. Die durch $\overline{PN}$ und $\overline{PW}$ gelegte Ebene fchneide die gegebene Ebene in der Linie $\overline{TT}$; der Winkel WPT werde φ genannt. Alsdann ift nach Art. 29 (S. 22) der Winddruck auf die Flächeneinheit der Ebene

$$n = p \sin \varphi = p \cos \psi;$$

n ift normal zur Ebene gerichtet.

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes P der Kuppelfläche feien x, y, z (Fig. 347); die X-Axe liege parallel zur Windrichtung. Der Normalfchnitt mit der Fläche, welcher im Punkte P durch die Normale PN und PW geht, habe den Krümmungshalbmeffer ρ und den Krümmungsmittelpunkt O mit den Coordinaten a, b, c. Die Coordinaten des

Fig. 347.



Punktes P, bezogen auf den Punkt O, ſeien ξ, η, ζ; endlich bilde die Normale und der Krümmungshalbmeſſer $\overline{OP}$ mit den Coordinaten-Axen die Winkel bezw. α, β, γ. Alsdann iſt nach Fig. 347

$$\cos\alpha = \frac{\xi}{\rho}, \qquad \cos\beta = \frac{\eta}{\rho}, \qquad \cos\gamma = \frac{\zeta}{\rho};$$

ferner $\psi = \alpha$, alſo hier

$$n = p \, . \cos\alpha = p \frac{\xi}{\rho}.$$

Zerlegt man n nach den Richtungen der Coordinaten-Axen, ſo erhält man als Seitenkräfte von n

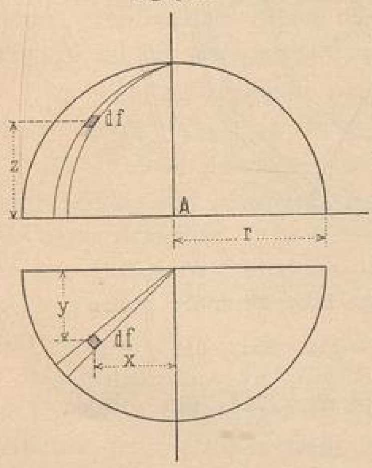
$$\left.\begin{aligned} n_x &= n \cos\alpha = p \frac{\xi^2}{\rho^2} \\ n_y &= n \cos\beta = p \frac{\xi\eta}{\rho^2} \\ n_z &= n \cos\gamma = p \frac{\xi\zeta}{\rho^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 348.$$

und, da $\qquad \xi = x - a, \quad \eta = y - b \quad$ und $\quad \zeta = z - c \qquad$ iſt,

$$\left.\begin{aligned} n_x &= \frac{p}{\rho^2}(x-a)^2 \\ n_y &= \frac{p}{\rho^2}(x-a)(y-b) \\ n_z &= \frac{p}{\rho^2}(x-a)(z-c) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 349.$$

Die Gleichungen 348 u. 349 geben die Seitenkräfte des Winddruckes an einem beliebigen Punkte P der Kuppelfläche, bezogen auf die Flächeneinheit, ausgedrückt in den Coordinaten des Punktes P und des Krümmungsmittelpunktes des in Betracht kommenden Normalſchnittes, ſo wie dem betreffenden Krümmungshalbmeſſer ρ. Durch Integration können die auftretenden Winddrücke ermittelt werden.

Fig. 348.



Um den auf einen Knotenpunkt des Kuppelfachwerkes entfallenden Winddruck zu ermitteln, genügt es, die Gröſse n deſſelben für die Flächeneinheit im Knotenpunkte ſelbſt zu ermitteln und dieſes n mit dem Inhalt der Kuppelfläche zu multipliciren, welche dieſem Knotenpunkte zugewieſen iſt. Iſt die Abſciſſe des betreffenden Knotenpunktes x, ſo iſt

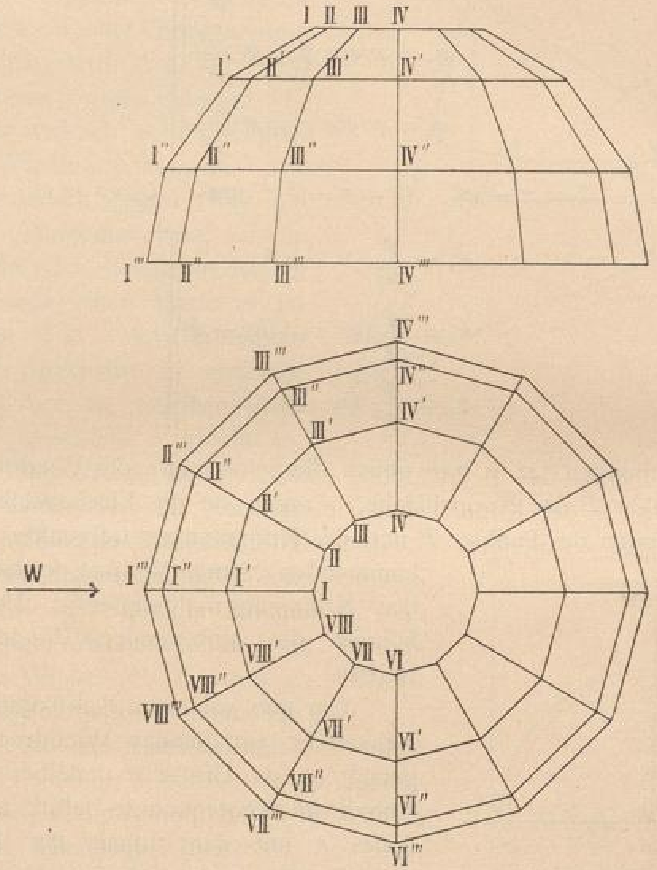
$$n = p \frac{(x-a)}{\rho}$$

Für die Kugelkuppel (Fig. 348) ſind alle Normalſchnitte gröſste Kreiſe der Kugel; alle ρ ſind gleich dem Kugelhalbmeſſer r. Wählt man den Mittelpunkt der Kuppel als Anfangspunkt der Coordinatenaxen, ſo werden $a = b = c = 0$, und es werden

$$\left.\begin{aligned} n &= p\,\frac{x}{r} \\ n_x &= \frac{p}{r^2}\,x^2 \\ n_y &= \frac{p}{r^2}\,(x y) \\ n_z &= \frac{p}{r^2}\,(x z) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 350.$$

Beifpiel. Für das in Fig. 349 dargeftellte, einer Halbkugelkuppel eingefchriebene Polyeder über einem Zwölfeck fei $r = 10$ m, der Wind komme von links. Dann find die Werthe von n für die bezeichneten Punkte wie in nachftehender Tabelle angegeben (für $p = 120$ kg für 1 qcm):

Fig. 349.



Punkt	I	I'	I''	I'''
$\frac{x}{r} =$	0,32	0,71	0,94	1
$n = \frac{p x}{r} =$	38	85	113	120 kg

Punkt	II	II'	II''	II'''
$\frac{x}{r} =$	0,29	0,62	0,82	0,88
$n = \frac{p x}{r} =$	35	74	98	106 kg.

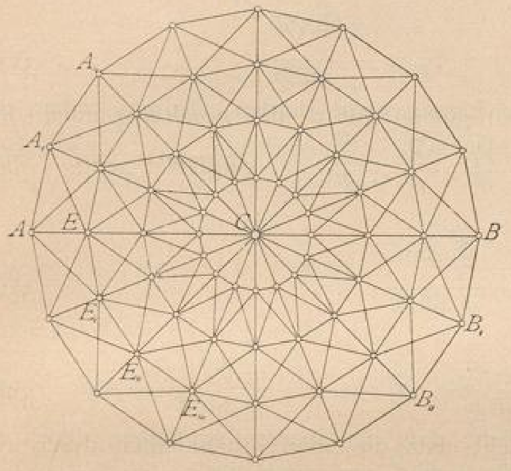
Punkt	III	III'	III''	III'''
$\frac{x}{r} =$	0,17	0,36	0,47	0,5
$n = \frac{p x}{r} =$	20	43	56	60 kg.

Danach kann man leicht die auf die einzelnen Knotenpunkte entfallenden, fenkrecht zur Kuppeloberfläche gerichteten Winddrücke berechnen. Näher ift auf diefen Gegenftand in der unten genannten Abhandlung des Verf.[37]) eingegangen.

b) Flache Zeltdächer.

Die Zeltdächer bilden Pyramiden, in den meiften Fällen regelmäfsige Pyramiden. Man kann fie aus einer Anzahl radial geftellter Binder, welche unter die fog. Grate kommen, conftruiren; alsdann wird die Berechnung eines jeden Binders unter Zugrundelegung der auf ihn entfallenden Belaftungen fo vorgenommen, wie bei den Balkendächern gezeigt ift. Neuerdings legt man auch bei den Zeltdächern — zumal den flachen — alle Conftructionstheile in die Dachflächen, wie bei den *Schwedler*'fchen Kuppeln, fo dafs fich eine entfprechende Conftruction ergiebt. In diefem Falle (Fig. 350) werden eine Anzahl Binderfparren $AC, A_{,}C, A_{,,}C, BC, B_{,}C, B_{,,}C\ldots$ angeordnet; zwifchen denfelben befinden fich wagrechte Ringe E, $E_{,}$, $E_{,,}$, $E_{,,,}\ldots$ und in den viereckigen Feldern der Dachflächen, wegen der ungleichmäfsigen Belaftungen, Diagonalen. Auch hier wird oft in der Dachmitte eine Laterne angeordnet, welche fich auf einen Laternenring ftützt, gegen den fich die oberen Sparrenenden lehnen. Wir werden hier nur die der Kuppelconftruction entfprechende Anordnung betrachten. Obgleich die gröfsere oder geringere Neigung der Dachflächen keinen grundlegenden Unterfchied bedingt, follen die Zeltdächer dennoch in flache und fteile Zeltdächer eingetheilt werden, weil bei den erfteren die Belaftung durch Schnee, bei den letzteren diejenige durch Wind die mafsgebende zufällige Belaftung ift. 252. Zeltdächer.

Fig. 350.



Zu den flachen Zeltdächern gehören die Circus- und Theaterdächer, die Dächer über Panoramen, Locomotivfchuppen etc., zu den fteilen hauptfächlich die Thurmdächer.

Die flachen Zeltdächer der vorbefprochenen Anordnung find weiter nichts, als Kuppeldächer mit gleichem Neigungswinkel α in der ganzen Dachfläche. Man erhält alfo unter denfelben Vorausfetzungen für die Belaftungen, wie in Art. 243 (S. 248) die hier geltenden Stabkräfte, indem man in die dort gefundenen Werthe ftatt der veränderlichen Winkelwerthe $\alpha_{m-1}, \alpha_m, \alpha_{m+1}\ldots$ den conftanten Winkelwerth α einfetzt.

Spannungen in den Sparren. Wiederum mögen $G_1, G_2 \ldots G_m \ldots$ die Eigengewichte der ganzen Ringzonen, $P_1, P_2 \ldots P_m \ldots$ die zufälligen Belaftungen derfelben fein; alsdann find, falls n Sparren vorhanden find, die Belaftungen der einzelnen Knotenpunkte bezw. $\frac{G_1}{n}, \frac{G_2}{n} \ldots \frac{G_m}{n} \ldots$ und $\frac{P_1}{n}, \frac{P_2}{n} \ldots \frac{P_m}{n} \ldots$ 253. Berechnung der Stabfpannungen.

[37]) Winddruck auf Kuppeln. Centralbl. d. Bauverw. 1898, S. 217.