Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

1. Kap. Stützlinie und Mittelkraftslinie

urn:nbn:de:hbz:466:1-77733

I. Theil, 2. Abtheilung:

DIE STATIK DER HOCHBAU-CONSTRUCTIONEN.

5. Abfchnitt.

Gewölbe.

Die Gewölbe find aus einzelnen Theilen mit Hilfe von Verbindungsmaterialien zufammengefetzte Bau-Conftructionen, welche bei lothrechten Belaftungen fchiefe Drücke auf die ftützenden Constructionstheile ausüben. Indem wir die verfchiedenen Gewölbearten[39]) hier als bekannt vorausfetzen, bemerken wir, dafs wir uns im vorliegenden Abfchnitt hauptfächlich mit den Tonnen-, bezw. Kappengewölben, den Kreuzgewölben und den Kuppelgewölben befchäftigen werden, auf welche alle anderen Gewölbearten leicht zurückgeführt werden können. 265. Allgemeines.

Der allgemeinen Unterfuchung foll das Tonnen-, bezw. Kappengewölbe zu Grunde gelegt werden; dabei wird ftets, falls nichts Anderes bemerkt wird, ein Gewölbeftück betrachtet werden, deffen Abmeffung fenkrecht zur Bildfläche gleich der Einheit, alfo gleich 1^{m} ift. Alsdann fällt die Kraftebene mit der mittleren lothrechten Ebene zufammen. Das Tonnen-, bezw. Kappengewölbe wirkt wie ein krummer Balken, welcher den Gefetzen der Elafticitätslehre unterworfen ift.

1. Kapitel.

Stützlinie und Mittelkraftslinie.

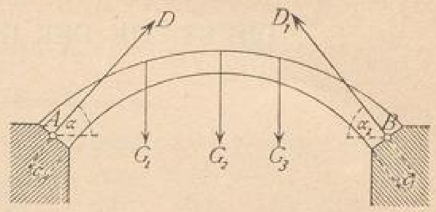
a) Allgemeines.

Für die Ermittelung der im Gewölbe auftretenden inneren Kräfte ift zunächft — genau wie bei den früher behandelten Bau-Conftructionen — die Kenntnifs der äufseren auf das Gewölbe wirkenden Kräfte nöthig, alfo der Belaftungen und der Auflagerkräfte. Die Belaftungen find in den meiften Fällen gegeben, bezw. aus den Tabellen in Art. 21 bis 27 leicht zu beftimmen. Schwieriger ift die Ermittelung der Auflagerkräfte oder, wie fie hier heifsen, der Kämpferdrücke. Bei den bisherigen Conftructionen genügten zu ihrer Beftimmung die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen; hier ift dies nicht der Fall. Wird ein beliebiges Gewölbe (Fig. 372) betrachtet, fo wird bei jedem Auflager — hier Kämpfer genannt — auf das Gewölbe eine Anzahl von Kräften übertragen, deren Mittelkraft eben der gefuchte Kämpferdruck ift; von jedem diefer Kämpferdrücke ift aber weder Gröfse, noch 266. Kämpferdrücke.

39) Siehe hierüber Theil III, Band 2, Heft 3 (Abth. III, Abfchn. 2, B, Kap. 8) diefes »Handbuches«.

Richtung, noch Angriffspunkt (A, bezw. B) bekannt. Wir haben demnach in den Kämpferdrücken 6 Unbekannte: D, D_1, α, α_1, c, c_1 (wenn c und c_1 die Abſtände der Punkte A und B von den inneren Laibungspunkten der Widerlager bezeichnen). Da die Statik vermittels der Gleichgewichtsbedingungen feſter Körper nur 3 Gleichungen zur Verfügung ſtellt, ſo iſt die Ermittelung der Kämpferdrücke auf rein ſtatiſchem Wege nicht möglich. Die Aufgabe wird gelöſt, indem man das Gewölbe als elaſtiſchen Bogen auffaſst und annimmt, daſs bei den durch die Belaſtungen erfolgenden Formänderungen die Widerlager und die anſchlieſsenden Bogenenden genau unveränderte Lage behalten. Dieſe mit der Wirklichkeit nahezu übereinſtimmende Annahme giebt weitere 3 Gleichungen, ſo daſs jetzt für die 6 Unbekannten 6 Gleichungen vorhanden ſind.

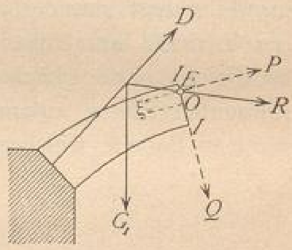
Fig. 372.



Für die einfachen Fälle des Hochbaues, bei denen faſt ſtets eine ruhende Belaſtung in Frage kommt, brauchen die Elaſticitätsgleichungen nicht aufgeſtellt zu werden. Vorläufig werde angenommen, daſs die Kämpferdrücke nach Gröſse, Richtung und Lage auf irgend welche Art gefunden und bekannt ſeien.

267. Stützlinie. Iſt letzteres der Fall, ſo ſind alle äuſseren, auf das Gewölbe wirkenden Kräfte bekannt; demnach können die ſämmtlichen äuſseren Kräfte, welche an der einen Seite eines beliebigen, ſenkrecht zur Bildebene genommenen Querſchnittes II des Gewölbes (Fig. 373) wirken, zu einer Mittelkraft vereinigt werden.

Fig. 373.



Betrachtet man etwa denjenigen Gewölbetheil, welcher links vom Querſchnitte II, alſo zwiſchen dem linken Widerlager und dem Querſchnitte II liegt, ſo ſei R dieſe Mittelkraft. Damit Gleichgewicht vorhanden ſei, muſs im Querſchnitt II eine Anzahl innerer Kräfte wirken, deren Mittelkraft gleiche Gröſse, gleiche Richtung, gleichen Angriffspunkt und entgegengeſetzten Sinn hat, wie die Kraft R. Mit der Kraft R kennt man alſo auch die Reſultirende der hier thätigen inneren Kräfte. Zerlegt man R in eine Seitenkraft P, welche parallel iſt zu der an die Bogenaxe im betrachteten Querſchnitte gezogenen Tangente, und in eine zu erſterer ſenkrechte Seitenkraft Q, ſo heiſst die erſtere die Axialkraft, die zweite die Transverſalkraft oder Querkraft. Die Querkraft iſt für die hier zu betrachtenden Fälle von geringer Wichtigkeit; von weſentlicher Bedeutung dagegen iſt Gröſse und Lage von P. Die durch die Axialkraft in den einzelnen Punkten des Querſchnittes II erzeugten Druck-, bezw. Zugſpannungen können ohne merkbaren Fehler nach den in Art. 126 (S. 111) für Stützen berechneten Gleichungen beſtimmt werden. Man erhält demnach die Spannung σ in einem um z von der Mittellinie entfernten Punkte nach Gleichung 102

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Mz}{J} = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{F\xi z}{J}\right) \quad \ldots\ldots \quad 388.$$

M iſt das Moment der äuſseren Kräfte für den Punkt O, d. h. für denjenigen Punkt, in welchem die Mittellinie des Gewölbes den Querſchnitt II ſchneidet; hier alſo iſt $M = P\xi$, da Q in Bezug auf O kein Moment hat. Die poſitiven Werthe für σ ſind hier Druckbeanſpruchungen; die negativen Werthe bedeuten Zug.

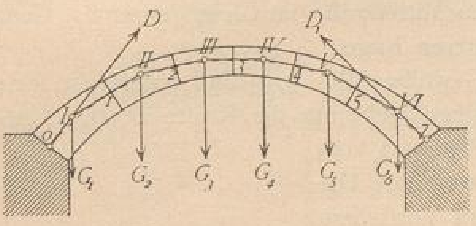
Von hervorragender Bedeutung für den Werth von σ ift die Gröfse von ξ oder, was daffelbe ift, die Lage des Punktes E, des Schnittpunktes der Mittelkraft R mit dem von ihr beanfpruchten Querfchnitte. Man hat defshalb für die Punkte E eine befondere Bezeichnung eingeführt: die Stützlinie. Die Stützlinie ift die Gefammtheit aller derjenigen Punkte, in denen die Gewölbequerfchnitte von den auf fie wirkenden Mittelkräften gefchnitten werden.

Den verfchiedenen Belaftungsarten entfprechen verfchiedene Mittelkräfte für die einzelnen Querfchnitte; daraus folgt, dafs bei demfelben Gewölbe jeder Belaftungsart auch eine befondere Stützlinie entfpricht.

268. Mittelkraftslinie oder Refultanten-Polygon.

Zerlegt man das Gewölbe in eine Anzahl von Theilen (Fig. 374), ermittelt die Kämpferdrücke (D und D_1), fo wie die Belaftungen der einzelnen Theile (G_1, G_2, $G_3 \ldots G_6$) und fetzt zunächft D mit der erften Laft G_1 zu einer Mittelkraft zufammen, diefe letztere mit G_2 und fährt fo bis zum rechten Kämpfer fort, fo erhält man ein Vieleck *o I II III IV V VI 7*, welches man die Mittelkraftslinie oder das Refultanten-Polygon nennt. Aus der Mittelkraftslinie ergeben fich fofort einzelne Punkte der Stützlinie, nämlich die Schnittpunkte der einzelnen Mittelkräfte mit den bezüglichen Querfchnitten, hier die Punkte *o, 1, 2, 3, 4, 5* und *7*. Je kleiner die einzelnen Theile des Gewölbes angenommen werden, defto mehr nähert fich die Mittelkraftslinie einer ftetig verlaufenden Curve, der fog. Seilcurve.

Fig. 374.



269. Ergebniffe der Elafticitäts-theorie.

Die Ermittelung der Form und Lage der Stützlinie auf ftatifchem Wege fetzt nach Obigem die Kenntnifs der Kämpferdrücke oder wenigftens dreier von den fechs Unbekannten voraus, welche die Kämpferdrücke nach Gröfse, Richtung und Lage beftimmen; denn alsdann find nur noch drei Unbekannte vorhanden, welche mit Hilfe der Statik ermittelt werden können. Mit Hilfe der Elafticitätstheorie der Gewölbe hat *Winkler* folgenden wichtigen Satz gefunden, den wir hier nur angeben wollen, wegen des Beweifes auf unten ftehende Quellen[40]) verweifend.

Bei conftantem Querfchnitt ift unter allen ftatifch möglichen Stützlinien nahezu diejenige die richtige, welche fich der Bogenaxe durchfchnittlich am meiften nähert, wenn man das Wort »durchfchnittlich« im Sinne der Methode der kleinften Quadratfummen deutet. Somit ift diejenige Stützlinie nahezu die richtige, für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen von der Bogenaxe ein Minimum ift. Läfft fich demnach eine Stützlinie conftruiren, welche mit der Mittellinie des Gewölbes zufammenfällt, fo wird diefe die richtige fein.

Conftruirt man alfo die Mittellinie des Bogens derart, dafs fie für die gegebene Belaftung mit der unter gewiffen Annahmen conftruirten (demnach möglichen) Stützlinie übereinftimmt, fo ift diefe Mittellinie die richtige Stützlinie — natürlich nur für die angenommene Belaftung. Da es fich aber im Hochbau meiftens um conftante Belaftungen handelt, fo ift diefe Ermittelung in der Regel genügend.

40) Winkler, F. Beitrag zur Theorie der Bogenträger. Zeitfchr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover. 1879, S. 199. Lage der Stützlinie im Gewölbe. Deutfche Bauz. 1879, S. 117 u. 127.

Wir werden weiter unten ſehen, daſs es in vielen Fällen, in denen die Aufſuchung der genauen Stützlinie ſchwierig iſt, genügt, gewiſſe Grenzlagen der Stützlinie zu ermitteln; da aber die Stützlinie leicht aus dem Reſultanten-Polygon conſtruirt werden kann, ſo wird für alle dieſe Fälle zunächſt das Reſultanten-Polygon oder die Mittelkraftslinie aufgeſucht.

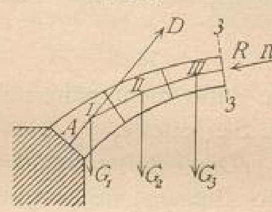
b) Mittelkraftslinie und Seilcurve.

270. Horizontalſchub im Gewölbe.

Jede Verbindungslinie zweier Eckpunkte der Mittelkraftslinie (*I II*, *II III*, *III IV*... in Fig. 374) giebt nach der Erklärung in Art. 268 (S. 283) Lage und Richtung der Mittelkraft aller an der einen Seite der betreffenden Fuge wirkenden äuſseren Kräfte. Es giebt alſo z. B. *III IV* die Richtung und Lage der Mittelkraft aller rechts von der Fuge *3* wirkenden Kräfte, d. h. der Kräfte D_1, G_4, G_5, G_6; da ſämmtliche äuſsere Kräfte einander im Gleichgewichte halten, ſo fällt die Mittelkraft aller links von der Fuge *3* wirkenden Kräfte gleichfalls in die Linie *III IV*; in derſelben halten ſich demnach die beiden Mittelkräfte im Gleichgewichte. Genau eben ſo verhält es ſich auch mit jeder anderen Fuge.

Betrachtet man nun einen Theil des Gewölbes (Fig. 375) und unterſucht ſeinen Gleichgewichtszuſtand, ſo wirken auf denſelben nicht nur die Kräfte D, G_1, G_2, G_3, ſondern auch die Kräfte, welche in der Fuge *3 3* vom anderen Theile des Gewölbes übertragen werden. Die Mittelkraft der letzteren iſt aber nach dem Vorſtehenden gleich der Mittelkraft aller auf den anderen Theil wirkenden äuſseren Kräfte, d. h. hier von D_1, G_4, G_5, G_6. Dieſe fällt in die Linie *III IV* (Fig. 374). Wenn alſo die Mittelkraftslinie bekannt iſt, ſo ſind ſtets auch Lage, Richtung und (wie weiter unten nachgewieſen wird, auch) Gröſse derjenigen Kraft bekannt, bezw. leicht zu finden, welche in der betreffenden Fuge auf das Gewölbe-Bruchſtück übertragen wird. Alles Vorſtehende gilt ſelbſtverſtändlich auch, wenn die einzelnen Gewölbetheile unendlich ſchmal werden und die Mittelkraftslinie zur Seilcurve wird; dann fällt die Mittelkraft an jeder Stelle in die Richtung der Tangente an die Curve.

Fig. 375.

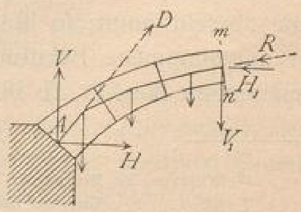


Die Kämpferdrücke D und D_1 haben lothrechte und wagrechte Seitenkräfte; in dieſer Beziehung kann man die Gewölbe als Sprengwerksträger anſehen. Dieſe wagrechten Seitenkräfte, welche auf das Gewölbe nach innen, auf die ſtützenden Seitenmauern nach auſsen, alſo ſchiebend wirken, gefährden das Bauwerk. Wenn die Belaſtungen nur lothrecht wirken, ſo haben dieſe wagrechten Seitenkräfte im ganzen Bogen bei derſelben Belaſtung gleiche Gröſse. Denn das Gleichgewicht eines beliebigen Bruchſtückes (Fig. 376) verlangt, daſs die algebraiſche Summe aller wagrechten Kräfte gleich Null ſei. Die beiden einzigen wagrechten Kräfte am Bruchſtück ſind aber die Seitenkräfte H und H_1 von D und R. Daher muſs ſtattfinden:

$$0 = H - H_1, \quad \text{woraus} \quad H = H_1.$$

Da Schnitt *mn* beliebig gewählt war, ſo gilt das Vorſtehende ganz allgemein.

Fig. 376.



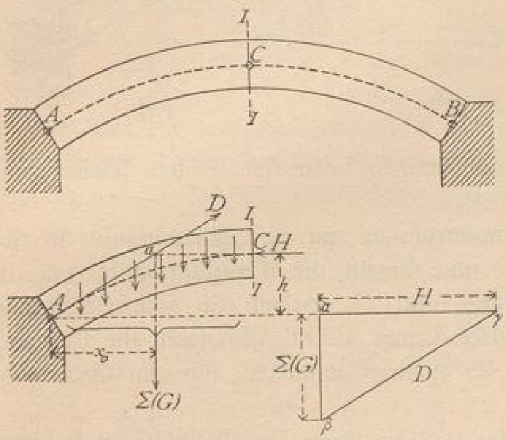
Man nennt dieſe wagrechte Seitenkraft den Horizontalſchub des Bogens, bezw. des Gewölbes. Die

Ermittelung der Gröſse und Lage dieſes Horizontalſchubes iſt bei der Berechnung der Gewölbe die wichtigſte Aufgabe.

Die Gröſse des Horizontalſchubes iſt ſowohl von der Belaſtung, wie auch von der Form und Lage der Mittelkraftslinie, bezw. Seilcurve abhängig. Dieſe Abhängigkeit ſtellt ſich für das ſymmetriſch zur Scheitelfuge geſtaltete und eben ſo belaſtete Gewölbe folgendermaſsen dar.

ACB ſei (Fig. 377) die Seilcurve. Legt man durch denjenigen Punkt derſelben, in welchem die Tangente wagrecht iſt, d. h. durch den Scheitel, einen Schnitt *II* und unterſucht das Gleichgewicht des Gewölbeſtückes an der einen Seite dieſes Schnittes, etwa des Stückes *AC*, ſo muſs, wie eben entwickelt, die Kraft, welche in *II* auf das Bogenſtück übertragen wird, in die Richtung der Tangente fallen, demnach wagrecht ſein. Dieſe Kraft iſt alſo das geſuchte *H*. Da auch *A* ein Punkt der Seilcurve iſt, ſo muſs durch *A* die Mittelkraft aller derjenigen Kräfte gehen, welche rechts von der Kämpferfuge wirken, d. h. die Mittelkraft von $\Sigma(G)$ und H; dieſe Mittelkraft muſs demnach für *A* als Drehpunkt das ſtatiſche Moment Null haben. Da nun das ſtatiſche Moment der Mittelkraft ſtets gleich der algebraiſchen Summe der ſtatiſchen Momente der Einzelkräfte iſt, ſo muſs auch ſtattfinden:

Fig. 377.



$$x_0 \, \Sigma(G) - Hh = 0,$$

woraus folgt

$$H = \frac{x_0 \, \Sigma(G)}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 389.$$

Auch graphiſch ergiebt ſich die Gröſse von *H* leicht.

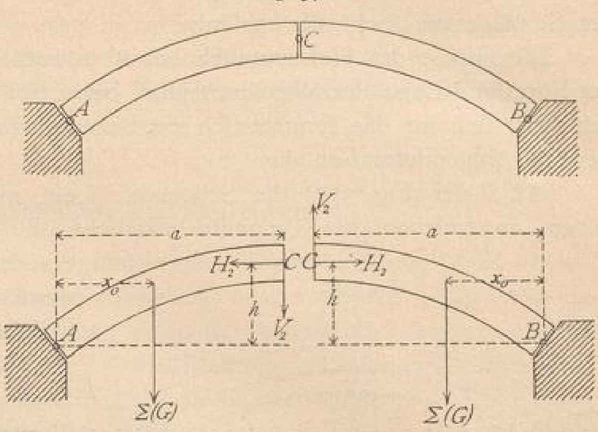
Man ermittele die Mittelkraft $\Sigma(G)$ aller an der einen Seite des durch den Scheitel gelegten Schnittes *II* wirkenden Laſten (Fig. 377); alsdann wirken auf das Gewölbeſtück drei Kräfte: $\Sigma(G)$, H und D. Da dieſelben das Gewölbeſtück im Gleichgewicht halten, ſo ſchneiden ſich ihre Richtungslinien in einem Punkte, d. h. D muſs durch den Punkt a gehen, in welchem ſich die beiden anderen Kräfte, H und $\Sigma(G)$ ſchneiden. Da D auch durch A geht, ſo iſt die Richtung von D durch Linie Aa beſtimmt. Nun halten ſich in a drei Kräfte im Gleichgewicht, deren Richtungen bekannt ſind, von deren einer $[\Sigma(G)]$ auch die Gröſse bekannt iſt. Man trage $\Sigma(G)$ nach beliebigem Maſsſtabe auf $(= \alpha\beta)$ und ziehe durch α und β Parallelen zu bezw. den Richtungen von H und D; alsdann erhält man

$$H = \gamma\alpha \quad \text{und} \quad D = \beta\gamma .$$

Die Ermittelung von *H* für das unſymmetriſche, bezw. das unſymmetriſch belaſtete Gewölbe wird in Art. 273 u. 275 vorgeführt werden.

Wie in Art. 266 (S. 281) gezeigt, giebt die Statik feſter Körper für die Ermittelung der unbekannten äuſseren Kräfte und damit auch der Seilcurve nur drei Gleichungen, während ſechs Unbekannte vorhanden ſind. Man kann aber die Seilcurve dadurch feſt legen, daſs man durch die Conſtruction drei Bedingungen ſchafft, welche durch drei Gleichungen ausgedrückt werden und ſo die fehlenden Gleichungen bieten. Am einfachſten geſchieht dies, indem man drei Punkte vorſchreibt, durch welche die Seilcurve gehen muſs, etwa durch Einlegen von Keilen u. ſ. w. in drei 271. Seilcurve durch drei gegebene Punkte.

Fig. 378.



Fugen (Fig. 378). Wenn alſo drei Punkte vorgeſchrieben ſind, durch welche die Seilcurve verlaufen muſs, ſo iſt der ganze Lauf der Seilcurve und damit auch die Gröſse des Horizontalſchubes gegeben. Auch wenn zwei Punkte der Seilcurve und auſserdem in einem dieſer Punkte die Richtung beſtimmt iſt, welche die Tangente an die Curve haben ſoll, iſt Alles bekannt. Wird die Seilcurve in dieſer Weiſe feſt gelegt, ſo wirken die beiden Theile des Gewölbes auf einander genau eben ſo, wie die beiden Theile eines Sprengwerkdaches (ſiehe Art. 210, S. 211[41]).

Wenn bei einem Gewölbe zwei Kämpferpunkte und ein Scheitelpunkt für den Verlauf der Seilcurve vorgeſchrieben ſind und ſowohl die Kämpferpunkte wie die Laſten ſymmetriſch zur Scheitel-Lothrechten ſind, ſo verläuft die ganze Seilcurve, bezw. Mittelkraftslinie ſymmetriſch zu dieſer Linie, ſo iſt alſo auch die Tangente an die Seilcurve im Scheitel wagrecht. Es genügt demnach, für ein ſolches Gewölbe eine Hälfte zu unterſuchen.

Betrachtet man nämlich zunächſt (Fig. 378) die linke Gewölbehälfte und nimmt dabei allgemein an, daſs die von der rechten Hälfte im Scheitel übertragene Kraft die Seitenkräfte H_2 und V_2 habe, ſo muſs, weil die Mittelkraft von $\Sigma(G)$, H_2 und V_2 durch A verläuft,

$$0 = V_2 a - H_2 h + x_0 \Sigma(G)$$

ſein. Wird die rechte Gewölbehälfte betrachtet, ſo wirken auf dieſelbe im Scheitel H_2 und V_2 in gleicher Gröſse, aber in entgegengeſetztem Sinne, wie auf die linke Hälfte; der Symmetrie wegen iſt die Belaſtung dieſer Hälfte ebenfalls $\Sigma(G)$ im Abſtande x_0 vom Kämpfer B; mithin findet ſtatt:

$$0 = V_2 a + H_2 h - x_0 \Sigma(G).$$

Die Addition beider Gleichungen giebt: $0 = V_2 \,.\, 2a$, woraus

$$V_2 = 0$$

folgt. Demnach iſt die Kraft, welche die beiden Gewölbehälften im Scheitel auf einander übertragen, in der That wagrecht, alſo iſt auch die Tangente an die Mittelkraftslinie im Scheitel wagrecht.

Man findet die Gröſse von $H_2 = H$ leicht, wie Gleichung 389:

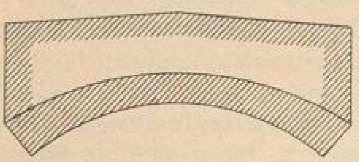
$$H = \frac{x_0 \Sigma(G)}{h}.$$

Wenn für die Seilcurve drei Punkte oder zwei Punkte und eine Richtung vorgeſchrieben ſind, ſo iſt nach Vorſtehendem der Verlauf der Seilcurve beſtimmt; alsdann muſs alſo auch eine graphiſche Conſtruction dieſer Linie möglich ſein. Es iſt

[41]) Neuerdings iſt die Anordnung dreier Gelenke, zweier Gelenke an den Kämpfern und eines Gelenkes im Scheitel, bei den groſsen Brückengewölben vielfach ausgeführt worden, insbeſondere von *Köpcke* und *Leibbrand*. — Man vergl. hierüber: Fortſchritte der Ingenieurwiſſenſchaften. 2. Gruppe, Heft 7: Gewölbte Brücken. Von K. v. Leibbrand. Leipzig 1897.

oft wünſchenswerth, den ganzen Verlauf derſelben zu kennen, und deſshalb ſoll nachſtehend gezeigt werden, wie die Seilcurve, bezw. Gleichgewichtslinie conſtruirt wird. Bei allen ſolchen Unterſuchungen iſt es zweckmäſsig, die Laſten durch Flächen darzuſtellen. Man denkt ſich zu dieſem Zwecke die gegebenen Nutzlaſten durch Mauerkörper von demſelben Einheitsgewichte erſetzt, wie dasjenige des Gewölbes iſt. Wenn die Abmeſſung ſenkrecht zur Bildfläche gleich der Einheit (= 1 m) iſt, ſo bedeutet demnach 1 qm in der Anſicht 1 cbm Mauerwerk, alſo ein entſprechendes Gewicht. Dieſe in Mauerwerk verwandelte Nutzlaſt kommt zum Eigengewichte des Gewölbes hinzu, ſo daſs man als Darſtellung der Belaſtung etwa die in Fig. 379 ſchraffirte Fläche erhält.

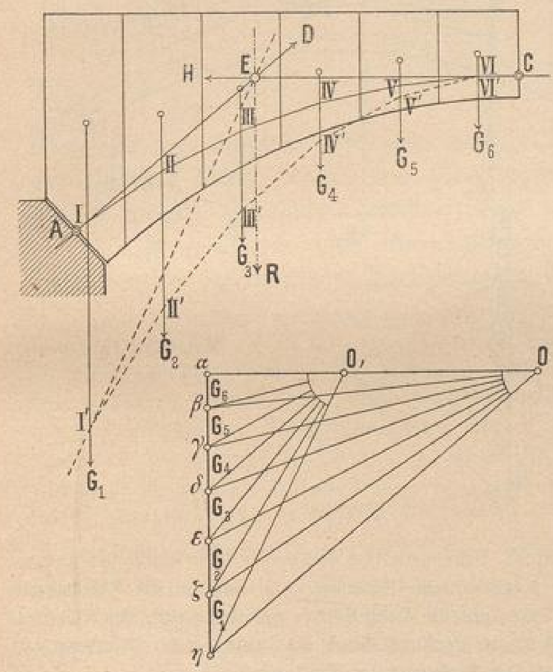
Fig. 379.



272. Seilcurve für ſymmetriſch zur Scheitel-Lothrechten angeordneten und belaſteten Bogen.

Bei dem zur Scheitel-Lothrechten ſymmetriſch geſtalteten und ſymmetriſch belaſteten Bogen, bezw. Gewölbe iſt nach Art. 271 die Seilcurve ſymmetriſch geſtaltet; mithin iſt es ausreichend, eine Hälfte derſelben zu conſtruiren. Dieſe Conſtruction iſt in Fig. 380 vorgeführt. Die Belaſtungsfläche ſei dargeſtellt, und es ſei vorgeſchrieben, daſs die Mittelkraftslinie durch C und A gehe, auſserdem in C wagrecht ſei.

Fig. 380.



Man zerlege die Belaſtungsfläche in eine Anzahl lothrechter Lamellen, deren Gewichte G_6, G_5, $G_4 \ldots G_1$ durch Multiplication der Flächengröſsen der einzelnen Lamellen mit der (ſenkrecht zur Bildfläche gedachten) Einheit und dem Einheitsgewichte der Belaſtung ermittelt werden. Dieſe Gewichte haben ihre Angriffspunkte in den Schwerpunkten der einzelnen Lamellen. Die Gewichte G_6, G_5, $G_4 \ldots G_1$ werden nun zu einem Kraftpolygon $\alpha \beta \gamma \ldots \eta$ an einander getragen, und ihre Mittelkraft wird nach Gröſse und Lage geſucht. Die Gröſse derſelben iſt $\overline{\alpha \eta}$. Um die Lage derſelben zu erhalten, conſtruire man mit einem beliebigen Pol O_1 ein Seilpolygon; die Mittelkraft geht dann durch den Schnittpunkt der äuſserſten Seilpolygonſeiten, d. h. derjenigen, welche vor G_6 vorhergeht und derjenigen, welche auf G_1 folgt. Es empfiehlt ſich, den Pol auf der durch α gehenden Wagrechten zu wählen (hier iſt O_1 als Pol genommen) und die erſte Seilpolygonſeite durch C zu legen. Das Seilpolygon in Fig. 380 für Pol O_1 iſt $C, VI', V', IV', III', II', I'$; die Mittelkraft $\sum_1^6 (G)$ muſs durch den Punkt E gehen und lothrecht ſein. Nachdem nunmehr die auf die Hälfte des Gewölbes wirkenden Einzellaſten durch ihre Mittelkraft R erſetzt ſind, wirken auf dieſen Gewölbtheil nur noch drei Kräfte: R, die Kraft im Scheitel C und der Kämpferdruck D im Punkte A. Des Gleichgewichtes wegen müſſen ſie ſich in einem Punkte ſchneiden; die Scheitelkraft geht durch C und iſt bei der vorgeſehenen Belaſtung und Conſtruction wagrecht, ſchneidet ſich alſo mit R im Punkte E; durch dieſen Punkt muſs alſo auch die Kämpferkraft gehen; da dieſe aber auch durch A geht, ſo iſt ihre Richtung durch die Punkte A und E beſtimmt. R zerlegt ſich alſo im Punkte E in die beiden Kräfte H und D. Die Gröſsen von H und D werden erhalten, indem man durch α die Parallele zu H, durch η die Parallele zu AE zieht; dann wird $\overline{\eta O} = D$ und $\overline{O \alpha} = H$.

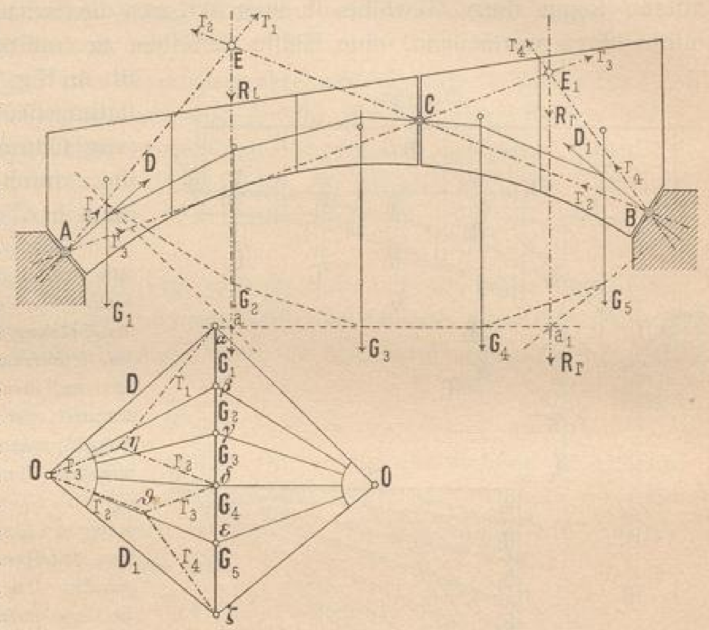
Man erhält nun die Mittelkraftslinie, indem man die in C angreifende Kraft H zunächſt im Schnittpunkte VI mit G_6 zu einer Reſultirenden zuſammenſetzt; Gröſse und Richtung derſelben ſind durch $O\beta$ im Kraftpolygon gegeben; die durch VI parallel zu $O\beta$ gezogene Linie giebt ihre Lage. Wo die Mittelkraft ſich mit G_5 ſchneidet, d. h. in Punkt V, ſetzt man ſie mit dieſer Kraft zuſammen. Gröſse und Richtung dieſer neuen Mittelkraft giebt $\overline{O\gamma}$ im Kraftpolygon; die Lage wird erhalten, indem man durch V die Parallele zu $\overline{O\gamma}$ zieht. Indem man ſo weiter conſtruirt, erhält man im Kraftpolygon Gröſse und Richtung aller Mittelkräfte, im Seilpolygon $C, VI, V, IV, III, II, I, A$ die Mittelkraftslinie. Als Controle dient, daſs die Mittelkraftslinie durch A geht.

273. Mittelkraftslinie für unſymmetriſche Bogen.

Bei einem beliebig geſtalteten Bogen mit beliebiger Belaſtung (Fig. 381) ergiebt ſich die durch drei vorgeſchriebene Punkte A, C, B verlaufende Mittelkraftslinie, wie folgt.

Man kann die Conſtruction als aus zwei ungleichen Hälften beſtehend auffaſſen, welche einander im Scheitelpunkte C ſtützen. Der Kämpferdruck in A beſteht aus zwei Theilen: demjenigen, welcher durch die Belaſtung nur der linken Hälfte erzeugt wird, und demjenigen, welcher durch die Belaſtung nur der rechten Hälfte hervorgerufen wird. Eben ſo verhält es ſich mit dem Kämpferdruck in B. Nimmt man zunächſt nur die linke Hälfte belaſtet, alſo die rechte Hälfte gewichtslos an, ſo hat wie beim Dreigelenkdach (ſiehe Art. 210, S. 211) der Kämpferdruck von B die Richtung BC. Eine gleich groſse und gleich gerichtete Kraft wird von der rechts liegenden Hälfte in C auf die linke Hälfte übertragen; auf dieſe Hälfte wirken auſserdem noch die Reſultirende der Laſten G_1, G_2, G_3 und der Kämpferdruck von A. Die Gröſse und Lage der Reſultirenden von G_1, G_2 und G_3 findet man leicht durch Auftragen der Laſten zu einem Kraftpolygon und Verzeichnen eines Seilpolygons für einen beliebigen Pol. Der Schnittpunkt a der vor G_1 vorhergehenden und der auf G_3 folgenden Seilpolygonſeite giebt einen Punkt der Reſultirenden R_l. Da letztere lothrecht iſt, ziehe man eine lothrechte Linie durch a; alsdann iſt dieſe die Reſultirende R_l. Die in C wirkende Kraft mit der Richtung BC ſchneidet die Reſultirende in Punkt E; durch dieſen Punkt muſs auch die dritte auf die linke Hälfte wirkende Kraft, der Kämpferdruck von A gehen. Man ziehe $\overline{AE}$; alsdann wird R_l im Punkt E durch die beiden dieſer Belaſtung entſprechenden Kämpferdrücke r_1 und r_2 aufgehoben. Die Zerlegung im Kraftpolygon ergiebt $r_1 = \overline{\eta\alpha}$ und $r_2 = \overline{\delta\eta}$.

Fig. 381.



In gleicher Weiſe beſtimmt man weiter die Kämpferdrücke r_3 und r_4, welche in A, bezw. B durch die Belaſtung nur der rechten Hälfte erzeugt werden. Da für dieſe Belaſtungsweiſe die linke Hälfte gewichtslos iſt, ſo fällt r_3 in die Linie $\overline{AC}$; R_r geht durch a_1; r_3 ſchneidet ſich mit R_r in E_1, und durch E_1 muſs auch die dritte auf die rechte Hälfte wirkende Kraft, der Kämpferdruck r_4 von B gehen. Es iſt $\overline{\delta\zeta} = R_r$, und die Zerlegung von R_r ergiebt $\overline{\zeta\vartheta} = r_4$ und $\overline{\vartheta\delta} = r_3$. In Wirklichkeit ſind beide Hälften belaſtet; demnach wirken im linken Kämpferpunkt A ſowohl r_1 wie r_3, im rechten Kämpferpunkt B ſowohl r_2 wie r_4. Die Zuſammenſetzung von r_3 und r_1 giebt als Kämpferdruck bei A die Kraft $A_1 = \overline{O\alpha}$, diejenige von r_2 und r_4 als Kämpferdruck bei B die Kraft $B_1 = \overline{\zeta O}$. Um eine einfache Figur zu erhalten, iſt an η: $\overline{O\eta} = r_3$ und an ϑ: $\overline{\vartheta O} = r_2$ gelegt und ſo das Parallelogramm $O\eta\delta\vartheta$ gezeichnet. Die Mittelkraftslinie ergiebt ſich nun leicht, indem man der Reihe nach A_1 mit G_1, G_2 . . . eben ſo zuſammenſetzt, wie für das ſymmetriſche Gewölbe in Art. 272 (S. 287) gezeigt worden iſt. Die Mittelkraftslinie iſt das Seilpolygon für den Pol O. Als Controle diene, daſs die Mittelkraftslinie durch C und B verlaufen muſs.

Beim Verzeichnen der Mittelkraftslinie handelt es ſich meiſtens darum, aus dieſer Linie die Stützlinie zu conſtruiren, d. h. die Punkte zu finden, in denen die einzelnen Gewölbequerſchnitte von den auf ſie wirkenden Mittelkräften geſchnitten werden (ſiehe Art. 268, S. 283). Da aber die Gewölbequerſchnitte nicht, wie in Fig. 380 u. 381 angenommen war, lothrecht ſind, ſondern radial verlaufen, ſo iſt eine Verbeſſerung nöthig. Man kann zunächſt auf die wirkliche Querſchnittslage dadurch leicht Rückſicht nehmen, daſs man die Lamellengrenzen entſprechend der 274. Verbeſſerungen.

Fig. 382.

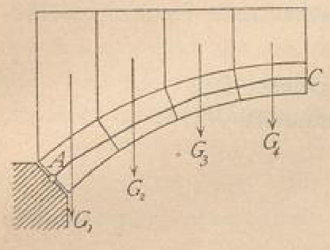


Fig. 383.

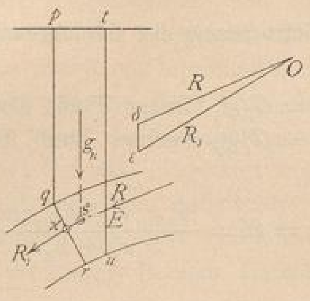
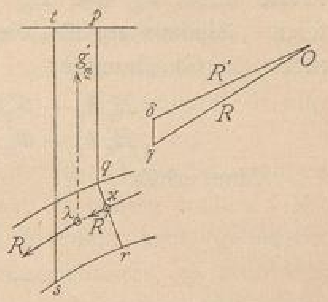


Fig. 384.



Lage der Querſchnitte wählt (Fig. 382). Das Verfahren zur Ermittelung der Gleichgewichtslinie bleibt genau, wie oben gezeigt; nur iſt die Ermittelung der Schwerpunkte für die einzelnen Lamellen etwas umſtändlicher als dort.

Es können aber auch die Conſtructionen in Fig. 380 u. 381 benutzt werden, wenn nur die nachſtehend beſchriebenen Verbeſſerungen vorgenommen werden.

Die der richtigen Querſchnittslage entſprechende Lamellengrenze ſei pqr (Fig. 383); bei der lothrechten Theilung ſei tu als Grenze angenommen und dabei ſei die Kraft R, welche tu in E ſchneidet, als Mittelkraft aller rechts von tu wirkenden äuſseren Kräfte gefunden. Um nun den Punkt der Stützlinie zu finden, welcher in qr liegt, braucht man nur die Mittelkraft aller rechts von qr wirkenden Kräfte aufzuſuchen und ihren Schnittpunkt mit qr zu ermitteln. Dieſe geſuchte Kraft iſt offenbar die Mittelkraft von R und dem Gewichte g_n des Gewölbetheiles $pqrut$. Es ſei $R = O\delta$ und $g_n = \delta\varepsilon$; alsdann iſt die geſuchte Mittelkraft $R_1 = O\varepsilon$, geht durch ρ und iſt parallel zu $O\varepsilon$. Dieſe Kraft R_1 iſt in Fig. 383 gezeichnet; ſie ſchneidet die Fuge qr in $\varkappa$; ſonach iſt $\varkappa$ ein Punkt der richtigen Stützlinie.

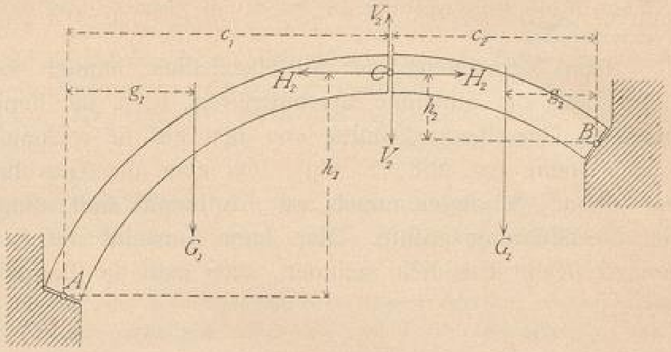
Ganz ähnlich iſt zu verfahren, wenn die lothrechte Lamellengrenze an der anderen Seite der wirklichen Fuge liegt (Fig. 384).

Die Mittelkraft aller an der einen Seite von ts wirkenden Kräfte, R, enthält das Gewicht des Stückes $tsrqp$ bereits; um alſo die Mittelkraft R', welche auf die Fuge qr wirkt, zu erhalten, muſs man R mit dem negativ genommenen, alſo nach oben gerichteten Gewichte g_n' zuſammenſetzen. Es ſei $R = O\gamma$ und $g_n' = \gamma\delta$; alsdann wird $R' = O\delta$, geht durch den Punkt λ, in welchem ſich R und g_n' ſchneiden, und iſt parallel zu $O\delta$. Der richtige Punkt der Stützlinie iſt $\varkappa$.

In Art. 270 (S. 285) iſt gezeigt worden, wie der Horizontalſchub in einem ſymmetriſch zur Scheitelfuge geformten und belaſteten Gewölbe durch Rechnung gefunden werden kann. Auch beim unſymmetriſchen Gewölbe macht, wenn drei Punkte für den Verlauf der Mittelkraftslinie vorgeſchrieben ſind, die Berechnung des Horizontalſchubes keine Schwierigkeit. Das Verfahren entſpricht genau demjenigen, welches für die Ermittelung der Auflagerdrücke beim Sprengwerksdach mit drei Gelenken in Art. 210 (S. 211) vorgeführt worden iſt. 275. Horizontalſchub im unſymmetriſchen Gewölbe.

Die Mittelkräfte der Laften auf dem linken, bezw. rechten Gewölbetheile feien G_1, bezw. G_2; die Entfernungen diefer Laften von den Kämpferpunkten feien bezw. g_1 und g_2 (Fig. 385). Die beiden Theile übertragen im Punkte C auf einander eine Kraft, deren Seitenkräfte bezw. V_2 und H_2 feien. Alsdann ergiebt die Betrachtung der Gleichgewichtszuftände beider Gewölbetheile die Gleichungen:

Fig. 385.



$$H_2 h_1 + V_2 c_1 = G_1 g_1 \text{ (linker Theil, Drehpunkt } A\text{);}$$
$$H_2 h_2 - V_2 c_2 = G_2 g_2 \text{ (rechter Theil, Drehpunkt } B\text{).}$$

Man erhält

$$H_2 = H = \frac{G_1 g_1 c_2 + G_2 g_2 c_1}{h_1 c_2 + h_2 c_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 390.$$

2. Kapitel.

Tonnen- und Kappengewölbe.

276. Stabilität. Die Zerftörung des Gewölbes kann erfolgen:

1) durch Umkanten eines Gewölbetheiles um eine innere oder äufsere Kante,
2) durch Gleiten einzelner Gewölbetheile längs der Fugen und
3) durch Zerdrücken der Wölbfteine.

Wenn die Lage der Stützlinie bekannt ift, fo können alle auf die Standficherheit des Gewölbes bezügliche Fragen leicht beantwortet werden. Dabei ift zu beachten, dafs, falls für den Verlauf der Mittelkraftslinie drei Punkte vorgefchrieben find, welche in Fugen liegen, diefelben entfprechend der für die Stützlinie gegebenen Erklärung auch Punkte der Stützlinie find.

Im Hochbau handelt es fich faft ftets nur um die Ermittelung des im Gewölbe wirkenden Horizontalfchubes, weil diefe Kraft hauptfächlich die Mauern, welche das Gewölbe, bezw. den Bogen ftützen, gefährdet. Wäre die Stützlinie bekannt, fo wäre auch der Horizontalfchub bekannt. Die Ermittelung der genauen Lage derfelben ift aber nach Art. 266 (S. 281) nur mittels der Elafticitäts-Theorie der Gewölbe möglich, und diefe Ermittelung ift fehr umftändlich. Es ift aber auch ausreichend, gewiffe Grenzlagen für die Stützlinie und damit gewiffe Grenzwerthe für den Horizontalfchub feft zu legen.

277. Stabilität gegen Kanten. Soll das Gewölbe ftabil fein, fo mufs die Stützlinie ganz im Gewölbe liegen.

Wenn die Refultirende R aller an der einen Seite des Querfchnittes NO wirkenden Kräfte (Fig. 386) die Verlängerung des Querfchnittes etwa im Punkte b fchneidet, fo hat diefe Kraft in Bezug auf O ein Moment $M = Re$, welches eine