



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

a) Allgemeines

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77733](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77733)

5. Abschnitt.
Gewölbe.

Die Gewölbe sind aus einzelnen Theilen mit Hilfe von Verbindungsmaterialien zusammengesetzte Bau-Constructions, welche bei lothrechten Belastungen schiefe Drücke auf die stützenden Constructionstheile ausüben. Indem wir die verschiedenen Gewölbearten³⁹⁾ hier als bekannt voraussetzen, bemerken wir, daß wir uns im vorliegenden Abschnitt hauptsächlich mit den Tonnen-, bezw. Kappengewölben, den Kreuzgewölben und den Kuppelgewölben beschäftigen werden, auf welche alle anderen Gewölbearten leicht zurückgeführt werden können.

265.
Allgemeines.

Der allgemeinen Untersuchung soll das Tonnen-, bezw. Kappengewölbe zu Grunde gelegt werden; dabei wird stets, falls nichts Anderes bemerkt wird, ein Gewölbestück betrachtet werden, dessen Abmessung senkrecht zur Bildfläche gleich der Einheit, also gleich 1^m ist. Alsdann fällt die Kräfteebene mit der mittleren lothrechten Ebene zusammen. Das Tonnen-, bezw. Kappengewölbe wirkt wie ein krummer Balken, welcher den Gesetzen der Elasticitätslehre unterworfen ist.

1. Kapitel.
Stützlinie und Mittelkraftlinie.

a) Allgemeines.

Für die Ermittlung der im Gewölbe auftretenden inneren Kräfte ist zunächst — genau wie bei den früher behandelten Bau-Constructions — die Kenntniß der äußeren auf das Gewölbe wirkenden Kräfte nöthig, also der Belastungen und der Auflagerkräfte. Die Belastungen sind in den meisten Fällen gegeben, bezw. aus den Tabellen in Art. 21 bis 27 leicht zu bestimmen. Schwieriger ist die Ermittlung der Auflagerkräfte oder, wie sie hier heißen, der Kämpferdrücke. Bei den bisherigen Constructions genügen zu ihrer Bestimmung die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen; hier ist dies nicht der Fall. Wird ein beliebiges Gewölbe (Fig. 372) betrachtet, so wird bei jedem Auflager — hier Kämpfer genannt — auf das Gewölbe eine Anzahl von Kräften übertragen, deren Mittelkraft eben der gefuchte Kämpferdruck ist; von jedem dieser Kämpferdrücke ist aber weder Größe, noch

266.
Kämpfer-
drücke.

³⁹⁾ Siehe hierüber Theil III, Band 2, Heft 3 (Abth. III, Abschn. 2, B, Kap. 8) dieses »Handbuchs«.

Richtung, noch Angriffspunkt (*A*, bzw. *B*) bekannt. Wir haben demnach in den Kämpferdrücken 6 Unbekannte: *D*, *D*₁, *α*, *α*₁, *c*, *c*₁ (wenn *c* und *c*₁ die Abstände der Punkte *A* und *B* von den inneren Laibungspunkten der Widerlager bezeichnen). Da die Statik vermittels der Gleichgewichtsbedingungen fester Körper nur 3 Gleichungen zur Verfügung stellt, so ist die Ermittlung der Kämpferdrücke auf rein statischem Wege nicht möglich. Die Aufgabe wird gelöst, indem man das Gewölbe als elastischen Bogen auffaßt und annimmt, daß bei den durch die Belastungen erfolgenden Formänderungen die Widerlager und die anschließenden Bogenenden genau unveränderte Lage behalten. Diese mit der Wirklichkeit nahezu übereinstimmende Annahme giebt weitere 3 Gleichungen, so daß jetzt für die 6 Unbekannten 6 Gleichungen vorhanden sind.

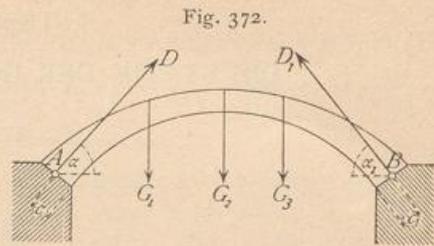


Fig. 372.

Für die einfachen Fälle des Hochbaues, bei denen fast stets eine ruhende Belastung in Frage kommt, brauchen die Elastizitätsgleichungen nicht aufgestellt zu werden. Vorläufig werde angenommen, daß die Kämpferdrücke nach Größe, Richtung und Lage auf irgend welche Art gefunden und bekannt seien.

267.
Stützlinie.

Ist letzteres der Fall, so sind alle äußeren, auf das Gewölbe wirkenden Kräfte bekannt; demnach können die sämtlichen äußeren Kräfte, welche an der einen Seite eines beliebigen, senkrecht zur Bildebene genommenen Querschnittes *II* des Gewölbes (Fig. 373) wirken, zu einer Mittelkraft vereinigt werden.

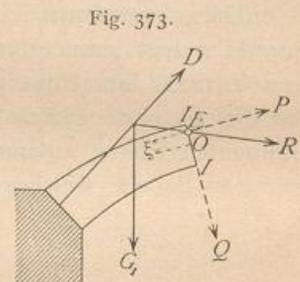


Fig. 373.

Betrachtet man etwa denjenigen Gewölbeheil, welcher links vom Querschnitte *II*, also zwischen dem linken Widerlager und dem Querschnitte *II* liegt, so sei *R* diese Mittelkraft. Damit Gleichgewicht vorhanden sei, muß im Querschnitt *II* eine Anzahl innerer Kräfte wirken, deren Mittelkraft gleiche Größe, gleiche Richtung, gleichen Angriffspunkt und entgegengesetzten Sinn hat, wie die Kraft *R*. Mit der Kraft *R* kennt man also auch die Resultierende der hier thätigen inneren Kräfte. Zerlegt man *R* in eine Seitenkraft *P*, welche parallel ist zu der an die Bogenaxe im betrachteten Querschnitte gezogenen Tangente, und in eine zu ersterer senkrechte Seitenkraft *Q*, so heißt die erstere die Axialkraft, die zweite die Transversalkraft oder Querkraft. Die Querkraft ist für die hier zu betrachtenden Fälle von geringer Wichtigkeit; von wesentlicher Bedeutung dagegen ist Größe und Lage von *P*. Die durch die Axialkraft in den einzelnen Punkten des Querschnittes *II* erzeugten Druck, bzw. Zugspannungen können ohne merklichen Fehler nach den in Art. 126 (S. 111) für Stützen berechneten Gleichungen bestimmt werden. Man erhält demnach die Spannung σ in einem um *s* von der Mittellinie entfernten Punkte nach Gleichung 102

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Ms}{\mathcal{J}} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{F\xi s}{\mathcal{J}} \right) \dots \dots \dots 388.$$

M ist das Moment der äußeren Kräfte für den Punkt *O*, d. h. für denjenigen Punkt, in welchem die Mittellinie des Gewölbes den Querschnitt *II* schneidet; hier also ist $M = P\xi$, da *Q* in Bezug auf *O* kein Moment hat. Die positiven Werthe für σ sind hier Druckbeanspruchungen; die negativen Werthe bedeuten Zug.

Von hervorragender Bedeutung für den Werth von σ ist die Gröfse von ξ oder, was dasselbe ist, die Lage des Punktes E , des Schnittpunktes der Mittelkraft R mit dem von ihr beanspruchten Querschnitte. Man hat deshalb für die Punkte E eine besondere Bezeichnung eingeführt: die Stützlinie. Die Stützlinie ist die Gesamtheit aller derjenigen Punkte, in denen die Gewölbequerchnitte von den auf sie wirkenden Mittelkräften geschnitten werden.

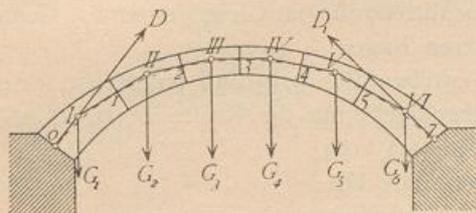
Den verschiedenen Belastungsarten entsprechen verschiedene Mittelkräfte für die einzelnen Querschnitte; daraus folgt, daß bei demselben Gewölbe jeder Belastungsart auch eine besondere Stützlinie entspricht.

Zerlegt man das Gewölbe in eine Anzahl von Theilen (Fig. 374), ermittelt die Kämpferdrücke (D und D_1), so wie die Belastungen der einzelnen Theile ($G_1, G_2, G_3 \dots G_6$) und setzt zunächst D mit der ersten Last G_1 zu einer Mittelkraft zusammen, diese letztere mit G_2 und fährt so bis zum rechten Kämpfer fort, so erhält

man ein Vieleck $o I II III IV V VI 7$, welches man die Mittelkraftslinie oder das Resultanten-Polygon nennt. Aus der Mittelkraftslinie ergeben sich sofort einzelne Punkte der Stützlinie, nämlich die Schnittpunkte der einzelnen Mittelkräfte mit den bezüglichen Querschnitten, hier die Punkte $o, 1, 2, 3, 4, 5$ und 7 . Je kleiner die einzelnen

268.
Mittelkraftslinie
oder
Resultanten-
Polygon.

Fig. 374.



den, desto mehr nähert sich die Mittelkraftslinie einer stetig verlaufenden Curve, der sog. Seilcurve.

Die Ermittlung der Form und Lage der Stützlinie auf statischem Wege setzt nach Obigem die Kenntniß der Kämpferdrücke oder wenigstens dreier von den sechs Unbekannten voraus, welche die Kämpferdrücke nach Gröfse, Richtung und Lage bestimmen; denn alsdann sind nur noch drei Unbekannte vorhanden, welche mit Hilfe der Statik ermittelt werden können. Mit Hilfe der Elasticitätstheorie der Gewölbe hat *Winkler* folgenden wichtigen Satz gefunden, den wir hier nur angeben wollen, wegen des Beweises auf unten stehende Quellen⁴⁰⁾ verweisend.

Bei constantem Querschnitt ist unter allen statisch möglichen Stützlinien nahezu diejenige die richtige, welche sich der Bogenaxe durchschnittlich am meisten nähert, wenn man das Wort »durchschnittlich« im Sinne der Methode der kleinsten Quadratsummen deutet. Somit ist diejenige Stützlinie nahezu die richtige, für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen von der Bogenaxe ein Minimum ist. Läßt sich demnach eine Stützlinie construiren, welche mit der Mittellinie des Gewölbes zusammenfällt, so wird diese die richtige sein.

Construirt man also die Mittellinie des Bogens derart, daß sie für die gegebene Belastung mit der unter gewissen Annahmen construirt (demnach möglichen) Stützlinie übereinstimmt, so ist diese Mittellinie die richtige Stützlinie — natürlich nur für die angenommene Belastung. Da es sich aber im Hochbau meistens um constante Belastungen handelt, so ist diese Ermittlung in der Regel genügend.

269.
Ergebnisse
der
Elasticitäts-
theorie.

⁴⁰⁾ WINKLER, F. Beitrag zur Theorie der Bogenträger. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover. 1879, S. 199. Lage der Stützlinie im Gewölbe. Deutsche Bauz. 1879, S. 117 u. 127.

Wir werden weiter unten sehen, daß es in vielen Fällen, in denen die Aufsuchung der genauen Stützlinie schwierig ist, genügt, gewisse Grenzlagen der Stützlinie zu ermitteln; da aber die Stützlinie leicht aus dem Resultanten-Polygon construirt werden kann, so wird für alle diese Fälle zunächst das Resultanten-Polygon oder die Mittelkraftslinie aufgesucht.

b) Mittelkraftslinie und Seilcurve.

270.
Horizontal Schub
im Gewölbe.

Jede Verbindungslinie zweier Eckpunkte der Mittelkraftslinie (*I II*, *II III*, *III IV* . . . in Fig. 374) giebt nach der Erklärung in Art. 268 (S. 283) Lage und Richtung der Mittelkraft aller an der einen Seite der betreffenden Fuge wirkenden äußeren Kräfte. Es giebt also z. B. *III IV* die Richtung und Lage der Mittelkraft aller rechts von der Fuge 3 wirkenden Kräfte, d. h. der Kräfte D_1 , G_4 , G_5 , G_6 ; da sämtliche äußere Kräfte einander im Gleichgewichte halten, so fällt die Mittelkraft aller links von der Fuge 3 wirkenden Kräfte gleichfalls in die Linie *III IV*; in derselben halten sich demnach die beiden Mittelkräfte im Gleichgewichte. Genau eben so verhält es sich auch mit jeder anderen Fuge.

Betrachtet man nun einen Theil des Gewölbes (Fig. 375) und untersucht seinen Gleichgewichtszustand, so wirken auf denselben nicht nur die Kräfte D , G_1 , G_2 , G_3 , sondern auch die Kräfte, welche in der Fuge 33 vom anderen Theile des Gewölbes übertragen werden. Die Mittelkraft der letzteren ist aber nach dem Vorstehenden gleich der Mittelkraft aller auf den anderen Theil wirkenden äußeren Kräfte, d. h. hier von D_1 , G_4 , G_5 , G_6 . Diese fällt in die Linie *III IV* (Fig. 374). Wenn also die Mittelkraftslinie bekannt ist, so sind stets auch Lage, Richtung und (wie weiter unten nachgewiesen wird, auch) Größe derjenigen Kraft bekannt, bzw. leicht zu finden, welche in der betreffenden Fuge auf das Gewölbe-Bruchstück übertragen wird. Alles Vorstehende gilt selbstverständlich auch, wenn die einzelnen Gewölbe theile unendlich schmal werden und die Mittelkraftslinie zur Seilcurve wird; dann fällt die Mittelkraft an jeder Stelle in die Richtung der Tangente an die Curve.

Die Kämpferdrücke D und D_1 haben lothrechte und wagrechte Seitenkräfte; in dieser Beziehung kann man die Gewölbe als Sprengwerksträger ansehen. Diese wagrechten Seitenkräfte, welche auf das Gewölbe nach innen, auf die stützenden Seitenmauern nach außen, also schiebend wirken, gefährden das Bauwerk. Wenn die Belastungen nur lothrecht wirken, so haben diese wagrechten Seitenkräfte im ganzen Bogen bei derselben Belastung gleiche Größe. Denn das Gleichgewicht eines beliebigen Bruchstückes (Fig. 376) verlangt, daß die algebraische Summe aller wagrechten Kräfte gleich Null sei. Die beiden einzigen wagrechten Kräfte am Bruchstück sind aber die Seitenkräfte H und H_1 von D und R . Daher muß stattfinden:

$$0 = H - H_1, \text{ woraus } H = H_1.$$

Da Schnitt mn beliebig gewählt war, so gilt das Vorstehende ganz allgemein.

Man nennt diese wagrechte Seitenkraft den Horizontal Schub des Bogens, bzw. des Gewölbes. Die

Fig. 375.

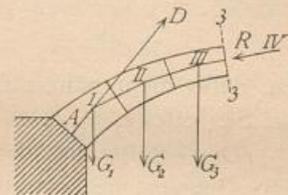


Fig. 376.

