Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

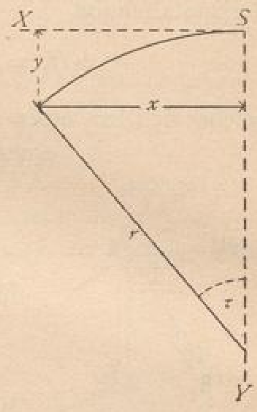
b) Kuppelgewölbe

urn:nbn:de:hbz:466:1-77733

b) Kuppelgewölbe.

287. Voraus-ſetzungen. Die Kuppelfläche entſteht durch Drehung einer krummen Linie um eine lothrechte Axe. In den folgenden Unterſuchungen ſollen die im Inneren des Kuppelgewölbes auftretenden Kräfte unter der Annahme ermittelt werden, daſs die Belaſtung eine ruhende und über die einzelnen zwiſchen den Parallelkreiſen liegenden Ringe ſo vertheilt ſei, daſs ein jeder Ring entweder voll belaſtet oder ganz unbelaſtet iſt. Weiter wird die Kuppelfläche als die Gleichgewichtsfläche angenommen; demnach werden die auf ein beliebiges Kuppeltheilchen wirkenden inneren Kräfte in die betreffenden Berührungsebenen der Kuppelfläche fallen. Daraus ergeben ſich dann die inneren Kräfte oder Spannungen, welche, in der Kuppel wirkend, im Stande ſind, das Gleichgewicht aufrecht zu erhalten.

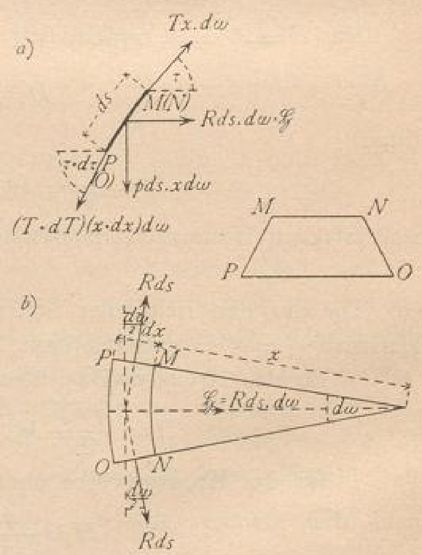
Fig. 405.



288. Allgemeine Gleichgewichts-bedingungen. Der Anfangspunkt der Coordinaten ſoll in den Scheitel der Kuppel (Fig. 405) gelegt und die lothrechte Axe als *Y*-Axe, eine im Scheitel *S* ſenkrecht zu erſterer errichtete Axe als *X*-Axe gewählt werden. Irgend ein Kuppeltheilchen *MNOP* (Fig. 406), welches oben und unten durch Parallelkreiſe, rechts und links durch Meridiane der Kuppel begrenzt iſt, wird auf ſeinen Gleichgewichtszuſtand unterſucht. Das Theilchen *MNOP* iſt in Fig. 406*a* in der Anſicht, in Fig. 406*b* im Grundriſs, daneben im abgewickelten Zuſtande dargeſtellt. Auf *MN* wirkt für die Längeneinheit die Tangentialſpannung *T*, und da *MN* (vergl. den Grundriſs in Fig. 406*b*) $x\,d\omega$ Längeneinheiten enthält, ſo wirkt auf *MN* die Kraft $T x\,d\omega$. Auf *OP* wirkt $(T + dT)(x + dx)\,d\omega$; auf *MP* und *NO* wirken die Ringſpannungen, welche für die Längeneinheit gleich *R* ſeien, alſo auf ds Längeneinheiten die Gröſse $R\,ds$ haben. Auſserdem wirkt noch die veränderliche Belaſtung *p* für die Flächeneinheit der Kuppelfläche, d. h. auf *MNOP* die Laſt $p\,ds\,.\,x\,d\omega$. Um ſämmtliche auf das Theilchen wirkende Kräfte in einer Ebene zu erhalten, ermittelt man die Mittelkraft der beiden Ringſpannungen $R\,ds$; ſie iſt $\mathfrak{H} = 2\,R\,ds \sin \frac{d\omega}{2}$, und, da wegen der Kleinheit von $\frac{d\omega}{2}$ die Gröſse $\sin \frac{d\omega}{2} = \frac{d\omega}{2}$, wird

$$\mathfrak{H} = R\,ds\,d\omega \quad . \; . \; . \quad 421.$$

Fig. 406.



Die Aufſtellung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für *MNOP* ergiebt nun

$$0 = T x\,d\omega \cos \tau - (T + dT)(x + dx)\,d\omega \cos(\tau + d\tau) + R\,ds\,d\omega.$$

Führt man die Multiplication durch und läſſt die unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung fort, ſo bleibt

$$0 = Tx \sin\tau\, d\tau - d\,Tx \cos\tau - T\,dx \cos\tau + R\,ds = -d\,(Tx\cos\tau) + R\,ds;$$

daher

$$R\,ds = d\,(Tx\cos\tau) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 422.$$

Ferner ist

$$0 = p\,ds\,x\,d\omega - Tx\,d\omega \sin\tau + (T + dT)\,(x + dx)\,d\omega \sin(\tau + d\tau);$$

$$\sin(\tau + d\tau) = \sin\tau + \cos\tau\, d\tau.$$

Durch Ausmultipliciren und Fortlassen der unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung erhält man $0 = p\,x\,ds + d\,(Tx\sin\tau)$; daher

$$-p\,x\,ds = d\,(Tx\sin\tau) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 423.$$

Die beiden Gleichungen 422 u. 423 geben Aufschlufs über die Gröfse der gleichzeitigen Werthe von T und R, welche irgend welchen Belastungen und Gleichgewichtsflächen entsprechen.

Die erzeugende Linie ist bei der Kugelkuppel ein Kreis. Die bezüglichen Werthe von T und R werden also erhalten, wenn in die Gleichungen 422 u. 423 für x und ds die Werthe eingeführt werden, welche dem Kreise entsprechen. Nach Fig. 405 ist $x = r\sin\tau$ und $ds = r\,d\tau$; mithin, wenn noch die Annahme gemacht wird, dafs p für die ganze Kuppel constant ist, 289. Kugelförmige Kuppel.

$$-pr\sin\tau\,.\,r\,d\tau = d\,(Tr\sin\tau\sin\tau) \quad \text{und} \quad \int_{\tau_0}^{\tau} d\,(Tr\sin^2\tau) = -p\,r^2\int_{\tau_0}^{\tau}\sin\tau\,d\tau.$$

Als untere Grenze ist der Werth τ_0 von τ einzuführen, welcher dem oberen Endpunkte der Erzeugenden entspricht; hier ist dieser Endpunkt S, und es wird $\tau_0 = 0$; demnach ist

$$Tr\sin^2\tau = +p\,r^2\Big(\cos\tau\Big)_0^{\tau} = -p\,r^2\,(1 - \cos\tau),$$

$$T = -\frac{pr\,(1-\cos\tau)}{\sin^2\tau} = -\frac{pr\,(1-\cos\tau)}{1-\cos^2\tau} = -\frac{pr}{1+\cos\tau} \quad \ldots \quad 424.$$

Wird dieser Werth in die Gleichung 422 für R eingesetzt, so erhält man

$$R\,ds = R\,r\,d\tau = d\left(-\frac{pr}{1+\cos\tau}\,r\sin\tau\cos\tau\right) = -p\,r^2\,d\,\frac{\sin\tau\cos\tau}{1+\cos\tau},$$

$$R = -pr\,\frac{\cos 2\tau + \cos^3\tau}{(1+\cos\tau)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 425.$$

Die Werthe der Gleichungen 424 u. 425 gelten für oben geschlossene Kugelkuppeln. Die Spannungen im Scheitel werden für $\tau = 0$ erhalten. Für letzteren Werth ist

$$T_0 = -\frac{pr}{2} \quad \text{und} \quad R_0 = -\frac{pr}{2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 426.$$

d. h. die Meridianspannungen und Ringspannungen sind für die Längeneinheit im Scheitel gleich grofs; daselbst findet somit nach allen Richtungen ein gleicher Druck $\frac{pr}{2}$ für die Längeneinheit statt.

Für die Halbkugelkuppel ist am Aequator $\tau = \frac{\pi}{2}$, daher 290. Halbkugelkuppel.

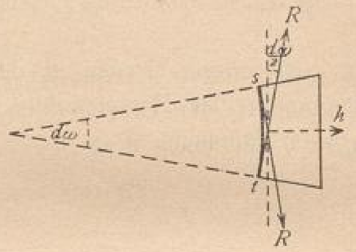
$$T_{\frac{\pi}{2}} = -pr \quad \text{und} \quad R_{\frac{\pi}{2}} = +pr \quad \ldots \ldots \ldots \quad 427.$$

Die Meridianſpannung nimmt alſo vom Scheitel nach dem Aequator von $\frac{p\,r}{2}$ bis auf $p\,r$ zu, bleibt aber ſtets Druck, da $1 + \cos\tau$ nie negativ werden kann. Am Aequator iſt T lothrecht gerichtet, da T gleiche Richtung mit der Tangente an die Erzeugende hat. Die Summe aller $T_{\frac{\pi}{2}}$ iſt gleich dem Gewichte der ganzen Kuppel, da die $T_{\frac{\pi}{2}}$ die Auflagerdrücke darſtellen. Es iſt $\Sigma\left(T_{\frac{\pi}{2}}\right) = p\,r \,.\, 2\,r\,\pi = 2\,p\,r^2\,\pi$, und das ganze Kuppelgewicht iſt gleich $\frac{4\,r^2\pi}{2}\,p = 2\,r^2 p\,\pi$. Die Ringſpannung R geht vom Druck $\frac{p\,r}{2}$ im Scheitel zum Zug $p\,r$ am Aequator über, demnach für irgend einen näher zu beſtimmenden Winkel durch Null. Iſt dieſer Winkel τ_1, ſo iſt $0 = p\,r\,\frac{\cos 2\,\tau_1 + \cos^3\tau_1}{(1 + \cos\tau_1)^2}$, woraus ſich ergiebt

$$\cos\tau_1 = 0{,}618 \quad \text{und} \quad \tau_1 = 51^0\,50' \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad 428.$$

In allen Ringen, deren zugehörige Winkel τ kleiner als τ_1 ſind, findet Druck, in den Ringen, deren Winkel gröſser ſind als τ_1, findet Zug ſtatt. Nimmt man auf die Zugfeſtigkeit des Mörtels keine Rückſicht, ſo können die einzelnen Theile eines Ringes keinen Zug auf einander ausüben. Ohne ſolchen kann aber bei den letzteren Ringen Gleichgewicht nicht ſtattfinden; ohne Hilfsconſtruction iſt daher das Gleichgewicht nicht vorhanden. Solche Hilfsconſtructionen ſind entweder umgelegte eiſerne Ringe oder die Hintermauerung. Letztere leiſtet die auf den Kuppelring wirkenden Ringkräfte R; auf dieſelbe wirken ſonach nach dem Princip von Wirkung und Gegenwirkung die Kräfte R in entgegengeſetztem Sinne; dieſelben ſind bei Berechnung der Hintermauerung zu berückſichtigen. Betrachtet man ein Bogenſtück $s\,t$ (Fig. 407), welches zum Winkel $d\,\omega$ gehört, ſo iſt die Mittelkraft der beiden R die nach auſsen gerichtete Kraft h gleich $2\,R \sin\frac{d\,\omega}{2} = R\,d\,\omega$.

Fig. 407.



Wir führen die abkürzende Bezeichnung

$$\mu = -\frac{\cos 2\,\tau + \cos^3\tau}{(1 + \cos\tau)^2} \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad 429.$$

ein; alsdann wird

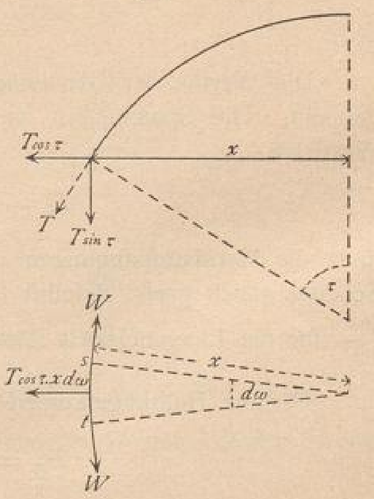
$$R = \mu\,p\,r \quad \text{und} \quad h = \mu\,p\,r\,d\,\omega \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad 430.$$

Für die Längeneinheit des $x\,d\,\omega$ langen Bogens iſt alſo die nach auſsen auf die Hintermauerung wirkende Horizontalkraft in Folge der Ringſpannungen

$$\mathfrak{h} = \frac{\mu\,p\,r\,d\,\omega}{x\,d\,\omega} = \frac{\mu\,p\,r}{x} \,.\;.\;.\;.\;.\qquad 431.$$

Aus Vorſtehendem folgt noch, daſs bei der Halbkugelkuppel die Hintermauerung wenigſtens bis zu derjenigen Höhe hinaufreichen muſs, welche dem Winkel $\tau_1 = 51^0\,50'$ entſpricht.

Fig. 408.



Auſser den Kräften $\mathfrak{h}$ (nach Gleichung 431) wirken auf die Widerlager noch die Meridianſpannungen T, welche dem gröſsten zur Kuppel gehörigen Winkel τ entſprechen. T hat eine wagrechte Seitenkraft $T \cos\tau$ und eine lothrechte Seitenkraft $T \sin\tau$. Die erſtere wird durch die Widerlager oder durch einen eiſernen Ring aufgehoben. Die Spannung in dieſem Ringe ergiebt ſich dann wie folgt. Auf den Bogen $s\,t$ (Fig. 408) von der Länge $x\,d\,\omega$ wirkt nach auſsen $T \cos \tau\, x\, d\, \omega$, und dieſe Kraft ſoll durch die beiden Ringſpannungen W aufgehoben werden; es iſt demnach

$$T \cos \tau\, x\, d\, \omega = 2\, W \sin \frac{d\,\omega}{2} = W\, d\, \omega;$$

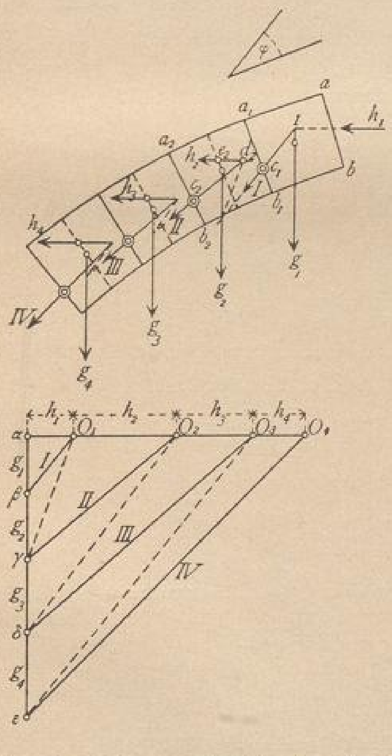
$$W = T\, x \cos \tau = \frac{p\, r\, r \sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau} = \frac{p\, r^2 \sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau} \quad . \quad . \quad . \quad 432.$$

Die vorſtehend entwickelten Werthe für T und R entſprechen einer Gleichgewichtsfläche. Man kann dieſe Werthe als genügend genaue Mittelwerthe annehmen; immerhin ſind aber gröſsere und geringere Werthe denkbar, welche anderen in der Kuppel möglichen Gleichgewichtsflächen entſprechen, die nicht mit der Mittelfläche des Kuppelgewölbes zuſammenfallen.

Die graphiſche Ermittelung der Werthe von T und R an den verſchiedenen Stellen der Kuppel kann nun in ähnlicher Weiſe durchgeführt werden, wie bei den anderen Gewölbearten gezeigt iſt, indem man beſtimmte Bedingungen für die Stützlinie vorſchreibt. Man unterſucht zu dieſem Zwecke den einem Centriwinkel α entſprechenden Kuppeltheil und geht dabei vom Scheitel, bezw. vom Laternenring aus. 291. Graphiſche Ermittelung.

Stellt man die Bedingung, daſs die Stützlinie im inneren Drittel verbleiben ſoll und kein Gleiten ſtattfindet, ſo erhält man eine ſolche, indem man vom oberſten Kuppelringe ausgeht, folgendermaſsen (Fig. 409). Die Belaſtung des oberſten, zum angenommenen Centriwinkel gehörigen Kuppeltheiles ſei g_1 $(= \alpha\beta)$; auſser g_1 wirken auf dieſen Theil noch die beiden Spannungen $R\,ds$, welche von den Nachbartheilen im Ringe ausgeübt werden. Dieſe beiden $R\,ds$ werden genau, wie in Fig. 406, zu einer Mittelkraft vereinigt, welche in derſelben Ebene wie g_1 liegt, d. h. in der Ebene, welche den zum Centriwinkel α gehörigen Kuppeltheil halbirt. Dieſe Mittelkraft iſt in Fig. 409 mit h_1 bezeichnet; h_1 iſt vor der Hand nur der Richtung nach bekannt; Gröſse und Lage von h_1 ſind unbekannt. Die Mittelkraft von h_1 und g_1 ſoll die Fuge $a_1 b_1$ im inneren Drittel ſchneiden und mit der Senkrechten zu dieſer Fuge keinen gröſseren Winkel, als den Reibungswinkel φ einſchlieſsen. Man ziehe nun durch c_1, den unterſten Punkt des inneren Drittels der Fuge $a_1 b_1$, eine Linie, die den Winkel φ mit der Senkrechten zur Fuge einſchlieſst; dieſe Linie ſchneide die Richtungslinie von g_1 in I; alsdann hat die durch I gelegte Kraft h_1 den kleinſten Werth, welcher obigen Bedingungen entſpricht. Rückte nämlich h_1 nach abwärts unter Beibehaltung von c_1, ſo würde h_1 (da ja g_1 denſelben Werth behält) gröſser werden; rückte gleichzeitig c_1 hinauf, ſo würde h_1 erſt recht gröſser. Rückten h_1 und c_1 gleich viel hinauf, ſo bliebe h_1 unverändert, behielte alſo den kleinſten Werth. Alles dies ergiebt ſich ohne Schwierigkeit durch Verzeichnung eines Kraftdreieckes für g_1, h_1 und Kraft I; h_1 kann aber endlich nicht weiter nach oben rücken, wenn nicht auch c_1 nach oben rückt, weil ſonſt der Winkel von I mit der Senkrechten zur Fuge gröſser als φ wird. — Wenn der Schnittpunkt von h_1 mit der Mittellinie des erſten Steines oberhalb des inneren Drittels fiele, ſo wären an dieſer Stelle auch die Ringſpannungen nicht mehr im inneren Drittel; da auch dieſe im Drittel liegen ſollen, ſo würde man h_1 bis zum oberen Endpunkt des inneren Drittels hinabzurücken und den ſich dann ergebenden Schnittpunkt von h_1 und g_1 mit c_1 zu verbinden haben, wobei der Winkel der Mittelkraft I gegen die Fugen-Senkrechte kleiner als φ würde.

Fig. 409.



Auf den zweiten Stein wirken nun I und g_2; aufserdem die Mittelkraft h_2 der Spannungen R im zweiten Ringe. Die Mittelkraft von I und g_2 ift aus dem Kraftpolygon zu entnehmen ($= O_1 \gamma$); fie geht durch den Schnittpunkt der Schnittlinien diefer beiden Kräfte. Die Refultirende diefer Kraft und der Kraft h_2 foll wiederum im inneren Drittel verbleiben; eben fo foll auch der Schnittpunkt von h_2 mit der punktirten Halbirungslinie diefes Steines nicht aus dem Drittel herausfallen. Der kleinfte Werth von h_2, welcher diefen Bedingungen entfpricht, ift derjenige, bei welchem h_2 durch den oberen Grenzpunkt des inneren Drittels der Steinfchwerlinie, d. h. durch e_2, geht, die Gefammtmittelkraft von I, g_2 und h_2 aber die Fuge $a_2 b_2$ im unteren Grenzpunkte c_2 des inneren Drittels fchneidet. Die Verbindungslinie von c_2 mit d_2, dem Schnittpunkte der Mittelkraft von I und g_2 mit h_2 ergiebt die Richtung der Gefammtmittelkraft II; die Gröfse erhält man durch Ziehen einer Linie γO_2 durch γ parallel zur Richtungslinie von II. Der Winkel, welchen II mit der Fugen-Senkrechten zu $a_2 b_2$ einfchliefst, ift kleiner als φ, alfo die Conftruction brauchbar. Wäre der Winkel gröfser als φ, fo wäre h_2 fo weit hinabzurücken und zu vergröfsern, bis der Winkel höchftens gleich φ ift. In diefer Weife erhält man durch Weiterconftruiren eine mögliche Stützlinie, welche auch mit der Wirklichkeit nahezu übereinftimmen dürfte.

Literatur.

Bücher über »Statik der Gewölbe«.

DIETLEIN, J. F. W. Beitrag zur Statik der Kreuzgewölbe. Halle 1823.
TELLKAMPF, H. Beitrag zur Gewölbetheorie. Frei nach CARVALLO. Hannover 1855.
SCHEFFLER, H. Theorie der Gewölbe, Futtermauern etc. Braunfchweig 1857.
FABRE, V. *Théorie des voûtes élaftiques et dilatables d'une application fpéciale aux arcs métalliques.* Paris 1860.
HAGEN, G. Ueber Form und Stärke gewölbter Bogen. Berlin 1863.
HÄNEL, v. Zur Theorie der Tonnengewölbe. Stuttgart 1868.
FONTAINE, H. *Stabilité des conftructions. Extrait de la notice fur la théorie des voûtes.* Befançon 1870.
ORTMANN, O. Die Statik der Gewölbe mit Rückficht auf ihre Anwendung. Halle 1876.
FABIAN, W. Ueber Gewölbstheorien mit befonderer Berückfichtigung auf den Brückenbau. Leipzig 1876.
BONNIN, R. *Étude fur la ftabilité des voûtes en maçonnerie.* Evreux 1876.
PERRODIL. *Réfiftance des voûtes et arcs métalliques.* Paris 1879.
GOBERT, J. B. *Nouvelles recherches fur la théorie des voûtes.* Paris 1879.
FOEPPL, A. Theorie der Gewölbe. Leipzig 1880.
DURAND-CLAYE, A. *Vérification de la ftabilité des voûtes et des arcs; application aux voûtes fphériques.* Paris 1880.
UNGEWITTER, G. G. Lehrbuch der gotifchen Konftruktionen. 3. Aufl. von K. MOHRMANN. Leipzig 1892.
GNUSCHKE, H. Die Theorie der gewölbten Bogen etc. Berlin 1892.
AUTHENRIETH, E. Die ftatifche Berechnung der Kuppelgewölbe. Berlin 1894.
TOLKMITT, G. Leitfaden für das Entwerfen und die Berechnung gewölbter Brücken. Berlin 1895.

Siehe auch Theil III, Band 2, Heft 3 (Abth. III, Abfchn. 2, B: Gewölbte Decken) diefes »Handbuches«.

Nachtrag.

Auf S. 5 find nachftehende Werke nachzutragen:

SMITH, H. *Graphics: or the art of calculation by drawing lines, applied to mechanical engineering.* London 1889—91.
BOVEY, H. T. *Theory of ftructures and ftrength of materials.* London 1893.
PILLET, J. *Traité de ftabilité des conftructions etc.* Paris 1895.
VONDERLINN, J. Statik für Bauhandwerker etc. Stuttgart 1896.

Desgl. auf S. 204:

HEHNE, W. Eiferne Träger und Säulen. Hilfsbuch zur ftatifchen Berechnung. Halle 1890.
COUSINS, R. H. *A theoretical and practice treatife on the ftrength of beams and columns.* London 1890.