Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

3. Kap. Kreuz- und Kuppelgewölbe

urn:nbn:de:hbz:466:1-77733

Kraft R' den Querfchnitt links von der Aufsenkante der Mauer fchneidet, dafs alfo Kanten eintreten mufs.

Die lothrechte Seitenkraft der Mittelkraft R' ift offenbar $P = G_1 + G$. Nachdem in E der Schnittpunkt der Mittelkraft mit der Fuge gefunden ift, kann man die gröfste in der Fuge durch diefe Belaftung erzeugte Druckfpannung ermitteln, wie in Art. 127 bis 130 (S. 112 bis 117) für verfchiedene Querfchnittsformen gezeigt ift. Wenn der Querfchnitt ein Rechteck von der Länge b (fenkrecht zur Bildfläche gemeffen) ift und die Kraftebene denfelben in der Hauptaxe fchneidet, fo ift für $x < \frac{d}{3}$

$$\sigma_{max} = \frac{2P}{3xb}.$$

x und b find in Centimetern, P in Kilogramm einzufetzen; alsdann erhält man σ_{max} in Kilogramm für das Quadr.-Centimeter. In ganz derfelben Weife kann man die Unterfuchung für eine Anzahl von Fugen führen.

2) Pfeiler. Die Stabilitätsunterfuchung eines zwifchen zwei Gewölben befindlichen Mittelpfeilers wird entfprechend vorgenommen.

Die Punkte E können auch leicht graphifch ermittelt werden, indem man R mit G_1 zu R' zufammenfetzt und in gleicher Weife weiter für die verfchiedenen Fugen verfährt.

---

3. Kapitel.

Kreuz- und Kuppelgewölbe.

a) Kreuzgewölbe.

284. Lagerfugen.

Die Einwölbung erfolgt beim Kreuzgewölbe bekanntlich entweder fo, dafs die Lagerfugen parallel zu den Längsaxen der einzelnen Kappen laufen, aus denen das Kreuzgewölbe befteht, oder fo, dafs fie im Grundrifs fenkrecht oder nahezu fenkrecht zu den Graten verlaufen. Das ftatifche Verhalten ift bei den beiden Anordnungen verfchieden.

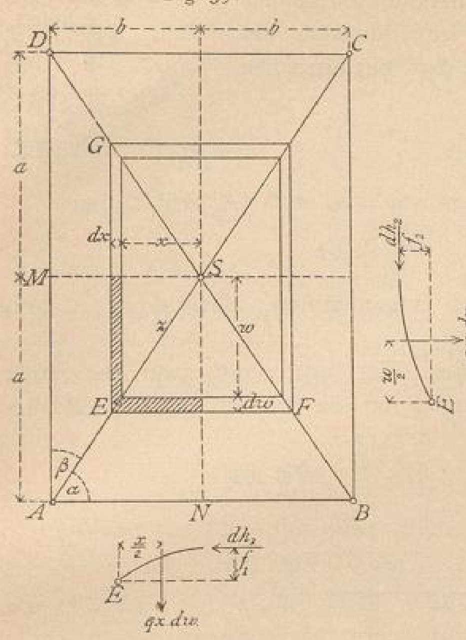
285. Lagerfugen parallel zur Axe der Kappen.

1) Die Lagerfugen laufen zu den Längsaxen der Kappen parallel. Bei den hier vorzunehmenden Berechnungen foll die vereinfachende, genügend genaue Annahme einer über die Grundfläche gleichmäfsig vertheilten Belaftung q auf die Flächeneinheit gemacht werden. Für die Ermittelung der Seilcurve und damit auch des Horizontalfchubes werden ftets drei Punkte angenommen werden.

Der nachfolgenden Unterfuchung foll ein Kreuzgewölbe über rechteckigem Raume zu Grunde gelegt werden; die Anwendung für ein folches mit quadratifchem Grundriffe ift dann leicht.

Zerlegt man jede Kappe durch fenkrecht zur Längsaxe gelegte, lothrechte Ebenen in einzelne Streifen, welche im Grundrifs Paralleltrapeze bilden (Fig. 396), und betrachtet man zwei folche Streifen GE und EF, die fich im Punkte E des Grates treffen, fo ergeben fich die auf diefe Streifen in ihren Scheiteln übertragenen Horizontalfchübe folgendermafsen. Bezeichnet man die Pfeilhöhen der Seilcurven in den Streifen bezw. mit f_1 und f_2, die Horizontalfchübe mit bezw. dh_1 und dh_2, fo erhält man nach Fig. 396

Fig. 396.



$$d\,h_1 = \frac{q\,x^2\,d\,w}{2\,f_1} \quad \text{und} \quad d\,h_2 = \frac{q\,w^2\,d\,x}{2\,f_2} \qquad 397.$$

Der Punkt E ist der gemeinsame Kämpferpunkt für die beiden Bogen GE und EF; die in diesem Punkte auf den Gratbogen von den beiden Bogen übertragenen Kräfte haben je eine wagrechte Seitenkraft, welche $d\,h_1$, bezw. $d\,h_2$ ist, und eine lothrechte Seitenkraft, deren Grössen

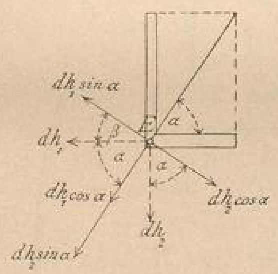
$$d\,v_1 = q\,x\,d\,w \quad \text{und} \quad d\,v_2 = q\,w\,d\,x$$

sind. Die lothrechten Seitenkräfte addiren sich einfach in E zu einer abwärts wirkenden Kraft:

$$\mathfrak{v} = q\,(x\,d\,w + w\,d\,x).$$

$\mathfrak{v}$ ist also gleich dem halben Gewichte der anschliessenden Streifen (gleich dem Gewichte der in Fig. 396 schraffirten Fläche). Die beiden wagrechten Kräfte zerlegen sich (Fig. 397) in je eine Seitenkraft, welche in die Richtung der Diagonalen $A\,C$ fällt, und in eine Seitenkraft senkrecht zur ersteren. Soll die Mittelkraft von $d\,h_1$ und $d\,h_2$ in die lothrechte, durch die Diagonale gelegte Ebene fallen, so müssen sich die zuletzt genannten Seitenkräfte $d\,h_1 \sin\alpha$ und $d\,h_2 \cos\alpha$ aufheben; somit muss

Fig. 397.



$$d\,h_1 \sin\alpha = d\,h_2 \cos\alpha$$

sein, daraus

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{d\,h_2}{d\,h_1} = \frac{w^2\,d\,x\,.\,f_1}{x^2\,d\,w\,.\,f_2}.$$

Nun ist

$$w = x \operatorname{tg}\alpha \quad \text{und} \quad d\,w = \operatorname{tg}\alpha\,d\,x,$$

daher

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x^2 \operatorname{tg}^2\alpha\,.\,d\,x\,.\,f_1}{x^2 \operatorname{tg}\alpha\,.\,d\,x\,.\,f_2} = \operatorname{tg}\alpha\,\frac{f_1}{f_2}.$$

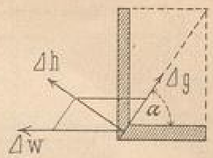
Damit obige Bedingung erfüllt sei, muss daher

$$\frac{f_1}{f_2} = 1, \quad \text{d. h.} \quad f_1 = f_2$$

sein. Soll also die Mittelkraft beider Horizontalkräfte im Grundriss in die Richtung der Diagonalen fallen, so sind für die Seilcurven der beiden zusammengehörigen Streifen gleiche Pfeilhöhen einzuführen.

Damit diese günstige Kräftewirkung möglich sei, müssen die zusammengehörigen Streifen annähernd gleiche Scheitelhöhen haben. Wenn die Scheitellinien $\overline{MS}$ und $\overline{SN}$ der Kappen (Fig. 396) wagrecht sind, so kann $f_1 = f_2$ sein; aber auch wenn $\overline{MS}$ nach einer geraden oder gekrümmten Linie ansteigt, ist es möglich und zweckmässig, der Linie $\overline{SN}$ die entsprechende Form zu geben, bei welcher die Werthe f_1 der einzelnen Streifen den Werthen f_2 nahezu gleich sind. Wenn die Bedingung $f_1 = f_2$ nicht erfüllt ist, wenn beispielsweise $d\,h_1 \sin\alpha > d\,h_2 \cos\alpha$ ist, so wirkt der Ueberschuss $\Delta\,h = d\,h_1 \sin\alpha - d\,h_2 \cos\alpha$ wie in Fig. 398 gezeichnet ist. $\Delta\,h$ zerlegt sich in eine Seitenkraft Δg in der lothrechten Gratebene und eine Seitenkraft Δw, welche parallel der Längsaxe der Kappe ASD (Fig. 396) wirkt. Die Kräfte Δw beanspruchen den Schildbogen AMD. Man erhält

Fig. 398.



$$\Delta w = \frac{\Delta h}{\sin \alpha} = d h_1 - \frac{d h_2}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

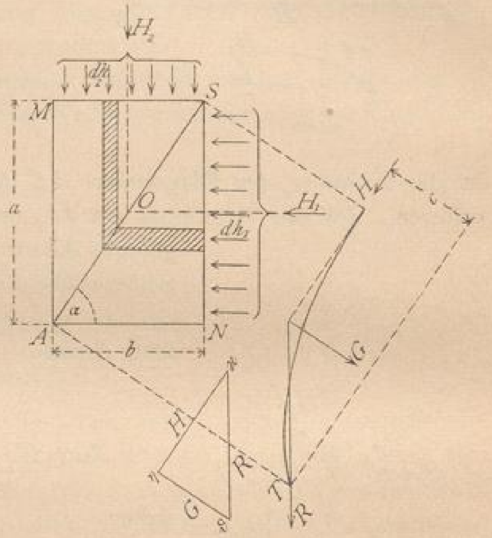
Mit den in Gleichung 397 gefundenen Werthen von $d h_1$ und $d h_2$ erhält man

$$\Delta w = \frac{q x^2}{2} \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2}\right) d x.$$

Für die weiteren Untersuchungen wird angenommen, dafs $f_1 = f_2$, also $\Delta w = 0$ sei.

Betrachtet man ein Viertel des Gewölbes (Fig. 399), und zwar das Stück $MSNA$, so wirken auf dasselbe die Belastung q für die Einheit der Grundfläche, also im Ganzen $G = q a b$ im Schwerpunkt O des Rechteckes $MSNA$; aufserdem wirken in den Scheiteln der einzelnen Gewölbestreifen die Kräfte $d h_1$, bezw. $d h_2$, endlich der Kämpferdruck auf den Gratbogen in A. Diese Kräfte müssen den Gewölbetheil im Gleichgewicht halten. Die den einzelnen Streifen entsprechenden Seilcurven sind, weil die Belastungen gleichmäfsig über die wagrechte Projection vertheilt sind, Parabeln, und man kann annehmen, dafs sich in allen Streifen desselben Gewölbetheiles (ASB, bezw. ASD in Fig. 396) dieselbe Seilcurve bildet. Dann ist, wenn C_1 und C_2 noch zu bestimmende Festwerthe sind, bezw.

Fig. 399.



$$x^2 = C_1 f_1 \quad \text{und} \quad w^2 = C_2 f_2.$$

Werden diese Werthe in die Gleichung 397 eingeführt, so ergiebt sich

$$d h_1 = \frac{q\, C_1\, d w}{2} \quad \text{und} \quad d h_2 = \frac{q\, C_2\, d x}{2} \quad \ldots\ldots \quad 398.$$

Die in den Scheiteln der Gewölbestreifen wirkenden Horizontalkräfte haben also auf die ganze Länge des Gewölbes für die Längeneinheit die gleiche Gröfse (sind constant). Man erhält demnach die auf die gesammten Scheitelstrecken SN, bezw. SM ausgeübten Horizontalkräfte zu

$$H_1 = \frac{q\, C_1\, a}{2} \quad \text{und} \quad H_2 = \frac{q\, C_2\, b}{2} \quad \ldots\ldots \quad 399.$$

Diese Mittelkräfte liegen in den Mitten der bezüglichen Scheitelstrecken, weil alle Einzelkräfte gleich grofs sind. Beide Kräfte H_1 und H_2 schneiden sich in der Mitte der Diagonale AS, d. h. in der Lothrechten des Punktes O. Wird die Pfeilhöhe der Seilcurve im äufsersten Gewölbestreifen (AB, bezw. AD) mit c bezeichnet, so ist $b^2 = C_1 c$ und $a^2 = C_2 c$; hiernach wird

$$H_1 = \frac{q}{2}\, a\, \frac{b^2}{c} \quad \text{und} \quad H_2 = \frac{q}{2}\, b\, \frac{a^2}{c}.$$

H_1 und H_2 fetzen fich in ihrem Schnittpunkte zu einer Mittelkraft H zufammen, welche im Grundrifs in die Richtung der Diagonalen AS fällt; diefelbe ift

$$H = H_1 \cos \alpha + H_2 \sin \alpha = \frac{q}{2c} a b (b \cos \alpha + a \sin \alpha).$$

Nun ift $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ und $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; mithin wird

$$H = \frac{q a b (b^2 + a^2)}{2 c \sqrt{a^2 + a^2}} = \frac{q a b}{2 c} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Diefe Kraft H vereinigt fich in der Lothrechten des Punktes O mit dem Gewichte $G = q a b$ zu der auf den Kämpfer wirkenden Mittelkraft. Damit ift die auf einen jeden Eckpfeiler des reckteckigen Kreuzgewölbes wirkende Kraft gefunden; fie hat eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft, deren Gröfsen find:

$$H = \frac{q a b}{2 c} \sqrt{a^2 + b^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 400.$$

$$V = q a b \quad \ldots \ldots \ldots \quad 401.$$

Wenn das Gewölbe quadratifchen Grundrifs hat, fo bleibt alles Vorftehende giltig; nur ift $b = a$ einzuführen, fo dafs man erhält: Beim Kreuzgewölbe über quadratifchem Raume mit einer Seitenlänge $2a$ ift der Horizontalfchub am Grat

$$H = \frac{q a^3}{c \sqrt{2}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 402.$$

und die lothrechte auf jeden Pfeiler übertragene Kraft

$$V = q a^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 403.$$

Die graphifche Ermittelung von H läuft auf die Zerlegung von $G = q a b$ (bezw. $q a^2$) in die beiden Kräfte H und R hinaus. Ift in Fig. 399: $G = \eta \vartheta$, fo ift $\varkappa \eta = H$ und $\vartheta \varkappa = R$.

2) Die Lagerfugen find im Grundrifs fenkrecht zu den Graten. Der Unterfuchung wird wieder ein Gewölbe über rechteckigem Raume zu Grunde gelegt. Daffelbe werde durch lothrechte Ebenen, welche im Grundrifs fenkrecht zu den Graten gerichtet find, in Streifen zerlegt; dann befteht jeder Streifen aus zwei Theilen, welche fich im Grat treffen. Für jeden Theil ftellt der Grat den einen Stützpunkt dar; die anderen Stützpunkte werden bei den innerhalb des Viereckes $LMNO$ (Fig. 400) liegenden Streifen durch die entfprechenden Streifen der benachbarten Gewölbeviertel gebildet, bei den aufserhalb diefes Viereckes liegenden Streifen einerfeits durch die Streifen des benachbarten Gewölbeviertels, andererfeits oder beiderfeits durch die Gurtbogen AB, BC, CD, DA.

286. Lagerfugen fenkrecht zu den Graten.

α) Es werde zuerft ein Streifen FEG aus dem Viereck $LMNO$ betrachtet. Die Belaftung für die Einheit der Grundfläche fei wiederum q; alsdann ift (Fig. 400)

$$d h_1 = \frac{q z_1^2 d w}{2 f_1} \quad \text{und} \quad d h_2 = \frac{q z_2^2 d w}{2 f_2}, \quad \ldots \ldots \quad 404.$$

wenn f_1 und f_2 die Pfeilhöhen der betreffenden Seilcurven find. Im Punkte E wird auf den Grat nur eine lothrechte Kraft übertragen, falls $d h_1 = d h_2$, d. h. wenn $\frac{f_2}{f_1} = \frac{z_2^2}{z_1^2}$ ift. Nun ift $z_2 = w \operatorname{tg} \alpha$ und $z_1 = \frac{w}{\operatorname{tg} \alpha}$; mithin ift die Bedingung für $d h_1 = d h_2$:

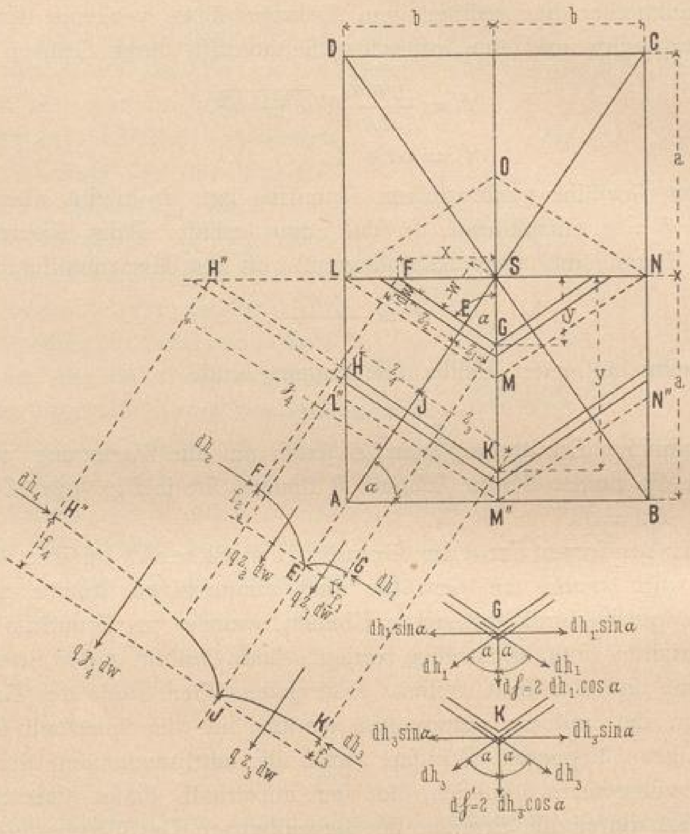
$$\frac{f_2}{f_1} = \operatorname{tg}^4 \alpha = \frac{a^4}{b^4}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad 405.$$

alsdann ist die im Punkte E auf den Gratbogen übertragene lothrechte Kraft $d\mathfrak{v}_1 = q\,d\,w\,(z_1 + z_2)$; dieselbe ist gleich dem Gewichte des Streifens FEG. Da aber $z_1 + z_2 = \frac{y}{\cos\alpha}$ ist, so wird

$$d\mathfrak{v}_1 = \frac{q\,y\,d\,w}{\cos\alpha} = q\,y\,\mathrm{tg}\,\alpha\,d\,y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 406.$$

Im Punkte G wirken die beiden wagrechten Kräfte $d\,h_1$ in den Richtungen der anschliefsenden Streifen; sie zerlegen sich in je zwei Seitenkräfte, welche in der Längsrichtung der Kappe, bezw. senkrecht zu dieser Richtung wirken. Die beiden

Fig. 400.



letzteren haben je die Gröfse $d\,h_1 \sin\alpha$ und heben einander auf; die beiden ersteren setzen sich zu einer Kraft $d\mathfrak{h} = 2\,d\,h_1 \cos\alpha$ zusammen. Wird für $d\,h_1$ der obige Werth eingeführt und beachtet, dafs $w = z_1\,\mathrm{tg}\,\alpha$, also $d\,w = d\,z_1\,\mathrm{tg}\,\alpha$ ist, so ergiebt sich

$$d\mathfrak{h} = \frac{q\,z_1{}^2 \sin\alpha\,d\,z_1}{f_1}.$$

Unter gleichen Annahmen, wie in Art. 285 (S. 298), wird $z_1{}^2 = C f_1$ und $d\mathfrak{h} = q\,C \sin\alpha\,d\,z_1$; ferner, weil $z_1 = y \cos\alpha$ und $d\,z_1 = \cos\alpha\,d\,y$ ist,

$$d\mathfrak{h} = q\,C \sin\alpha \cos\alpha\,d\,y.$$

Jeder Doppelstreifen EGE' innerhalb der Grenzen $x = 0$ bis $x = b$ übt eine wagrechte Kraft $d\mathfrak{h}$ auf den Scheitel des Gurtbogens aus.

β) Nunmehr werde ein Streifen HJK unterſucht, welcher auſserhalb des Viereckes $LMNO$ liegt, aber an der einen Seite ſich gegen den entſprechenden Streifen des benachbarten Gewölbevierecks lehnt (Fig. 400). Es kann angenommen werden, daſs die Seilcurve im Punkte K eine wagrechte Tangente hat; im Punkte H iſt dies nicht der Fall. Wir ergänzen das Stück JH des Streifens durch ein Stück, welches bis zur Verlängerung der Linie LN reicht, und nehmen an, daſs im Punkte H'' dieſes Streifens die Seilcurve eine wagrechte Tangente habe. Der Horizontalſchub im Streifen HJ iſt eben ſo groſs, wie im Streifen $H''J$. Werden die Pfeilhöhen der betreffenden Seilcurven mit f_3 und f_4 bezeichnet, ſo iſt

$$d\,h_3 = \frac{q\,d\,w\,z_3^{\,2}}{2\,f_3} \quad \text{und} \quad d\,h_4 = \frac{q\,d\,w\,\mathfrak{z}_4^{\,2}}{2\,f_4}.$$

Soll, wie oben, $d\,h_3 = d\,h_4$ ſein, ſo muſs

$$\frac{f_4}{f_3} = \frac{\mathfrak{z}_4^{\,2}}{z_3^{\,2}} = \operatorname{tg}^4 \alpha = \frac{a^4}{b^4}$$

ſein, d. h. die Pfeilhöhen müſſen im gleichen Verhältniſs zu einander ſtehen, wie oben unter α (Gleichung 405).

Im Punkte J wird auf den Grat eine lothrechte Belaſtung übertragen, welche dem Gewichte des ganzen Streifens $H''JK$ gleich iſt; denn der im Punkte H vom Gurtbogen auf den Streifen wirkende Gegendruck hat eine nach unten gerichtete lothrechte Seitenkraft, die dem Gewichte des Streifens HH'' gleich iſt.

Demnach wirkt in J als Belaſtung auf den Grat

$$d\,\mathfrak{v}_2 = q\,d\,w\,(z_3 + \mathfrak{z}_4) = q\,w\,d\,w \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \operatorname{tg} \alpha\right)$$

und, da $w = y \sin \alpha$, alſo $d\,w = \sin \alpha\,d\,y$ iſt,

$$d\,\mathfrak{v}_2 = q\,y \operatorname{tg} \alpha\,d\,y \quad \ldots\ldots\ldots \quad 407.$$

Im Punkte K wirken zwei Kräfte $d\,h_3$, deren Mittelkraft ſich zu

$$d\,\mathfrak{h}' = 2\,d\,h_3 \cos \alpha = \frac{q\,d\,w\,z_3^{\,2}}{f_3} \cos \alpha$$

ergiebt. Mit $w = z_3 \operatorname{tg} \alpha$, alſo $d\,w = \operatorname{tg} \alpha\,d\,z_3$ erhält man

$$d\,\mathfrak{h}' = \frac{q\,z_3^{\,2}}{f_3} \sin \alpha\,d\,z_3.$$

Setzt man wiederum $z_3^{\,2} = C f_3$, ſo wird

$$d\,\mathfrak{h}' = q\,C \sin \alpha\,d\,z_3$$

und, weil $z_3 = y \cos \alpha$ oder $d\,z_3 = d\,y \cos \alpha$ iſt,

$$d\,\mathfrak{h}' = q\,C \sin \alpha \cos \alpha\,d\,y.$$

Die Summe aller Kräfte $d\,\mathfrak{h}$ und $d\,\mathfrak{h}'$, welche von den Streifen bis $L''\,M''\,N''$ ausgeübt werden, iſt demnach

$$\mathfrak{H}_1 = q\,C\,a \sin \alpha \cos \alpha$$

und, weil $\sin \alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ und $\cos \alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ iſt,

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{q\,a^2\,b\,C}{a^2 + b^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 408.$$

γ) Betrachtet man endlich einen Streifen $F''\,E''\,G''$, welcher ſich beiderſeits gegen die Gurtbogen ſtützt, ſo hat man hier beiderſeits ergänzende Gewölbeſtücke hinzuzufügen, welche bis zu den verlängerten Halbirungslinien des Gewölbes reichen.

Die beiden in E'' auf den Grat übertragenen wagrechten Kräfte ſind, wenn die obigen Bezeichnungen (mit Abänderung der Zeiger) beibehalten werden,

$$d\,h_5 = \frac{q\,d\,w\,\mathfrak{z}_5^{\,2}}{2 f_5},$$

$$d\,h_6 = \frac{q\,d\,w\,\mathfrak{z}_6^{\,2}}{2 f_6}.$$

Sollen ſich wiederum die beiden wagrechten Kräfte in E'' aufheben, ſo muſs

$$\frac{f_6}{f_5} = \frac{\mathfrak{z}_6^{\,2}}{\mathfrak{z}_5^{\,2}} = \operatorname{tg}^4 \alpha = \frac{a^4}{b^4}$$

ſein. Die in E'' auf den Grat übertragene lothrechte Laſt iſt alsdann (vergl. die Angaben unter β)

$$d\,\mathfrak{v}_3 = q\,d\,w\,(\mathfrak{z}_5 + \mathfrak{z}_6).$$

Nun iſt

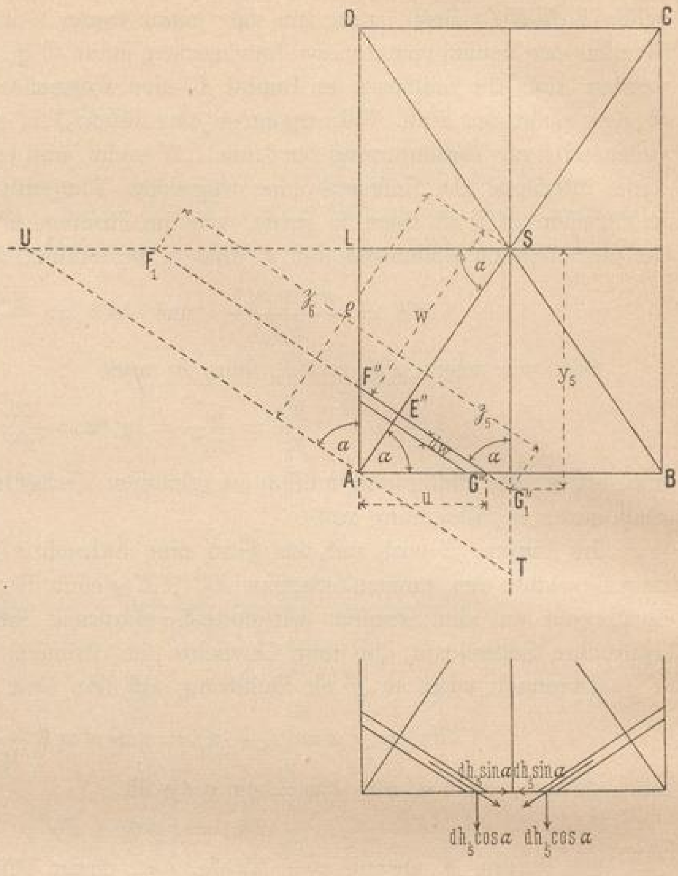
$$(\mathfrak{z}_5 + \mathfrak{z}_6) = \frac{y_5}{\cos\alpha}$$

und $d\,w = \sin\alpha\,d\,y$, alſo

$$d\,\mathfrak{v}_3 = \frac{q\,y_5}{\cos\alpha}\sin\alpha\,d\,y$$

$$= q\,y_5\,d\,y\,.\operatorname{tg}\alpha, \quad . \quad . \quad 409.$$

Fig. 401.



genau wie in den Formeln 406 u. 407.

Die im Punkte G'' auf den Gurtbogen ausgeübte Kraft $d\,h_5$ zerlegt ſich in eine ſenkrecht zum Gurtbogen gerichtete Seitenkraft $d\,h_5 \cos\alpha$ und eine ſolche, welche im Grundriſs in die Richtung des Gurtbogens fällt: $d\,h_5 \sin\alpha$. Letztere wird durch eine gleich groſse, entgegengeſetzt gerichtete Seitenkraft im ſymmetriſch zur Mitte liegenden Punkte aufgehoben; die erſtere iſt

$$d\,h_5 \cos\alpha = \frac{q\,d\,w\,\mathfrak{z}_5^{\,2}}{2 f_5}\cos\alpha.$$

Setzt man wieder $\mathfrak{z}_5^{\,2} = C f_5$, ſo wird

$$d\,h_5 \cos\alpha = \frac{q\,d\,w\,C}{2}\cos\alpha.$$

Nach Fig. 401 iſt $\cos\alpha = \dfrac{\rho - w}{u}$, $w = \rho - u\cos\alpha$ und $d\,w = -\cos\alpha\,d\,u$, alſo

$$d\,h_5 \cos\alpha = -\frac{q\,C}{2}\cos^2\alpha\,d\,u.$$

Die auf den Gurtbogen wirkende wagrechte Kraft iſt alſo auf die ganze Grundriſslänge conſtant, und zwar entfällt auf jede Hälfte b der Breite

$$-\int_b^0 \frac{q\,C}{2}\cos^2\alpha\,d\,u = \frac{q\,C}{2}\cos^2\alpha\,b.$$

Die gefammte auf den Gurtbogen übertragene, wagrechte Kraft ift demnach in der Axe des Gewölbes ASB (vergl. Gleichung 408)

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{q a^2 b C}{a^2 + b^2};$$

gleichmäfsig über die Grundrifslänge $2b$ vertheilt wirkt:

$$\mathfrak{H}_2 = \frac{q C b^3}{a^2 + b^2}.$$

Diefe Kräfte greifen in verfchiedenen Höhen an; die Lage von $\mathfrak{H}_2$ folgt aus den Höhen der Stellen, an welchen die einzelnen Gewölbeftreifen fich an den Gurtbogen fetzen. An diefen Stellen wirken aufser den wagrechten auch lothrechte Seitenkräfte nach aufwärts; diefelben find gleich den Gewichten der zu ergänzenden Gewölbeftreifen.

Die gefammte, normal gegen den Gurtbogen AB wirkende Horizontalkraft ift

$$\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 = \frac{q C b}{a^2 + b^2}(a^2 + b^2) = q C b,$$

$$(\mathfrak{H}_I) = q C b; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 410.$$

eben fo erhält man als gefammte Horizontalkraft, welche normal gegen den Gurtbogen AD wirkt,

$$(\mathfrak{H}_{II}) = q C a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 411.$$

Wird die Pfeilhöhe f_3 der Seilcurve, welche durch M'' gelegt ift, mit e bezeichnet, für welchen Streifen z_3 den Werth $a \cos \alpha$ annimmt, fo ergiebt fich

$$a^2 \cos^2 \alpha = C e, \text{ d. h. } C = \frac{a^2 b^2}{e(a^2 + b^2)}; \text{ fomit}$$

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{H}_I) &= \frac{q a^2 b^3}{e(a^2 + b^2)} \\ (\mathfrak{H}_{II}) &= \frac{q a^3 b^2}{e(a^2 + b^2)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 412.$$

Die Kräfte $\mathfrak{H}$ werden entweder durch gleiche, entgegengefetzt gerichtete, vom Nachbargewölbe ausgehende Kräfte aufgehoben, oder fie werden von der Mauer aufgenommen, gegen welche fich das Gewölbe fetzt.

δ) Die Belaftung des Gratbogens ift nach Vorftehendem lothrecht; nach Gleichung 406, 407 u. 409 nimmt fie von der Mitte des Gewölbes von S bis zum Kämpfer des Gratbogens bei A entfprechend den Ordinaten einer Geraden zu. In allen drei oben betrachteten Abtheilungen ift fie auf die Grundrifslänge dw

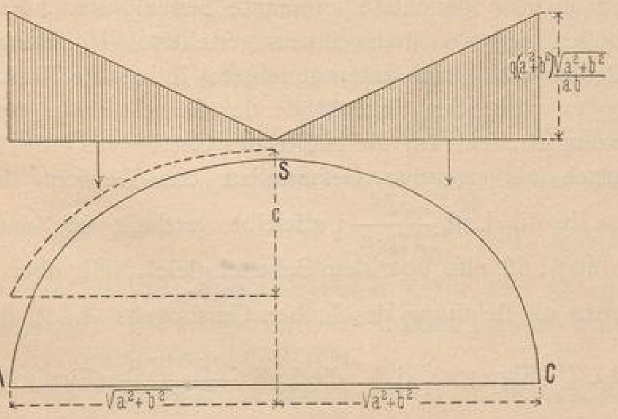
$$d\mathfrak{v} = q\, dw \frac{y}{\cos \alpha};$$

demnach ift auf die Längeneinheit des Gratbogens im Grundrifs die Belaftung

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dw} = \frac{q y}{\cos \alpha}.$$

y hat feinen gröfsten Werth für den Kämpferpunkt;

Fig. 402.



für dieſen Punkt iſt $y = \overline{ST} = a + \frac{b}{\operatorname{tg}\alpha} = a + \frac{b\,b}{a} = \frac{a^2+b^2}{a}$. An dieſer Stelle iſt die Einheitsbelaſtung $\frac{q(a^2+b^2)}{a\cos\alpha} = \frac{q(a^2+b^2)}{a\,b}\sqrt{a^2+b^2}$.

Wird die Pfeilhöhe der Seilcurve im Gratbogen gleich c angenommen, ſo iſt der Horizontalſchub im Grat

$$R_h = \frac{q(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{a\,b\,c} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{3},$$

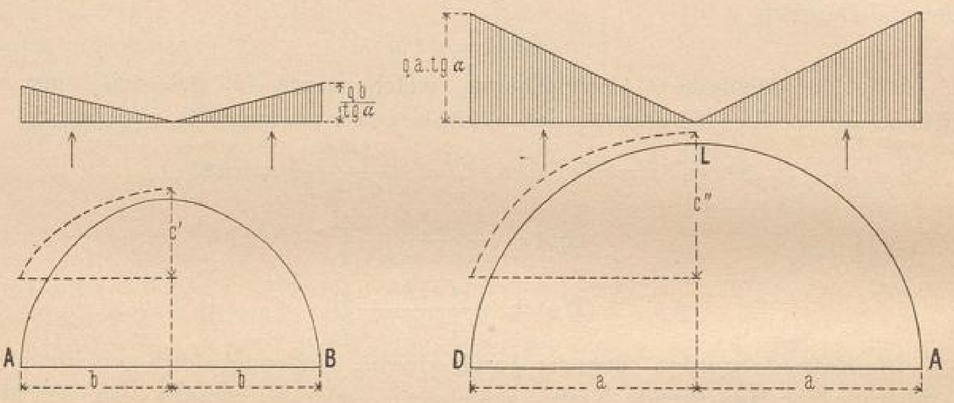
$$R_h = \frac{q(a^2+b^2)^2\sqrt{a^2+b^2}}{6\,a\,b\,c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 413.$$

Die lothrechte Seitenkraft der vom Gratbogen auf den Eckpfeiler ausgeübten Kraft iſt

$$R_v = \frac{q(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}}{2\,a\,b} = \frac{q(a^2+b^2)^2}{2\,a\,b} \quad \ldots \quad 414.$$

ε) Standſicherheit der Eckpfeiler. Für die Unterſuchung der Standſicherheit der Eckpfeiler ſind weiter noch die Kräfte in das Auge zu faſſen, welche

Fig. 403.



von den Gurtbogen auf die Eckpfeiler übertragen werden; dieſelben ſollen nur ſo weit beſprochen werden, als ſie vom Kreuzgewölbe hervorgerufen werden; vom Eigengewicht der Gurtbogen kann hier abgeſehen werden.

Von den einzelnen Gewölbeſtreifen werden nach Vorſtehendem Kräfte auf die Gurtbogen übertragen, welche nach oben gerichtete lothrechte Seitenkräfte haben; dieſe letzteren rufen im Gurtbogen negative (nach innen gerichtete) Horizontalkräfte hervor, auſserdem im Pfeiler negative (nach unten gerichtete) lothrechte Kräfte. Die lothrechten, auf die Gurtbogen wirkenden Seitenkräfte der Gewölbſchübe ſind gleich den Gewichten der Ergänzungsſtreifen; auf die Hälfte des Gurtbogens $A\,M''B$ (Fig. 400 u. 401) wirkt demnach als negative Geſammtlaſt das Gewicht des Ergänzungsdreieckes $A\,M''\,T$, d. h. die Laſt $\frac{q\,b^2}{2\operatorname{tg}\alpha}$; dieſelbe vertheilt ſich nach dem Geſetze des Dreieckes (Fig. 403), iſt alſo über dem Scheitel gleich Null, über A gleich $\frac{q\,b}{\operatorname{tg}\alpha}$. Eben ſo erhält man als Belaſtung des halben Gurtbogens $A\,L\,D$ die Laſt des Ergänzungsdreieckes $A\,L\,U$ (Fig. 401), d. h. die Laſt $\frac{q\,a^2\operatorname{tg}\alpha}{2}$ (Fig. 403);

über A und D iſt die Belaſtung für die Längeneinheit gleich $q\,a\,\mathrm{tg}\,\alpha$; über L iſt die Einheitsbelaſtung gleich Null. Fig. 403 zeigt die Belaſtung. Demnach entfällt auf den Eckpfeiler A die negative Zuſatzlaſt $\Delta R_v = -\left(\frac{q\,b^2}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{q\,a^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2}\right)$ und mit $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

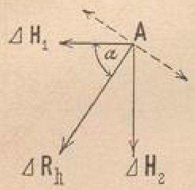
$$\Delta R_v = -\frac{q}{2\,a\,b}\,(a^4 + b^4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 415.$$

Die in Fig. 403 angegebenen Belaſtungen erzeugen in den Gurtbogen die Horizontalſchübe

$$\Delta H_1 = -\frac{q\,b^2\,b}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,.\,3\,c'} \quad \text{und} \quad \Delta H_2 = -\frac{q\,a^2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,.\,a}{2\,.\,3\,c''},$$

welche ſich zu einer in der Richtung des Grates wirkenden Mittelkraft ΔR_h vereinen. Es iſt

Fig. 404.



$$\Delta R_h = -(\Delta H_1 \cos\alpha + \Delta H_2 \sin\alpha),$$

$$\Delta R_h = -\frac{q}{6}\left(\frac{b^3 \cos^2\alpha}{c' \sin\alpha} + \frac{a^3 \sin^2\alpha}{c'' \cos\alpha}\right) \quad . \quad . \quad . \quad 416.$$

Für $c' = c'' = c$ wird

$$\Delta R_h = -\frac{q\,(a^6 + b^6)}{6\,a\,b\,c\sqrt{a^2 + b^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 417.$$

Vereinigt man die für ΔR_v und ΔR_h gefundenen Werthe mit den Werthen derjenigen Kräfte, welche vom Grat auf den Eckpfeiler übertragen werden, d. h. mit den Ausdrücken der Gleichungen 413 u. 414, ſo erhält man, wenn man

$$R_h + \Delta R_h = H \quad \text{und} \quad R_v + \Delta R_v = V$$

ſetzt,

$$H = \frac{q\,(a^2 + b^2)^2}{6\,a\,b\,c}\sqrt{a^2 + b^2} - \frac{q}{6\,a\,b\,c\sqrt{a^2 + b^2}}\left(\frac{b^6}{c'} + \frac{a^6}{c''}\right) \quad . \quad 418.$$

Für $c' = c'' = c$ ergiebt ſich

$$H = \frac{q\,a\,b}{2\,c}\sqrt{a^2 + b^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 419.$$

ferner

$$V = \frac{q}{2\,a\,b}\,(a^2 + b^2)^2 - \frac{q}{2\,a\,b}\,(a^4 + b^4);$$

mit einfachen Umformungen erhält man

$$V = q\,a\,b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 420.$$

Die auf den Eckpfeiler Seitens des Kreuzgewölbes ausgeübte Kraft hat alſo, falls man $c' = c'' = c$ ſetzen kann, als Seitenkräfte

für das Kreuzgewölbe über rechteckigem Raume:

$$H = \frac{q\,a\,b}{2\,c}\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad V = q\,a\,b;$$

für das Kreuzgewölbe über quadratiſchem Raume:

$$H = \frac{q\,a^3}{c\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad V = q\,a^2.$$

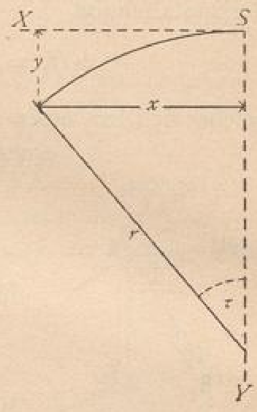
Die auf die Eckpfeiler ausgeübten Kräfte ſind alſo genau gleich groſs, mögen die Lagerfugen den Längsaxen der Kappen parallel laufen oder im Grundriſs ſenkrecht zu den Graten angeordnet ſein.

Man nehme H im inneren Drittel der Scheitelfuge des Gratbogens wirkend an.

b) Kuppelgewölbe.

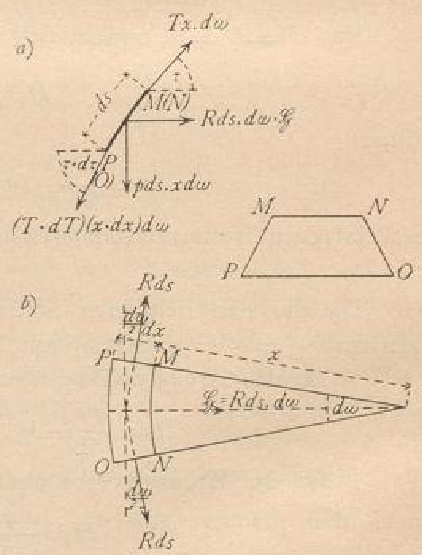
287. Voraus-ſetzungen. Die Kuppelfläche entſteht durch Drehung einer krummen Linie um eine lothrechte Axe. In den folgenden Unterſuchungen ſollen die im Inneren des Kuppelgewölbes auftretenden Kräfte unter der Annahme ermittelt werden, daſs die Belaſtung eine ruhende und über die einzelnen zwiſchen den Parallelkreiſen liegenden Ringe ſo vertheilt ſei, daſs ein jeder Ring entweder voll belaſtet oder ganz unbelaſtet iſt. Weiter wird die Kuppelfläche als die Gleichgewichtsfläche angenommen; demnach werden die auf ein beliebiges Kuppeltheilchen wirkenden inneren Kräfte in die betreffenden Berührungsebenen der Kuppelfläche fallen. Daraus ergeben ſich dann die inneren Kräfte oder Spannungen, welche, in der Kuppel wirkend, im Stande ſind, das Gleichgewicht aufrecht zu erhalten.

Fig. 405.



288. Allgemeine Gleichgewichts-bedingungen. Der Anfangspunkt der Coordinaten ſoll in den Scheitel der Kuppel (Fig. 405) gelegt und die lothrechte Axe als *Y*-Axe, eine im Scheitel *S* ſenkrecht zu erſterer errichtete Axe als *X*-Axe gewählt werden. Irgend ein Kuppeltheilchen *MNOP* (Fig. 406), welches oben und unten durch Parallelkreiſe, rechts und links durch Meridiane der Kuppel begrenzt iſt, wird auf ſeinen Gleichgewichtszuſtand unterſucht. Das Theilchen *MNOP* iſt in Fig. 406*a* in der Anſicht, in Fig. 406*b* im Grundriſs, daneben im abgewickelten Zuſtande dargeſtellt. Auf *MN* wirkt für die Längeneinheit die Tangentialſpannung *T*, und da *MN* (vergl. den Grundriſs in Fig. 406*b*) $x\,d\omega$ Längeneinheiten enthält, ſo wirkt auf *MN* die Kraft $T x\,d\omega$. Auf *OP* wirkt $(T + dT)(x + dx)\,d\omega$; auf *MP* und *NO* wirken die Ringſpannungen, welche für die Längeneinheit gleich *R* ſeien, alſo auf ds Längeneinheiten die Gröſse $R\,ds$ haben. Auſserdem wirkt noch die veränderliche Belaſtung *p* für die Flächeneinheit der Kuppelfläche, d. h. auf *MNOP* die Laſt $p\,ds\,.\,x\,d\omega$. Um ſämmtliche auf das Theilchen wirkende Kräfte in einer Ebene zu erhalten, ermittelt man die Mittelkraft der beiden Ringſpannungen $R\,ds$; ſie iſt $\mathfrak{H} = 2\,R\,ds \sin \frac{d\omega}{2}$,

Fig. 406.



und, da wegen der Kleinheit von $\frac{d\omega}{2}$ die Gröſse $\sin \frac{d\omega}{2} = \frac{d\omega}{2}$, wird

$$\mathfrak{H} = R\,ds\,d\omega \quad . \quad . \quad . \quad 421.$$

Die Aufſtellung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für *MNOP* ergiebt nun

$$0 = T x\,d\omega \cos \tau - (T + dT)(x + dx)\,d\omega \cos(\tau + d\tau) + R\,ds\,d\omega.$$

Führt man die Multiplication durch und läſſt die unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung fort, ſo bleibt

$$0 = T x \sin \tau \, d\tau - d T x \cos \tau - T dx \cos \tau + R ds = - d (T x \cos \tau) + R ds;$$
daher
$$R ds = d (T x \cos \tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 422.$$

Ferner iſt
$$0 = p ds x d\omega - T x d\omega \sin \tau + (T + dT)(x + dx) d\omega \sin (\tau + d\tau);$$
$$\sin (\tau + d\tau) = \sin \tau + \cos \tau \, d\tau.$$

Durch Ausmultipliciren und Fortlaſſen der unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung erhält man $0 = p x ds + d (T x \sin \tau)$; daher
$$- p x ds = d (T x \sin \tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 423.$$

Die beiden Gleichungen 422 u. 423 geben Aufſchluſs über die Gröſse der gleichzeitigen Werthe von T und R, welche irgend welchen Belaſtungen und Gleichgewichtsflächen entſprechen.

Die erzeugende Linie iſt bei der Kugelkuppel ein Kreis. Die bezüglichen 289. Kugelförmige Kuppel.
Werthe von T und R werden alſo erhalten, wenn in die Gleichungen 422 u. 423 für x und ds die Werthe eingeführt werden, welche dem Kreiſe entſprechen. Nach Fig. 405 iſt $x = r \sin \tau$ und $ds = r d\tau$; mithin, wenn noch die Annahme gemacht wird, daſs p für die ganze Kuppel conſtant iſt,
$$- p r \sin \tau \, . \, r d\tau = d (T r \sin \tau \sin \tau) \quad \text{und} \quad \int_{\tau_0}^{\tau} d (T r \sin^2 \tau) = - p r^2 \int_{\tau_0}^{\tau} \sin \tau \, d\tau.$$

Als untere Grenze iſt der Werth τ_0 von τ einzuführen, welcher dem oberen Endpunkte der Erzeugenden entſpricht; hier iſt dieſer Endpunkt S, und es wird $\tau_0 = 0$; demnach iſt
$$T r \sin^2 \tau = + p r^2 \Big(\cos \tau \Big)_0^{\tau} = - p r^2 (1 - \cos \tau),$$
$$T = - \frac{p r (1 - \cos \tau)}{\sin^2 \tau} = - \frac{p r (1 - \cos \tau)}{1 - \cos^2 \tau} = - \frac{p r}{1 + \cos \tau} \quad . \quad . \quad 424.$$

Wird dieſer Werth in die Gleichung 422 für R eingeſetzt, ſo erhält man
$$R ds = R r d\tau = d \left(- \frac{p r}{1 + \cos \tau} \, r \sin \tau \cos \tau \right) = - p r^2 d \, \frac{\sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau},$$
$$R = - p r \frac{\cos 2 \tau + \cos^3 \tau}{(1 + \cos \tau)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 425.$$

Die Werthe der Gleichungen 424 u. 425 gelten für oben geſchloſſene Kugelkuppeln. Die Spannungen im Scheitel werden für $\tau = 0$ erhalten. Für letzteren Werth iſt
$$T_0 = - \frac{p r}{2} \quad \text{und} \quad R_0 = - \frac{p r}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 426.$$

d. h. die Meridianſpannungen und Ringſpannungen ſind für die Längeneinheit im Scheitel gleich groſs; daſelbſt findet ſomit nach allen Richtungen ein gleicher Druck $\frac{p r}{2}$ für die Längeneinheit ſtatt.

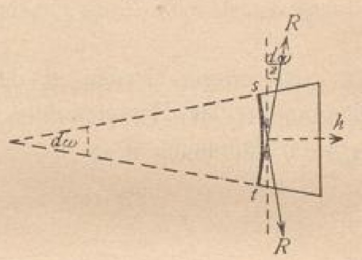
Für die Halbkugelkuppel iſt am Aequator $\tau = \frac{\pi}{2}$, daher 290. Halbkugelkuppel.
$$T_{\frac{\pi}{2}} = - p r \quad \text{und} \quad R_{\frac{\pi}{2}} = + p r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 427.$$

Die Meridianſpannung nimmt alſo vom Scheitel nach dem Aequator von $\frac{p\,r}{2}$ bis auf $p\,r$ zu, bleibt aber ſtets Druck, da $1 + \cos\tau$ nie negativ werden kann. Am Aequator iſt T lothrecht gerichtet, da T gleiche Richtung mit der Tangente an die Erzeugende hat. Die Summe aller $T_{\frac{\pi}{2}}$ iſt gleich dem Gewichte der ganzen Kuppel, da die $T_{\frac{\pi}{2}}$ die Auflagerdrücke darſtellen. Es iſt $\Sigma\left(T_{\frac{\pi}{2}}\right) = p\,r\,.\,2\,r\,\pi = 2\,p\,r^2\,\pi$, und das ganze Kuppelgewicht iſt gleich $\frac{4\,r^2\pi}{2}\,p = 2\,r^2 p\,\pi$. Die Ringſpannung R geht vom Druck $\frac{p\,r}{2}$ im Scheitel zum Zug $p\,r$ am Aequator über, demnach für irgend einen näher zu beſtimmenden Winkel durch Null. Iſt dieſer Winkel τ_1, ſo iſt $0 = p\,r\,\frac{\cos 2\,\tau_1 + \cos^3\tau_1}{(1 + \cos\tau_1)^2}$, woraus ſich ergiebt

$$\cos\tau_1 = 0{,}618 \quad \text{und} \quad \tau_1 = 51^0\,50' \qquad 428.$$

In allen Ringen, deren zugehörige Winkel τ kleiner als τ_1 ſind, findet Druck, in den Ringen, deren Winkel gröſser ſind als τ_1, findet Zug ſtatt. Nimmt man auf die Zugfeſtigkeit des Mörtels keine Rückſicht, ſo können die einzelnen Theile eines Ringes keinen Zug auf einander ausüben. Ohne ſolchen kann aber bei den letzteren Ringen Gleichgewicht nicht ſtattfinden; ohne Hilfsconſtruction iſt daher das Gleichgewicht nicht vorhanden. Solche Hilfsconſtructionen ſind entweder umgelegte eiſerne Ringe oder die Hintermauerung. Letztere leiſtet die auf den Kuppelring wirkenden Ringkräfte R; auf dieſelbe wirken ſonach nach dem Princip von Wirkung und Gegenwirkung die Kräfte R in entgegengeſetztem Sinne; dieſelben ſind bei Berechnung der Hintermauerung zu berückſichtigen. Betrachtet man ein Bogenſtück $s\,t$ (Fig. 407), welches zum Winkel $d\,\omega$ gehört, ſo iſt die Mittelkraft der beiden R die nach auſsen gerichtete Kraft h gleich $2\,R \sin\frac{d\,\omega}{2} = R\,d\,\omega$.

Fig. 407.



Wir führen die abkürzende Bezeichnung

$$\mu = -\frac{\cos 2\,\tau + \cos^3\tau}{(1 + \cos\tau)^2} \qquad 429.$$

ein; alsdann wird

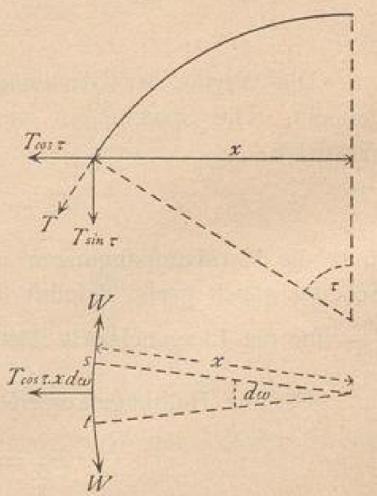
$$R = \mu\,p\,r \quad \text{und} \quad h = \mu\,p\,r\,d\,\omega \qquad 430.$$

Für die Längeneinheit des $x\,d\,\omega$ langen Bogens iſt alſo die nach auſsen auf die Hintermauerung wirkende Horizontalkraft in Folge der Ringſpannungen

$$\mathfrak{h} = \frac{\mu\,p\,r\,d\,\omega}{x\,d\,\omega} = \frac{\mu\,p\,r}{x} \qquad 431.$$

Aus Vorſtehendem folgt noch, daſs bei der Halbkugelkuppel die Hintermauerung wenigſtens bis zu derjenigen Höhe hinaufreichen muſs, welche dem Winkel $\tau_1 = 51^0\,50'$ entſpricht.

Fig. 408.



Auſser den Kräften $\mathfrak{h}$ (nach Gleichung 431) wirken auf die Widerlager noch die Meridianſpannungen T, welche dem gröſsten zur Kuppel gehörigen Winkel τ entſprechen. T hat eine wagrechte Seitenkraft $T\cos\tau$ und eine lothrechte Seitenkraft $T\sin\tau$. Die erſtere wird durch die Widerlager oder durch einen eiſernen Ring aufgehoben. Die Spannung in dieſem Ringe ergiebt ſich dann wie folgt. Auf den Bogen $s\,t$ (Fig. 408) von der Länge $x\,d\,\omega$ wirkt nach auſsen $T \cos\tau\, x\, d\,\omega$, und dieſe Kraft ſoll durch die beiden Ringſpannungen W aufgehoben werden; es iſt demnach

$$T \cos\tau\, x\, d\,\omega = 2\, W \sin \frac{d\,\omega}{2} = W\, d\,\omega;$$

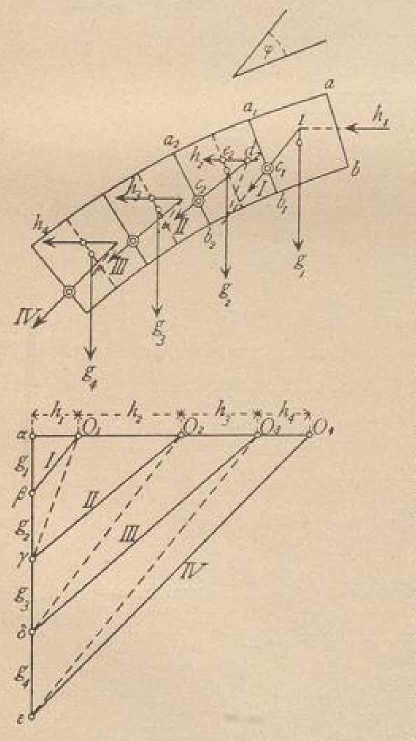
$$W = T\, x \cos\tau = \frac{p\, r\, r \sin\tau \cos\tau}{1 + \cos\tau} = \frac{p\, r^2 \sin\tau \cos\tau}{1 + \cos\tau} \quad . \; . \; . \; . \; 432.$$

Die vorſtehend entwickelten Werthe für T und R entſprechen einer Gleichgewichtsfläche. Man kann dieſe Werthe als genügend genaue Mittelwerthe annehmen; immerhin ſind aber gröſsere und geringere Werthe denkbar, welche anderen in der Kuppel möglichen Gleichgewichtsflächen entſprechen, die nicht mit der Mittelfläche des Kuppelgewölbes zuſammenfallen.

Die graphiſche Ermittelung der Werthe von T und R an den verſchiedenen Stellen der Kuppel kann nun in ähnlicher Weiſe durchgeführt werden, wie bei den anderen Gewölbearten gezeigt iſt, indem man beſtimmte Bedingungen für die Stützlinie vorſchreibt. Man unterſucht zu dieſem Zwecke den einem Centriwinkel α entſprechenden Kuppeltheil und geht dabei vom Scheitel, bezw. vom Laternenring aus. 291. Graphiſche Ermittelung.

Stellt man die Bedingung, daſs die Stützlinie im inneren Drittel verbleiben ſoll und kein Gleiten ſtattfindet, ſo erhält man eine ſolche, indem man vom oberſten Kuppelringe ausgeht, folgendermaſsen (Fig. 409). Die Belaſtung des oberſten, zum angenommenen Centriwinkel gehörigen Kuppeltheiles ſei g_1 $(= \alpha\beta)$; auſser g_1 wirken auf dieſen Theil noch die beiden Spannungen $R\, ds$, welche von den Nachbartheilen im Ringe ausgeübt werden. Dieſe beiden $R\, ds$ werden genau, wie in Fig. 406, zu einer Mittelkraft vereinigt, welche in derſelben Ebene wie g_1 liegt, d. h. in der Ebene, welche den zum Centriwinkel α gehörigen Kuppeltheil halbirt. Dieſe Mittelkraft iſt in Fig. 409 mit h_1 bezeichnet; h_1 iſt vor der Hand nur der Richtung nach bekannt; Gröſse und Lage von h_1 ſind unbekannt. Die Mittelkraft von h_1 und g_1 ſoll die Fuge $a_1 b_1$ im inneren Drittel ſchneiden und mit der Senkrechten zu dieſer Fuge keinen gröſseren Winkel, als den Reibungswinkel φ einſchlieſsen. Man ziehe nun durch c_1, den unterſten Punkt des inneren Drittels der Fuge $a_1 b_1$, eine Linie, die den Winkel φ mit der Senkrechten zur Fuge einſchlieſst; dieſe Linie ſchneide die Richtungslinie von g_1 in I; alsdann hat die durch I gelegte Kraft h_1 den kleinſten Werth, welcher obigen Bedingungen entſpricht. Rückte nämlich h_1 nach abwärts unter Beibehaltung von c_1, ſo würde h_1 (da ja g_1 denſelben Werth behält) gröſser werden; rückte gleichzeitig c_1 hinauf, ſo würde h_1 erſt recht gröſser. Rückten h_1 und c_1 gleich viel hinauf, ſo bliebe h_1 unverändert, behielte alſo den kleinſten Werth. Alles dies ergiebt ſich ohne Schwierigkeit durch Verzeichnung eines Kraftdreieckes für g_1, h_1 und Kraft I; h_1 kann aber endlich nicht weiter nach oben rücken, wenn nicht auch c_1 nach oben rückt, weil ſonſt der Winkel von I mit der Senkrechten zur Fuge gröſser als φ wird. — Wenn der Schnittpunkt von h_1 mit der Mittellinie des erſten Steines oberhalb des inneren Drittels fiele, ſo wären an dieſer Stelle auch die Ringſpannungen nicht mehr im inneren Drittel; da auch dieſe im Drittel liegen ſollen, ſo würde man h_1 bis zum oberen Endpunkt des inneren Drittels hinabzurücken und den ſich dann ergebenden Schnittpunkt von h_1 und g_1 mit c_1 zu verbinden haben, wobei der Winkel der Mittelkraft I gegen die Fugen-Senkrechte kleiner als φ würde.

Fig. 409.



Auf den zweiten Stein wirken nun I und g_2; aufserdem die Mittelkraft h_2 der Spannungen R im zweiten Ringe. Die Mittelkraft von I und g_2 ift aus dem Kraftpolygon zu entnehmen ($= O_1 \gamma$); fie geht durch den Schnittpunkt der Schnittlinien diefer beiden Kräfte. Die Refultirende diefer Kraft und der Kraft h_2 foll wiederum im inneren Drittel verbleiben; eben fo foll auch der Schnittpunkt von h_2 mit der punktirten Halbirungslinie diefes Steines nicht aus dem Drittel herausfallen. Der kleinfte Werth von h_2, welcher diefen Bedingungen entfpricht, ift derjenige, bei welchem h_2 durch den oberen Grenzpunkt des inneren Drittels der Steinfchwerlinie, d. h. durch e_2, geht, die Gefammtmittelkraft von I, g_2 und h_2 aber die Fuge $a_2 b_2$ im unteren Grenzpunkte c_2 des inneren Drittels fchneidet. Die Verbindungslinie von c_2 mit d_2, dem Schnittpunkte der Mittelkraft von I und g_2 mit h_2 ergiebt die Richtung der Gefammtmittelkraft II; die Gröfse erhält man durch Ziehen einer Linie γO_2 durch γ parallel zur Richtungslinie von II. Der Winkel, welchen II mit der Fugen-Senkrechten zu $a_2 b_2$ einfchliefst, ift kleiner als φ, alfo die Conftruction brauchbar. Wäre der Winkel gröfser als φ, fo wäre h_2 fo weit hinabzurücken und zu vergröfsern, bis der Winkel höchftens gleich φ ift. In diefer Weife erhält man durch Weiterconftruiren eine mögliche Stützlinie, welche auch mit der Wirklichkeit nahezu übereinftimmen dürfte.

Literatur.

Bücher über »Statik der Gewölbe«.

DIETLEIN, J. F. W. Beitrag zur Statik der Kreuzgewölbe. Halle 1823.

TELLKAMPF, H. Beitrag zur Gewölbetheorie. Frei nach CARVALLO. Hannover 1855.

SCHEFFLER, H. Theorie der Gewölbe, Futtermauern etc. Braunfchweig 1857.

FABRE, V. *Théorie des voûtes élaftiques et dilatables d'une application fpéciale aux arcs métalliques.* Paris 1860.

HAGEN, G. Ueber Form und Stärke gewölbter Bogen. Berlin 1863.

HÄNEL, v. Zur Theorie der Tonnengewölbe. Stuttgart 1868.

FONTAINE, H. *Stabilité des conftructions. Extrait de la notice fur la théorie des voûtes.* Befançon 1870.

ORTMANN, O. Die Statik der Gewölbe mit Rückficht auf ihre Anwendung. Halle 1876.

FABIAN, W. Ueber Gewölbstheorien mit befonderer Berückfichtigung auf den Brückenbau. Leipzig 1876.

BONNIN, R. *Étude fur la ftabilité des voûtes en maçonnerie.* Evreux 1876.

PERRODIL. *Réfiftance des voûtes et arcs métalliques.* Paris 1879.

GOBERT, J. B. *Nouvelles recherches fur la théorie des voûtes.* Paris 1879.

FOEPPL, A. Theorie der Gewölbe. Leipzig 1880.

DURAND-CLAYE, A. *Vérification de la ftabilité des voûtes et des arcs; application aux voûtes fphériques.* Paris 1880.

UNGEWITTER, G. G. Lehrbuch der gotifchen Konftruktionen. 3. Aufl. von K. MOHRMANN. Leipzig 1892.

GNUSCHKE, H. Die Theorie der gewölbten Bogen etc. Berlin 1892.

AUTHENRIETH, E. Die ftatifche Berechnung der Kuppelgewölbe. Berlin 1894.

TOLKMITT, G. Leitfaden für das Entwerfen und die Berechnung gewölbter Brücken. Berlin 1895.

Siehe auch Theil III, Band 2, Heft 3 (Abth. III, Abfchn. 2, B: Gewölbte Decken) diefes »Handbuches«.

Nachtrag.

Auf S. 5 find nachftehende Werke nachzutragen:

SMITH, H. *Graphics: or the art of calculation by drawing lines, applied to mechanical engineering.* London 1889—91.

BOVEY, H. T. *Theory of ftructures and ftrength of materials.* London 1893.

PILLET, J. *Traité de ftabilité des conftructions etc.* Paris 1895.

VONDERLINN, J. Statik für Bauhandwerker etc. Stuttgart 1896.

Desgl. auf S. 204:

HEHNE, W. Eiferne Träger und Säulen. Hilfsbuch zur ftatifchen Berechnung. Halle 1890.

COUSINS, R. H. *A theoretical and practice treatife on the ftrength of beams and columns.* London 1890.