



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik der Hochbau-Constructions

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

c) Steile Zeltdächer oder Thurmdächer

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77733](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77733)

$\gamma \eta = S_2, \eta \zeta = H_2, \delta \theta = S_3, \theta \eta = H_3, \varepsilon \alpha = S_4, \alpha \beta = H_4$; ferner $\varepsilon a = D_0, \alpha z = H_5, \zeta \lambda = \lambda a = R_1, \eta \mu = \mu \zeta = R_2, \theta \nu = \nu \eta = R_3, \alpha o = o \theta = R_4$ und $a \sigma = \sigma z = R_5$ (= Mauerringspannung).

Je nachdem nun die Kräfte $\lambda, \mu, \nu, \sigma$ die Eigengewichte oder die zufälligen Lasten bedeuten, erhält man die durch die eine oder andere Belastung erzeugten Spannungen. Die Spannungen in den Diagonalen sind leicht zu construiren.

c) Steile Zeldächer oder Thurmdächer.

Als lothrechte Belastung ist hier nur das Eigengewicht einzuführen. Eine Belastung durch Schnee findet nicht statt, weil wegen der großen Steilheit des Daches der Schnee nicht liegen bleibt. Diese lothrechte Belastung erzeugt, da die Construction eben so, wie bei den flachen Zeldächern, aus Sparren und Ringen zusammengesetzt wird, Spannungen, welche genau, wie dort gezeigt wurde, zu berechnen sind. Auf diese Berechnung soll deshalb hier nicht weiter eingegangen werden. Dagegen spielt der Winddruck hier eine große Rolle, und die durch diesen erzeugten Spannungen sollen berechnet werden. Zunächst soll die Berechnung für ein vierseitiges Pyramidendach, alsdann für ein achtseitiges Pyramidendach gezeigt werden.

1) Vierseitiges Pyramidendach.

Der Winddruck auf eine Pyramidenseite ist am größten, wenn die Windrichtung im Grundriss senkrecht zur betreffenden Rechteckseite steht. Als dann ist der Winddruck für 1 qm schräger Dachfläche (Fig. 355 u. 356) nach Gleichung 7:

255.
Belastung.

$v = 120 \sin(\alpha + 10^\circ)$; die vom Winde getroffene schräge Dachfläche ist

$$F = \frac{a \lambda}{2} = \frac{a h}{2 \sin \alpha},$$

mithin der Gesamtdruck gegen eine Pyramidenseite

$$N = \frac{a h v}{2 \sin \alpha} \quad 364.$$

Wir denken uns nun in der Symmetrie-Ebene *II* einen ideellen Binder *ABC* (Fig. 355) und bestimmen die darin durch den Winddruck entstehenden Spannungen; wir nehmen vorläufig die Wagrechten und Diagonalen, wie in Fig. 356 gezeichnet,

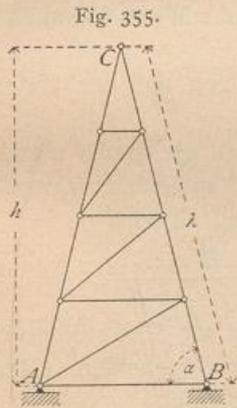
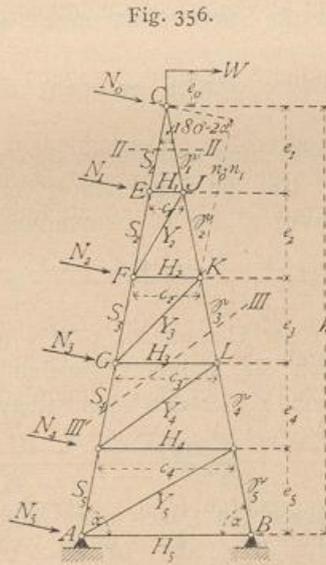
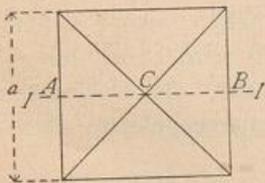


Fig. 357.



an. Auf ein oben befindliches Kreuz wirke ein Winddruck *W* in der Höhe e_0 über dem Firstpunkt *C*; außerdem wirken in den Knotenpunkten *C, E, F, G...* die Kräfte $N_0, N_1, N_2, N_3...$ senkrecht zur Dachfläche; die Größe dieser Kräfte ist leicht aus den auf die bezüglichen Knotenpunkte entfallenden Dachflächen zu ermitteln.

256.
Berechnung
der
Spannungen
im ideellen
Binder.

α) Berechnung der Spannungen im ideellen Binder. Um die Sparrenspannung S_1 (Fig. 356) an der Windseite zu erhalten, lege man einen beliebigen Schnitt durch CE , etwa nach $II II$, und betrachte das Bruchstück oberhalb des Schnittes. Wählt man \mathcal{F} als Momentenpunkt, so heisst die Gleichung der statischen Momente (Fig. 358):

$$0 = S_1 c_1 \sin \alpha - W(e_0 + e_1) - N_0 n_0.$$

Nun ist

$$\overline{C\mathcal{F}} = \frac{e_1}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad \cos(180 - 2\alpha) = \frac{n_0}{C\mathcal{F}} = -\cos 2\alpha, \quad \text{daher}$$

$$n_0 = -\overline{C\mathcal{F}} \cos 2\alpha = -\frac{e_1}{\sin \alpha} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{e_1 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha}.$$

Man erhält hiernach

$$S_1 = \frac{W(e_0 + e_1)}{c_1 \sin \alpha} + \frac{N_0 e_1 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{c_1 \sin^2 \alpha}.$$

Für irgend einen Sparren FG ist K der Momentenpunkt, und für S_3 ergibt sich der Werth

$$S_3 = \frac{1}{c_2 \sin \alpha} \left[W(e_0 + e_1 + e_2) + N_0(n_0 + n_1) + N_1 n_1 \right] - N_2 \cotg \alpha.$$

Für irgend einen Sparren KL auf der Unterwindseite ist G der Momentenpunkt und

$$\mathfrak{S}_3 = -\frac{1}{c_3 \sin \alpha} \left[W(e_0 + e_1 + e_2 + e_3) + \frac{N_0(e_1 + e_2 + e_3) + N_1(e_2 + e_3) + N_2 e_3}{\sin \alpha} \right].$$

Eben so ergeben sich leicht alle Sparrenspannungen, sowohl auf der Windseite, wie auf der Unterwindseite.

Die Sparren auf der Windseite werden gezogen; diejenigen auf der Unterwindseite werden gedrückt.

Die Spannungen in den Wagrechten und Diagonalen werden gleichfalls mittels der Momentenmethode ermittelt. Um die Spannung H_3 in GL zu finden, schneide man schräg nach $III III$; alsdann ist C der Momentenpunkt, und es wird

$$H_3 = -\frac{N_1 e_1 + N_2(e_1 + e_2) + N_3(e_1 + e_2 + e_3)}{(e_1 + e_2 + e_3) \sin \alpha} + \frac{W e_0}{e_1 + e_2 + e_3}.$$

Die Spannung Y_3 endlich in der Diagonalen GK wird, da für GK wiederum C der conjugirte Punkt ist, durch die Momentengleichung für C gefunden. Man erhält, wenn y_3 der Hebelsarm von Y_3 für den Momentenpunkt C ist,

$$Y_3 = \frac{1}{y_3} \frac{N_1 e_1 + N_2(e_1 + e_2)}{\sin \alpha} - \frac{W e_0}{y_3}.$$

Ob die Diagonalen und Wagrechten Druck oder Zug erhalten, hängt wesentlich von der Grösse des Moments $W e_0$ ab. Ist $W = 0$, so werden bei der gezeichneten Richtung der Diagonalen die Wagrechten gedrückt, die Diagonalen gezogen. Bei der entgegengesetzten Windrichtung findet entgegengesetzte Beanspruchung statt.

257.
Graphische
Ermittlung
der
Spannungen
im ideellen
Binder.

β) Graphische Ermittlung der Spannungen im ideellen Binder. Wird zunächst von der Kraft W abgesehen, so ergibt sich ohne Schwierigkeit der in Fig. 359 gezeichnete Kräfteplan, worin alle Stabspannungen, welche durch Winddruck erzeugt werden, enthalten sind.

Fig. 358.

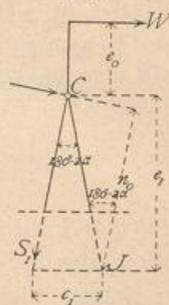


Fig. 359.

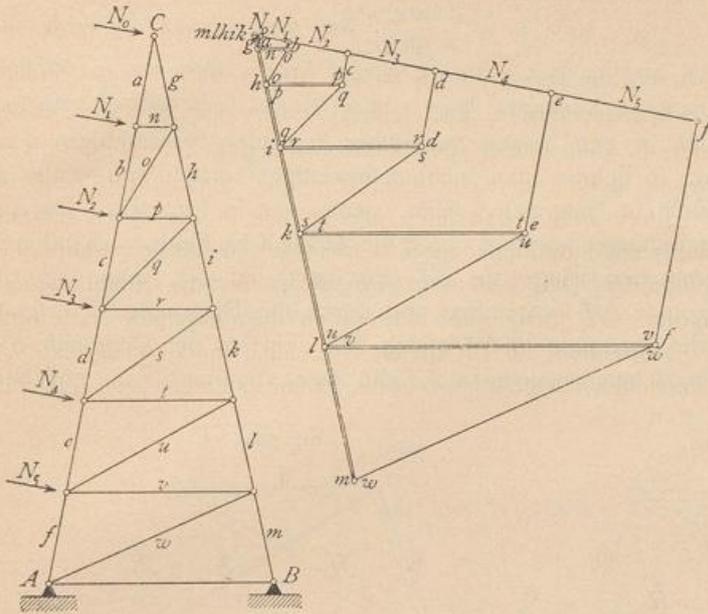
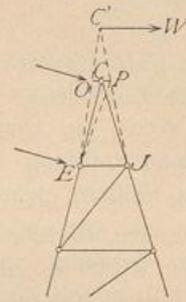


Fig. 360.



Falls noch ein Winddruck W vorhanden ist, so empfiehlt es sich, für die graphische Bestimmung der Spannungen statt der wirklich vorhandenen Stäbe EC und $\mathcal{F}C$ zwei Stäbe EC' und $\mathcal{F}C'$ einzuführen, wobei C' der Schnittpunkt der Kraft W mit der Mittel-

Lothrechten (Fig. 360) ist; die Ermittlung kann dann für den Thurm mit der Spitze $EOC'P\mathcal{F}$ nach der Cremona'schen Methode erfolgen. Die Spannungen in EC und $\mathcal{F}C$ können mit geringem Fehler denjenigen, welche sich für EO und $P\mathcal{F}$ ergeben haben, gleich gesetzt werden.

γ) Zurückführung der Spannungen im ideellen Binder auf die wirklichen Stabspannungen. Die bisher berechneten Spannungen finden im ideellen Binder ACB (Fig. 361) statt. Jede Spannung in einem Stabe des ideellen

258.
Wirkliche
Stab-
spannungen.

Fig. 361.

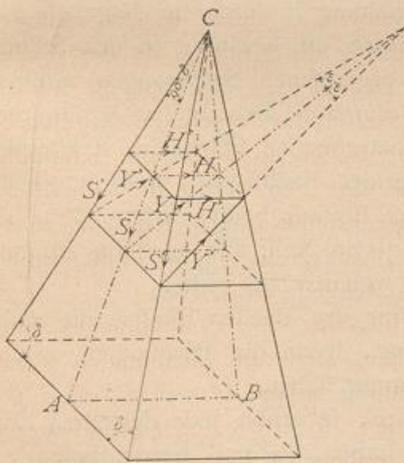


Fig. 362.



Binders wird nun durch zwei Stabspannungen der beiden wirklichen Binder geleistet, deren Ebenen mit derjenigen des ideellen Binders den Winkel $(90 - \alpha)$ einschließen.

Die Spannung S in irgend einem Sparren des ideellen Binders wird durch zwei Spannungen S' ersetzt; demnach ist

$$S = 2 S' \cos (90 - \delta) = 2 S' \sin \delta,$$

woraus

$$S' = \frac{S}{2 \sin \delta}; \quad \dots \quad 365.$$

eben so

$$\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E}}{2 \sin \delta} \quad \dots \quad 366.$$

Ferner wird $H = 2 H'$, woraus

$$H' = \frac{H}{2}; \quad \dots \quad 367.$$

$$Y = 2 Y' \cos \varepsilon,$$

woraus

$$Y' = \frac{Y}{2 \cos \varepsilon} \quad \dots \quad 368.$$

Auch auf graphischem Wege ist die Zurückführung leicht. Man construire (Fig. 362) den Winkel $(90 - \delta)$, bzw. ε . Ist $\angle r m n = 90 - \delta$, so ist $m r = \frac{m n}{\sin \delta}$. Man trage demnach die Werthe für $\frac{S}{2}$ und $\frac{S}{2}$ auf der Linie $m n$ ab, projicire diese Abschnitte auf $m r$; alsdann erhält man in den Projectionen die gefachten wirklichen Sparrenspannungen. Eben so ist die Division durch $\cos \varepsilon$ vorzunehmen.

Wenn die Diagonalen in den beiden gegenüber liegenden Seitenfeldern verschiedene Richtung haben, so nehme man nichtsdestoweniger zunächst an, daß in beiden Feldern gleich gerichtete Diagonalen seien, genau wie in Fig. 361. Darauf ersetze man die nur vorläufig angenommene durch die wirklich im Felde vorhandene. In der vorläufig angenommenen Diagonale $\overline{b d}$ (Fig. 363) sei die Spannung zu Y' ermittelt; soll die Diagonale $\overline{b d}$ fortgelassen und durch die Diagonale $\overline{a c}$ ersetzt werden können, so muß die Spannung in $\overline{b d}$ gleich Null sein; in der Diagonale $\overline{a c}$ muß also eine Kraft Z herrschen, welche in $\overline{b d}$ die Zusatzspannung von gleicher

Fig. 363.

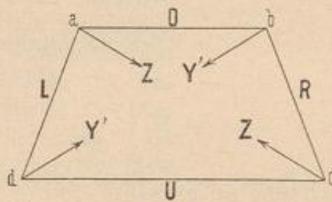
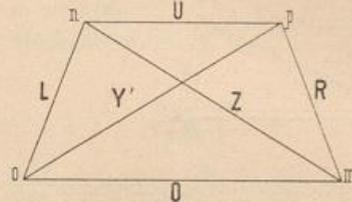


Fig. 364.



Größe Y' , aber entgegengesetztem Sinne mit der bereits in $\overline{b d}$ herrschenden Spannung erzeugt. Bringt man in a und c je die Kraft $Z = \overline{m n}$ an (Fig. 364), so erhält man die Größe der in den Stäben des Trapezes wirkenden Spannungen aus dem Kräfteplan. Es ist $L = \overline{o n}$, $O = \overline{m o}$, $U = \overline{n p}$ und $R = \overline{p m}$, und wegen der Gleichheit der Diagonalen des Trapezes ist $Z = Y'$ (absolut genommen). Ersetzt man also die Diagonale $\overline{b d}$ mit der berechneten Spannung Y' durch die Diagonale $\overline{a c}$, so herrscht in letzterer der gleiche Zug. Die durch die Kräfte Z in den Stäben des Trapezes und des übrigen Fachwerkes hervorgerufenen Spannungen addiren sich zu den bereits in denselben vorhandenen und durch die Berechnung ermittelten. Diese Zusatzspannungen sind für die Stäbe des betreffenden Feldes im Kräfteplan der Fig. 364 verzeichnet, für alle übrigen Stäbe des Fachwerkes sind sie gleich Null. Denn für jeden dieser übrigen Stäbe ist der Einfluß beider Kräfte Z zu berücksichtigen. Die Resultirende beider Z ist aber gleich Null, also auch ihr Einfluß auf die Stabspannungen außerhalb des Feldes, in welchem sie wirken.

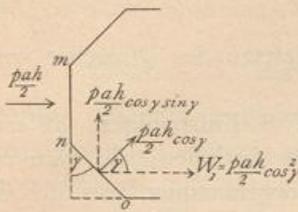
Das vorstehend angegebene Verfahren, mit Hilfe des ideellen Binders die Stabspannungen zu ermitteln, ist also auch anwendbar, wenn die Diagonalen zweier gegenüber liegender Felder entgegengesetzte Richtung haben.

Wenn einfache Diagonalen angeordnet werden, so erhält jede derselben Zug und Druck; will man nur gezogene Diagonalen haben, so sind Gegendiagonalen anzuordnen, worüber das Erforderliche bereits mehrfach gesagt ist.

2) Achteitiges Pyramidendach.

Wir nehmen hier die Windrichtung, der einfachen Rechnung halber, wagrecht an und berechnen aus demselben Grunde den Winddruck so, als wenn die Seitenflächen lothrecht ständen. Der dabei gemachte Fehler ist gering. Wenn die Wind-

Fig. 365.



richtung im Grundrifs senkrecht zur Seite mn (Fig. 365) angenommen wird, die Seitenlänge des regelmäßigen Achteckes an der Unterkante der Pyramide mit a , die Höhe der Pyramide mit h und der Druck für die Flächeneinheit mit p bezeichnet wird, so ist der Druck gegen die Fläche F demnach

$$W = \frac{p a h}{2} \dots \dots \dots 369.$$

Der Winddruck auf die Fläche F_1 (Fig. 366) ergibt sich unter obigen vereinfachenden Annahmen folgendermaßen. Die (lothrecht gedachte) Fläche schließt mit der angenommenen Windrichtung (Fig. 365) einen Winkel $(90 - \gamma)$ ein; mithin ist der senkrechte Winddruck auf die Fläche für die Flächeneinheit nach Art. 31 (S. 24)

$$n = p \sin (90 - \gamma)$$

oder

$$n = p \cos \gamma,$$

und der Winddruck auf die ganze Fläche

$$\frac{p a h}{2} \cos \gamma.$$

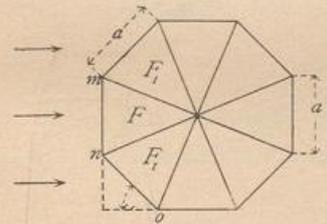
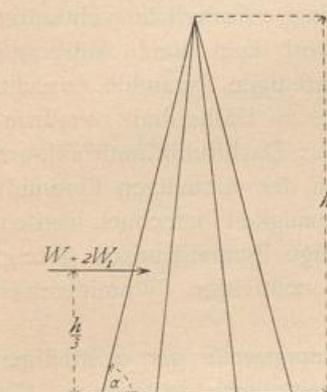
Diese Kraft zerlegt sich nun in eine Seitenkraft, welche dieselbe Richtung hat, wie W , und in eine senkrecht hierzu stehende. Die erstere ist (Fig. 365)

$$W_1 = \frac{p a h \cos^2 \gamma}{2} \dots \dots \dots 370.$$

Ein genau gleicher Winddruck wirkt (Fig. 366) auf die andere Fläche F_1 ; mithin ist der gefamnte auf Umkanten der Pyramide wirkende Winddruck

$$\begin{aligned} W + 2 W_1 &= \frac{p a h}{2} (1 + 2 \cos^2 45^\circ) \\ &= \frac{p a h}{2} \left(1 + \frac{2}{2}\right) = p a h. \dots \dots 371. \end{aligned}$$

Der Angriffspunkt dieser Kraft liegt in der Höhe $\frac{h}{3}$ über der Grundfläche der Pyramide.



Für irgend einen Pyramidentheil (Fig. 367) von der Höhe z erhält man, wenn die Seite des Achteckes, welches für diesen Theil die Grundfläche bildet, mit x und die ganze Breite der Grundfläche mit y bezeichnet wird,

$$W_z = p x z \dots \dots \dots 372.$$

W_z greift in der Höhe $\frac{z}{3}$ über dieser Grundfläche an.

Nun ist $\frac{x}{z} = \frac{a}{h}$, also $x = \frac{a}{h} z$ und

$$W_z = p \frac{a}{h} z^2 \dots \dots \dots 373.$$

Der Zuwachs der Kraft W_z , welcher auf einen Streifen von der Höhe dz entfällt, ist demnach $dW_z = 2p \frac{a}{h} z dz$, und die Windbelastung für die Höheneinheit wird



Sind die Spannungen in den vier Sparren 1, 2, 5, 6, welche um $\frac{y}{2}$ von der Axe II abstehen, S_1 , diejenigen in den vier um $\frac{x}{2}$ von der Axe II abstehenden Sparren 3, 4, 7, 8 gleich S_2 , so ist, wenn mit geringem Fehler der Sparrenwinkel gegen die wagrechte Ebene gleich α gesetzt wird, das Moment der Sparrenspannungen für die Axe II (die Null-Linie des Gesamtquerschnittes) $2 S_1 y \sin \alpha + 2 S_2 x \sin \alpha$. Demnach muß

$$M_z = 2 S_1 y \sin \alpha + 2 S_2 x \sin \alpha$$

sein. Nach Art. 260 wird angenommen, daß stattfindet:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{y}{2}} = \frac{x}{y}, \text{ d. h. } S_2 = S_1 \frac{x}{y};$$

daher wird

$$M_z = 2 S_1 \sin \alpha \left[y + \frac{x^2}{y} \right] = \frac{2 S_1 \sin \alpha}{y} (x^2 + y^2)$$

sein, woraus folgt:

$$S_1 = \frac{M_z y}{2 (x^2 + y^2) \sin \alpha} \dots \dots \dots 376.$$

$$S_2 = \frac{M_z x}{2 (x^2 + y^2) \sin \alpha} \dots \dots \dots 377.$$

Für M_z sind der Reihe nach die Werthe einzuführen, welche sich bei den verschiedenen Höhen z ergeben. Diese Spannung kann in jedem Sparren sowohl als Zug, wie als Druck stattfinden, da der Wind von allen Seiten kommen kann. S_1 ist stets größer als S_2 . Die größte Spannung, welche durch Winddruck in allen Sparren erzeugt wird, hat also den Werth

$$S_{p \max} = \pm \frac{M_z y}{2 (x^2 + y^2) \sin \alpha} \dots \dots \dots 378.$$

Wenn die Pyramide über einem regelmäßigen Achteck errichtet ist, so ist $y = x + 2 x \cos 45^\circ = x \cdot 2,414$, und es wird dann

$$\left. \begin{aligned} S_{p \max} &= \pm \frac{M_z \cdot 0,177}{x \sin \alpha} \\ \text{bzw.} \\ S_{p \max} &= \pm \frac{M_z \cdot 0,427}{y \sin \alpha} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 379.$$

Auf einen beliebigen Theil der vom Winde voll getroffenen Pyramidenseite $OB'C'$ (Fig. 368a) entfalle der Winddruck N ; auf die entsprechenden Theile der angrenzenden Seitenfläche $OA'B'$ und $OC'D'$ entfalle je der Winddruck N' . Nach Früherem ist $N' = N \cos 45^\circ = \frac{N}{\sqrt{2}}$. In B wirkt dann $\frac{N}{2}$, bzw. $\frac{N'}{2}$, wie in Fig. 368b gezeichnet ist; desgleichen in C .

Die Lasten $\frac{N}{2}$ und $\frac{N'}{2}$ zerlegen sich in B , bzw. in C in Seitenkräfte, welche in die Ebenen $OB'A'$, $OB'C'$ und $OC'D'$ fallen. Aus Fig. 368c ergibt sich im Punkte B , wenn $\alpha\beta = \frac{N}{2}$ und $\beta\delta = \frac{N'}{2}$ ist, die Größe der Seitenkräfte T , bzw. T' und T'' :

262.
Spannungen
in den
Ringen und
Diagonalen.

$$T_0' = \overline{\varepsilon\beta} + \overline{\beta\gamma} = \frac{N'}{2} + \frac{N}{2 \cos 45^\circ} = \frac{N}{2\sqrt{2}} + \frac{N\sqrt{2}}{2} = \frac{N}{2\sqrt{2}} [1+2] = 1,06 N$$

$$T = \overline{\gamma\alpha} + \overline{\delta\varepsilon} = \frac{N}{2} + \frac{N'}{2 \cos 45^\circ} = \frac{N}{2} + \frac{N\sqrt{2}}{2} = N.$$

Für Punkt A erhält man:

$$T_u' = \overline{\zeta\beta} = \frac{N'}{2} = \frac{N}{2\sqrt{2}} = 0,354 N,$$

$$T'' = \overline{\delta\zeta} = \frac{N'}{2 \cos 45^\circ} = \frac{N'\sqrt{2}}{2} = \frac{N}{2}.$$

380.

In der Seitenfläche $OB'C'$, welche vom Winde voll getroffen wird, sind die Spannungen der Ringfläche von B und C aus je gleich T . Die Größe von T hängt von der Größe der Kraft N , d. h. von der Größe der auf den betreffenden Stab entfallenden, vom Winde getroffenen Fläche ab. Die Diagonalen in dieser Seitenfläche werden bei dieser Belastung nicht beansprucht.

In der Seitenfläche $OA'B'$ wirkt von der Seite des Grates OB' (des Windgrates) aus die Belastung T_0' , von der Seite des Grates OA' (des Unterwindgrates) aus die negative Belastung T_u' auf das Fachwerk. Diese Belastungen müssen durch das in der Seitenfläche

Wind-
richtung →

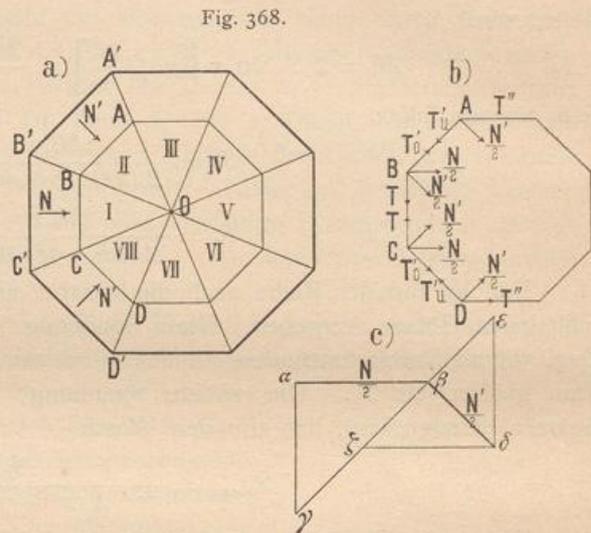


Fig. 368.

$OB'A'$ liegende Fachwerk auf die festen Auflagerpunkte $A'B'$ gebracht werden. Das Fachwerk dieser Seitenfläche wirkt dabei wie ein Freitragler (siehe Art. 158, S. 151³⁸⁾). Die Belastungen, sowohl von der Seite des Grates OB' (des Windgrates), wie des Grates OA' (des Unterwindgrates), nehmen von der Spitze nach dem Auflager entsprechend dem Gesetze des Dreieckes (linear) zu (siehe Art. 259, S. 273). Der Winddruck gegen die Fläche I von der Spitze bis zu einer Höhe z unter derselben ist mit den Bezeichnungen in Fig. 367: $N_z = p \frac{xz}{2}$ und, da $x = \frac{a}{h} z$ ist,

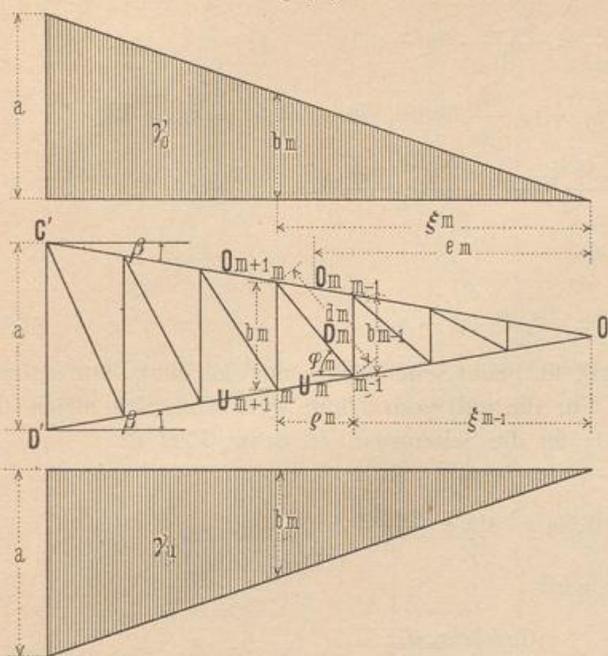
$$N_z = \frac{pa}{2h} z^2.$$

Sonach ist die positive Belastung des Fachwerkes in der Seitenfläche II , bzw. $VIII$ auf die Höhe z unter der Spitze mit Rücksicht auf Gleichung 380

$$T_{0z}' = 1,06 \frac{pa}{2h} z^2, \dots \dots \dots 381.$$

³⁸⁾ Siehe bezüglich nachstehender Ableitung: MÜLLER-Breslau, H. Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Centralbl. d. Bauverw. 1892, S. 257. — Auch als Sonderabdruck erschienen: Berlin 1892.

Fig. 369.



die negative Belastung desselben Fachwerkes

$$T_{u_s}' = 0,354 \frac{p a}{2 h} z^2 \quad 382.$$

In Fig. 369 ist das Fachwerk der Seitenfläche VIII ($O C' D'$) des leichteren Verständnisses halber mit wagrechter Axe als Freitragler gezeichnet. Die Belastungen sind nach Größe und Vertheilung darüber, bzw. darunter angegeben; dabei ist die auf die Einheit der schraffirten Flächen entfallende Belastung (γ_0 , bzw. γ_u) so gewählt, dass die Abmessungen b und ξ der Belastungsdreiecke dieselben sind, wie diejenigen des Freitragers. Die gefammte Belastung von der Seite des Windgrates folgt aus

Gleichung 381 für $z = h$; sie ist $T_{0_h}' = 1,06 \frac{p a h}{2}$. Die Einheitsbelastung γ_0 folgt dann aus der Bedingungsgleichung:

$$\gamma_0 \frac{a h}{2 \sin \alpha} = 1,06 \frac{p a h}{2},$$

$$\gamma_0 = 1,06 p \sin \alpha; \quad \dots \quad 383.$$

eben so ergibt sich die Einheitsbelastung der unteren Fläche zu

$$\gamma_u = 0,354 p \sin \alpha \quad \dots \quad 384.$$

Das Gleichgewicht am m -ten Knotenpunkte der oberen Gurtung bedingt:

$$D_m \cos \varphi_m = O_{m+1} \cos \beta - O_m \cos \beta.$$

Bedeutet M_m , bzw. M_{m-1} die Momente der äußeren Kräfte für die Knotenpunkte m , bzw. $m-1$, so ist nach Fig. 369

$$O_{m+1} \cos \beta = \frac{M_m}{b_m} \quad \text{und} \quad O_m \cos \beta = \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}};$$

mithin

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m}{b_m} - \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}}.$$

Bezeichnet d_m die Länge der Diagonale, ρ_m die Höhe des betreffenden Feldes in der Dachschräge gemessen, so ist $\cos \varphi_m = \frac{\rho_m}{d_m}$, also

$$D_m = \frac{d_m}{\rho_m} \left(\frac{M_m}{b_m} - \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}} \right).$$

Ferner ist

$$M_m = \frac{b_m \xi_m}{2} \cdot \frac{\xi_m}{3} (\gamma_0 - \gamma_u), \quad \text{also} \quad \frac{M_m}{b_m} = \frac{\xi_m^2}{6} (\gamma_0 - \gamma_u),$$

und eben so

$$\frac{M_{m-1}}{b_{m-1}} = \frac{\xi_{m-1}^2}{6} (\gamma_0 - \gamma_u);$$

mithin $D_m = \frac{(\xi_m^2 - \xi_{m-1}^2)}{6} (\gamma_0 - \gamma_u) \frac{d_m}{\rho_m}$ und, da $\rho_m = \xi_m - \xi_{m-1}$ ist,

$$D_m = \frac{(\xi_m + \xi_{m-1})}{2} \cdot \frac{(\gamma_0 - \gamma_u)}{3} d_m.$$

Mit $e_m = \frac{\xi_m + \xi_{m-1}}{2}$ wird

$$D_m = \frac{e_m d_m}{3} (\gamma_0 - \gamma_u) \dots \dots \dots 385.$$

Vorstehende Entwicklung gilt für jede Seitenfläche; nur sind für γ_0 und γ_u die bezüglichen Werthe einzusetzen. Für die voll vom Winde getroffene Seitenfläche I ist $\gamma_0 - \gamma_u = \text{Null}$, also alle $D = 0$; für die Seitenwand II, bzw. VIII ist

$$(\gamma_0 - \gamma_u) = 0,706 p \cdot \sin \alpha;$$

also

$$D_m = 0,706 p \cdot \sin \alpha \cdot \frac{e_m d_m}{3}.$$

Setzt man $e_m = \frac{z_m}{\sin \alpha}$, so wird

$$D_m = \frac{0,706 p z_m d_m}{3} \dots \dots \dots 386.$$

Ringspannungen. Um die Ringspannungen (d. h. die Spannungen der Pfosten im Freitragger der Fig. 369) zu bestimmen, ermittelt man zweckmäÙig getrennt die Beiträge, welche durch die Belastungen γ_0 und diejenigen, welche durch die Lasten γ_u erzeugt werden. Für $\gamma_u = 0$ sei im m -ten Ringstabe die Spannung R_m' ; das Gleichgewicht am m -ten Knotenpunkte der unteren Gurtung führt zum Kraftpolygon in Fig. 370b. Es ergibt sich $-\frac{R_m}{D_{m+1}} = \frac{b_{m+1}}{d_{m+1}}$. Nach

Gleichung 385 ist für $\gamma_u = 0$: $D_{m+1} = \frac{e_{m+1} d_{m+1}}{3} \gamma_0$;

also

$$R_m' = -\frac{e_{m+1} b_{m+1} \gamma_0}{3}.$$

Für $\gamma_0 = 0$ ergibt die Betrachtung des m -ten Knotenpunktes der oberen Gurtung aus dem Kraftpolygon in Fig. 370b $\frac{R_m''}{-D_m} = \frac{b_{m-1}}{d_m}$. Nach Gleichung 385 ist

für $\gamma_0 = 0$: $D_m = -\frac{e_m d_m \gamma_u}{3}$; somit

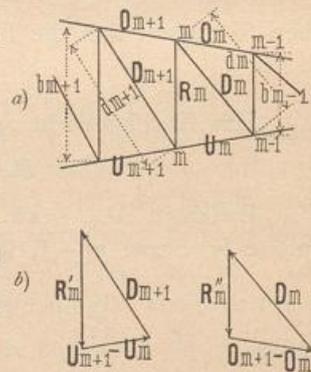
$$R_m'' = \frac{e_m b_{m-1} \gamma_u}{3}.$$

Somit wird die Ringspannung durch die gemeinsame Belastung γ_0 und γ_u

$$R_m = -\frac{1}{3} \left[b_{m+1} e_{m+1} \gamma_0 - e_m b_{m-1} \gamma_u \right] \dots \dots \dots 387.$$

Da der Wind von allen Seiten kommen kann, so ist zu untersuchen, in welcher Seitenfläche die Diagonal- und Ringspannungen am größten werden können; die erhaltenen Werthe sind der Construction der Diagonalen und Ringstäbe in allen Seitenflächen zu Grunde zu legen.

Fig. 370.



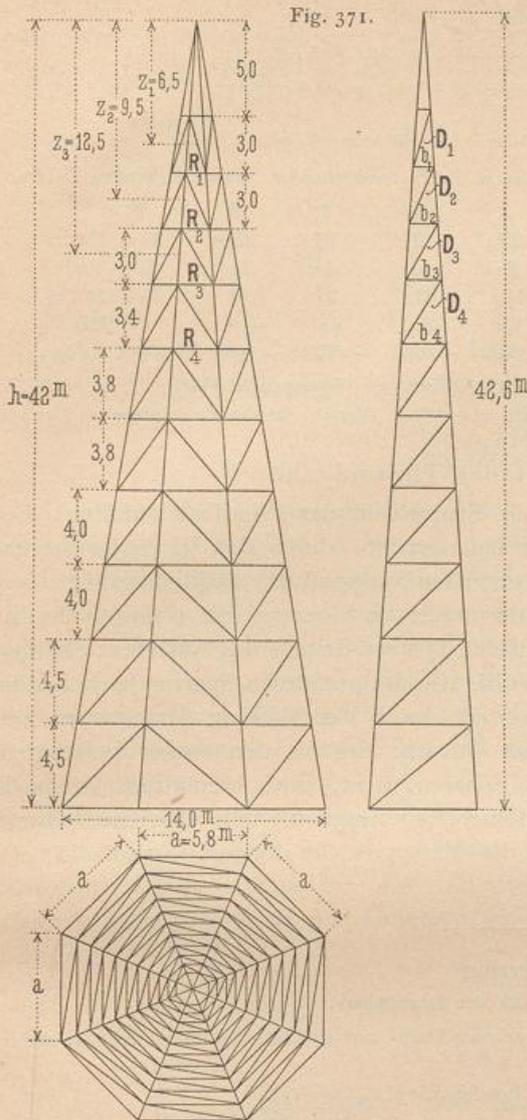


Fig. 371.

Zu den vorstehend ermittelten, durch den Wind hervorgerufenen Stabspannungen kommen noch diejenigen durch das Eigengewicht; diese sind nach Art. 253 u. 254 (S. 265) leicht zu finden.

Beispiel. Der in Fig. 371 im Grundriss und Aufriss dargestellte Thurm über einem regelmäßigen Achteck hat eine Höhe $h = 42\text{ m}$; die Seite der achteckigen Grundfläche ist $a = 5,8\text{ m}$. Die Spannungen der Sparren, der Ring- und Diagonalfäbe sind bei einem Winddruck $p = 120\text{ kg}$ auf das Quadr.-Meter normal getroffener Fläche zu ermitteln.

263.
Beispiel.

a) Sparrenspannungen. Die Felder werden von der Spitze nach der Grundfläche hin mit 1, 2, 3... 9, 10 bezeichnet, die zu den einzelnen Feldern gehörigen Werthe z bis zur Mitte der Höhe des betreffenden Feldes gerechnet. Man erhält nach Gleichung 375 die GröÙe des Windmoments, welches die Sparrenspannungen erzeugt, zu

$$M_z = W_z \frac{z}{3} + W(e_0 + z).$$

Nach Gleichung 373 ist aber:

$$W_z = \frac{p a z^2}{h};$$

der Winddruck auf das Thurmkreuz wird zu $W = 250\text{ kg}$ und die Höhe desselben über der Spitze zu $e_0 = 4,0\text{ m}$ angenommen. Alsdann ist

$$M_z = \frac{p a}{h} \frac{z^3}{3} + 1000 + 250 z$$

und mit $\frac{p a}{3 h} = \frac{120}{3} \cdot \frac{5,8}{42} = 5,52$

$$M_z = (5,52 z^3 + 250 z + 1000)\text{ kgm.}$$

Die Berechnung ergibt folgende Tabelle:

$z = 6,5$	9,5	12,5	15,7	19,3	23,1	27	31	35,25	39,75	Met.;
$M_z = 4140$	8100	14900	26300	45500	74800	116400	173200	251700	357620	Kilogr.-Met.;
$x = 0,90$	1,31	1,73	2,17	2,7	3,19	3,73	4,28	4,86	5,5	Met.;
$S = 828$	1113	1548	2178	3032	4212	5616	7284	9320	11700	Kilogr.

Diese Werthe können sämtlich sowohl Zug wie Druck bedeuten.

β) Diagonalen. Größte Beanspruchung der Diagonalen findet in den Seitenflächen II und VIII (Fig. 368) statt. Nach Gleichung 386 ist

$$D_m = \frac{0,706 p}{3} z_m d_m = \frac{0,706 \cdot 120}{3} z_m d_m,$$

fomit

$$D_m = \infty 28 z_m d_m.$$

Das Verzeichnen der Seitenfläche ergab folgende Werthe für d_m , woraus dann die ebenfalls in der Tabelle verzeichneten Werthe von D sich ergaben:

$z_m = 6,5$	9,5	12,5	15,7	19,3	23,1	27	31	35,25	39,75	Met.;
$d_m = 3,2$	3,4	3,5	4,1	4,8	5,0	5,5	5,95	6,2	7,1	Met.;
$D = 588$	912	1230	1815	2610	3240	4190	5200	6170	7960	Kilogr.

Auch diese Werthe können, falls nicht Gegendiagonalen angeordnet sind, Zug und Druck bedeuten.

γ) Ringspannungen. Nach Gleichung 387 ist $R_m = -\frac{1}{3} (b_{m+1} e_{m+1} \gamma_0 - e_m b_{m-1} \gamma_m)$.

In der Seitenfläche VIII ist $\gamma_0 = 1,06 p \sin \alpha$, $\gamma_m = 0,354 p \sin \alpha$, $e_{m+1} = \frac{z_{m+1}}{\sin \alpha}$ und $e_m = \frac{z_m}{\sin \alpha}$; also

$$R_m = -\frac{p}{3} (1,06 b_{m+1} z_{m+1} - 0,354 b_{m-1} z_m).$$

Man erhält für die verschiedenen Werthe von m die in nachstehender Tabelle stehenden Zahlen:

$m =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$z_{m+1} =$	9,5	12,5	15,7	19,3	23,1	27	31	35,25	39,75 Met.;
$b_{m+1} =$	1,55	1,95	2,4	3,0	3,5	4,05	4,6	5,2	5,8 Met.;
$z_m =$	6,5	9,5	12,5	15,7	19,3	23,1	27	31	35,25 Met.;
$b_{m-1} =$	0,72	1,1	1,55	1,95	2,4	3,0	3,5	4,05	4,6 Met.;
$R_m =$	-558	-888	-1327	-2026	-2780	-3666	-4723	-6036	-7484 Kilogr.

Die Ringspannungen in Fläche I sind wesentlich kleiner, als diejenigen in Fläche II, bezw. VIII; mithin sind diese, d. h. die in vorstehender Tabelle ermittelten Werthe für die Berechnung zu Grunde zu legen.

3) Standfestigkeit der Thurmdächer.

264.
Verankerung.

Durch die Windbelastung werden die Sparren an der Windseite auf Zug, diejenigen an der Unterwindseite auf Druck beansprucht; durch das Eigengewicht erhalten alle Sparren Druck. Wenn der im untersten Sparrenstück mögliche grösste Zug in Folge des Winddruckes grösser ist, als der durch das Eigengewicht erzeugte Druck, so ist Gleichgewicht nur möglich, wenn auf den Sparren Seitens des Auflagers ein Zug ausgeübt wird, welcher wenigstens so gross ist, wie der grösste im Sparren herrschende Zug. Dieser Zug Seitens des Auflagers wird durch Verankerung der Sparren mit dem Thurmmauerwerk erzeugt, und das Gewicht des an den Anker gehängten Mauerwerkes, welches als Zug auf den Sparren wirkt, muss wenigstens so gross sein, wie der grösstmögliche Zug in demselben. Es empfiehlt sich, die Verankerung weiter hinabzuführen, etwa so weit, dass das Mauergewicht doppelt so gross ist, als der grösste Zug im Sparren.

Literatur.

Bücher über »Statik der Dachstühle«.

- RITTER, A. Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brücken-Constructionen. Hannover 1863. — 5. Aufl. 1894.
- UNWIN, W. *Wrought-iron bridges and roofs etc.* London 1870.
- CORDIER, E. *Equilibre stable des charpentes en fer, bois et fonte.* Paris 1872.
- FABRÉ, V. *Théorie des charpentes, donnant des règles pratiques pour la construction des fermes et autres appareils en bois et en fonte.* Paris 1873.
- CARGILL, TH. *The strains upon bridge girders and roof trusses etc.* London 1873.
- SCHREVE, S. *A treatise on the strength of bridges and roofs etc.* New-York 1873.
- TETMAJER, L. Die äusseren und inneren Kräfte an statisch bestimmten Brücken- und Dachstuhl-Constructionen. Zürich 1875.
- NICOUR, CH. *Calcul d'un comble en fer du système Polonceau.* Paris 1875.
- SCHWEDLER, W. Die Construction der Kuppeldächer. 2. Aufl. Berlin 1878.
- TRÉLAT, E. *La rigidité dans les combles.* Paris 1878.
- Deutsche bautechnische Taschenbibliothek. Heft 10: Berechnung der Dachwerke. Von W. JEEP. Leipzig 1876.
- WEYRAUCH, J. J. Beispiele und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer. Leipzig 1888.
- MÜLLER-Breslau, H. Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Berlin 1892.
- FOEPL, A. Das Fachwerk im Raume. Leipzig 1892.