Sammlung algebraischer Aufgaben für gewerbliche und technische Lehranstalten

nebst einer Abhandlung über das Stabrechnen

Allgemeine Potenzen und Logarithmen; Gleichungen (2. Teil); Verhältnisse und Proportionen (2. Teil); vollständige quadratische Gleichungen

Burg, Robert

Frankfurt a.M., 1903

XIV. Wiederholung und Erweiterung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78556

XIV. Wiederholung und Erweiterung.

§ 1.

1—8. Verwandle durch Ausmultiplizieren:

1. *a)* $(a+b)(b+c)(c+a)$; *b)* $(n-1)(n+2)(n-3)$.

2. *a)* $(n+1)(n-2)(n+3)-(n-1)(n+2)(n-3)$; *b)* $(a^2+2a)^3$.

3. *a)* $(x-4)^2+(x+3)(x+2)-(x-1)^2$; *b)* $(n^2-n+1)^2$.

4. $(a+b)(b+c)-(a+d)(d+c)+(a+c)(d-b)$.

	a)	*b)*
5.	$(1+2a+3a^2+4a^3)(1-a)$	$(1+a+a^2+a^3+5a^4)(1-a)$
6.	$(1+a+a^2+a^3-5a^4)(1-a)$	$(1+3x+9x^2)(3x-1)$
7.	$(1+2a+3a^2)(1-a)^2$	$(1-2x+3x^2-4x^3)^2$

8. *a)* $(a+b-c)^3$; *b)* $(1+x-x^2)^3$; *c)* $(a-1)^6$.

9—13. Verwandle in die Differenz zweier Quadrate:

	a)	*b)*
9.	$(x+y+3u)(x+y-3u)$	$(a+b+c)(a-b-c)$
10.	$(4a+3b-2c)(2c-4a+3b)$	$(a+b-c-d)(a-b-c+d)$

11. *a)* $(x+17)(x-3)$; *b)* $a(a+2b)$; *c)* $(3a+5b)(a+b)$.

12. *a)* $(13a+7b)(3a-b)$; *b)* $[(u+v)^2+w^2]\cdot[(u-v)^2-w^2]$.

13. $(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

14. Beweise, daß für das rechtwinklige Dreieck $(s-a)(s-b)=s\cdot(s-c)$ ist.

15—23. Verwandle in ein Produkt resp. eine Potenz:

	a)	*b)*
15.	$25x^2+70ux+49u^2$	$(a-b)^2-(c+d)^2$
16.	$c^2-a^2-b^2-2ab$	$c^2-a^2-b^2+2ab$
17.	$a^2(b+c)^2+(a^2-bc)^2$	$(a^2b+b^2c)^2-(a^2c+b^3)^2$

18. *a)* $(u+1)^3+(u+2)^3-(u+3)^3+18$; *b)* $(a+1)^2-100$.

	a)	*b)*
19.	$(a+b)^4-(a^2+b^2)^2$	$(a+b+c)^3+(a+b-c)^3$
20.	$nm(a^2-b^2)+ab(m^2-n^2)$	x^4-81
21.	$80x^2-21x-59$	$15x^3y^5+27x^4y^4-6x^5y^3$

	a)	*b)*	*c)*
22.	a^2-a-2	$1+x-2x^2$	n^3-2n-1
23.	$a^5-a^3+a^2-1$	$1-3x^2+2x^3$	$3n^4-4n^3+1$.

24. Wie groß (F) ist der Inhalt eines Kreisringes, dessen mittlerer Durchmesser d_m und dessen Dicke δ ist?

25—29. Vereinfache:

25. *a)* $(x^2+u^2)(y^2+u^2)-(u^2-xy)^2$; *b)* $(au^2+v^2)(a+1)-(au+v)^2$.

26. $a(a-b-c)+b(b-c-a)+c(c-a-b)+(a+b+c)^2$.

27. $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2-(a-b+c)^2-(b-a+c)^2$.

28. $(a+b+c)(a+b-c)+(b+c-a)(c+a-b)$.

29. $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$. (Aufg. *1a.*)

§ 2.

30. Was versteht man unter: $a > b$ und unter: $a < b$?

31. Wie nennt man die Zahlen, welche < 0 sind?

32. Wie nennt man die positiven Brüche, deren Wert < 1 ist, wie diejenigen, deren Wert > 1 ist?

33. Unter welchen Bedingungen ist das Produkt zweier Größen > 0, < 0 oder $= 0$?

34. Unter welchen Bedingungen ist der Quotient zweier Größen > 0, < 0 oder $= 0$?

35. Verbinde die beiden Größen der nachfolgenden Größenpaare durch das Zeichen $>$ oder $<$:
a) $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$; *b)* $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{6}$; *c)* $4\frac{1}{3}$ und $\frac{30}{7}$;
d) (-1) und (-2); *e)* $(-3)^2$ und 2^2; *f)* $(-3)^3$ und 2^3;
g) $(a+\frac{1}{2})$ und a; *h)* $(-0{,}01)$ und $(-0{,}1)^3$.

36. Wie verändert sich der Wert eines Produktes aus 2 Faktoren, wenn man eine beliebige positive Größe δ zum größeren Faktor addiert und vom kleineren Faktor subtrahiert?

37. Wie verändert sich der Wert eines positiven, echten Bruches, wenn man zum Zähler und Nenner dieselbe positive Größe δ addiert?

38. Was versteht man unter $a : \text{Null}$?

§ 3.

39—42. Berechne:

39. *a)* $(\sqrt{5}+3\sqrt{7})(\sqrt{7}+3\sqrt{5})$; *b)* $(2-\sqrt{11})(\sqrt{11}-7)$.

40. *a)* $(13+5\sqrt{3})^2$; *b)* $(1-\sqrt{2})^2$; *c)* $(4-\sqrt{5})^3$.

41. *a)* $\sqrt{8-3\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}$; *b)* $\sqrt{6-\sqrt{30}}\cdot\sqrt{5+\sqrt{30}}$.

42. *a)* $\left(\sqrt{11}+\sqrt{13-2\sqrt{11}}\right)^2$; *b)* $\left(\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2$.

43—44. Vereinige unter einem Wurzelzeichen:

43. *a)* $13+\sqrt{7}$; *b)* $\sqrt{5}-2$; *c)* $\sqrt{6}-\sqrt{2}$; *d)* $3\sqrt{5}+5\sqrt{3}$.

44. *a)* $\sqrt{u+v}-\sqrt{u-v}$; *b)* $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

45—46. Berechne:

45. *a)* $\sqrt{3+2\sqrt{5}}\;(2+\sqrt{5})$; *b)* $\sqrt{7-2\sqrt{6}}\,(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

46. $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+1)\sqrt{12-8\sqrt{2}-6\sqrt{3}+4\sqrt{6}}$.

47—50. Verwandle, so daß der Divisor wurzelfrei wird:

47. *a)* $\sqrt{\frac{1}{a^3}}$; *b)* $\sqrt[3]{\frac{1}{18}}$; *c)* $\frac{\sqrt{a}}{b+c\sqrt{a}}$; *d)* $\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}$.

48. *a)* $\frac{10\sqrt{3}-3\sqrt{10}}{\sqrt{15}}$; *b)* $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; *c)* $\frac{2(a-d)\sqrt{bc}+(4c-b)\sqrt{ad}}{\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}}$.

49. *a)* $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{3-\sqrt{5}}$; *b)* $\frac{17\sqrt{5}+15\sqrt{6}}{4+\sqrt{5}-\sqrt{6}}$; *c)* $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

50. *a)* $\frac{5-\sqrt{7}}{3+\sqrt{5+\sqrt{7}}}$; *b)* $\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{5}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$; *c)* $\frac{12\sqrt{11}}{\sqrt{22}+3\sqrt{2}+2\sqrt{10}}$.

51—53. Vereinfache resp. berechne:

51. *a)* $(\sqrt{a})^5+2b(\sqrt{a})^3+\sqrt{ab^4}$; *b)* $\sqrt[3]{(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)^2}$.

52. *a)* $(\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{108})\cdot\sqrt[3]{2}$; *b)* $\sqrt[5]{25a^2}\cdot\sqrt[5]{125a}\cdot\sqrt[5]{32a^2}$.

53. *a)* $\sqrt[4]{9}$; *b)* $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$; *c)* $\sqrt[4]{4000}:\sqrt[4]{250}$; *d)* $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3}$.

54. Beweise, daß $\sqrt[2]{a^2}$ nicht nur $=+a$, sondern auch $=-a$ ist.

55. Gib die beiden Werte an für:
a) $\sqrt{25}$; *b)* $\sqrt{0{,}04}$; *c)* $\sqrt{a^2-2ab+b^2}$; *d)* $\sqrt{u^2+2uv+v^2}$;
e) $7+\sqrt{121}$; *f)* $15-\sqrt{34{,}81}$; *g)* $2a-\sqrt{a^2+4ab+4b^2}$.

56. Wie bezeichnet man gewöhnlich den negativen Wert von $\sqrt{x}$?

57—59. Berechne mit Hilfe der Tabelle:

57. *a)* $4\pm\sqrt{3}$; *b)* $(6\pm\sqrt{7})\,(1\pm\sqrt{7})$; *c)* $(8\pm\sqrt{10})^2$.

58. *a)* $(5 \pm 3\sqrt{2})(7 \mp 2\sqrt{2})$; *b)* $(4 \pm \sqrt{11})(4 \mp \sqrt{11})$.

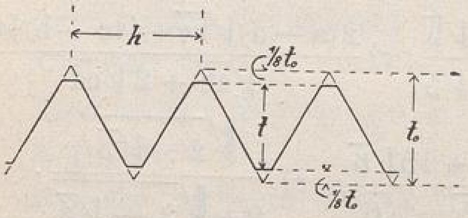
59. *a)* $7 \pm 3\sqrt{5} \mp 5\sqrt{3}$; *b)* $(1 \pm \sqrt{2})^3$; *c)* $(5 \mp 2\sqrt{3})^3$.

§ 4.

60. An einen Kreis vom Radius r sind 2 Tangenten gezogen, die miteinander einen Winkel von 45° bilden. Wie groß ist die Tangentenlänge? Anl. Verlängere den Berührungsradius einer Tangente bis zum Schnitt mit der anderen Tangente.

61. In einem Würfel von der Kantenlänge a sind zwei gegenüberliegende Eckpunkte verbunden. Wie groß ist diese Verbindungslinie?

62. Bei dem amerikanischen Gewindesystem (Sellers) ist der Schnitt des Gewindes ein gleichseitiges Dreieck, dessen Höhe beiderseits um ein Achtel vermindert ist. Wie groß ist die Gewindetiefe t, wenn die Ganghöhe h ist?



63. Die Seite des in einen Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Siebenecks ist annähernd gleich der Hälfte der Seite des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks. Wie groß ist hiernach näherungsweise der Umfang des Siebenecks, wenn der Kreisradius r ist?

64. Wie groß (F) ist der Inhalt eines Rhombus', dessen eine Diagonale gleich der Rhombusseite a ist?

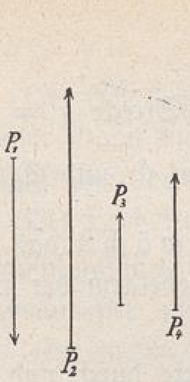
65. In einem rechtwinkligen Dreieck ist $\sphericalangle \alpha = 30^0$ und die Kathete a gegeben. Wie groß ist die Hypotenuse c und die Kathete b?

66. Wie groß muß die Seite eines gleichseitigen Dreiecks sein, dessen Höhe h sein soll?

§ 5.

67. An fünf aufeinander folgenden Wintertagen beobachtet man an einem Orte die mittleren Temperaturen $t_1 = +1{,}5^0$ C, $t_2 = +0{,}5^0$ C, $t_3 = -1{,}7^0$ C, $t_4 = -6{,}7^0$ C und $t_5 = +0{,}4^0$ C. Wie groß (t_m) ist die mittlere Temperatur dieses fünftägigen Zeitraumes?

68. Wie nennt man eine Summe von Größen, für welche man positive und negative Zählung festgesetzt hat?

69. 

Nach unten wirkende Vertikalkräfte werden positiv, nach oben wirkende negativ gezählt. Wie groß sind die nebenstehend im Kräftemaßstab: 10 *kg* = 1 *mm* gezeichneten Kräfte und wie groß ist ihre resultierende Kraft R?

70. Zeichne die Vertikalkräfte $P_1 = +470$ *kg*, $P_2 = -30$ *kg*, $P_3 = -750$ *kg* und $P_4 = +120$ *kg* im Kräftemaßstab: 10 *kg* = 1 *mm* und berechne ihre resultierende Kraft R.
a) $P_1 = -90$ *kg*; $P_2 = -330$ *kg*; $P_3 = +280$ *kg*; $P_4 = +40$ *kg*.

71. Rechtsdrehende Momente werden positiv, linksdrehende negativ gezählt. In welchem Drehungssinn bewegt sich der Uhrzeiger? In welchem Drehungssinn wird eine gewöhnliche Schraube beim Einschrauben, in welchem Drehungssinn beim Losschrauben gedreht?

72. An einem drehbaren Körper wirken die Momente $M_1 = +583$ *kgcm*, $M_2 = -936$ *kgcm* und $M_3 = +498$ *kgcm*. Wie groß ist ihr resultierendes Moment M?
a) $M_1 = -7693$ *kgcm*; $M_2 = +5877$ *kgcm*; $M_3 = +18{,}16$ *kgm*.
b) $M_1 = +5803$ *kgcm*; $M_2 = -892{,}2$ *kgdm*; $M_3 = +20{,}56$ *kgm*.

73. Wie muß man den Hebelarm a einer Vertikalkraft P zählen, welche
$\left.\begin{array}{l} a)\ \text{rechts} \\ b)\ \text{links} \end{array}\right\}$ vom Drehpunkt wirkt, damit die Gleichung $M = P \cdot a$
auch mit Rücksicht auf das Vorzeichen gilt?

74. An einem drehbaren Körper wirken 4 Vertikalkräfte: $P_1 = +820$ *kg* am Hebelarm $a_1 = -18$ *cm*, $P_2 = -735$ *kg* am Hebelarm $a_2 = -12$ *cm*, $P_3 = +815$ *kg* am Hebelarm $a_3 = +16$ *cm* und $P_4 = -500$ *kg* am Hebelarm $a_4 = +19$ *cm*. Wie groß sind die einzelnen Momente M_1, M_2, M_3 und M_4? Wie groß ist das resultierende Moment M? (Zeichnung!)

75. Wie groß ist in der vorigen Aufgabe die resultierende Kraft R und an welchem Hebelarm (x) muß dieselbe wirken (um dasselbe Moment hervorzubringen wie die gegebenen Kräfte zusammen)?

76. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit mehrere Vertikalkräfte sich im Gleichgewicht halten?

77. In Aufg. *74* wird der Drehpunkt um die Strecke v = 14 *cm* nach *a)* links, *b)* rechts verschoben; um wieviel (δ_1, δ_2, δ_3 und δ_4) wachsen die einzelnen Momente? Um wieviel (δ) wächst das resultierende Moment? Um wieviel (w) wächst der Hebelarm der resultierenden Kraft?

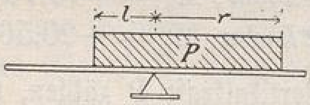
78. Führe die vorige Aufgabe ohne Zahlenwerte durch und beweise den Satz: „Um für mehrere Vertikalkräfte die Lage der resultierenden Kraft R zu finden, ist es gleichgiltig, wo man den Drehpunkt annimmt."

79. Was versteht man unter dem Schwerpunkt S *a)* eines Linienzuges; *b)* einer Fläche?

80. Wo liegt der Schwerpunkt S *a)* einer Strecke; *b)* eines Rechtecks; *c)* eines Kreises; *d)* einer Ellipse; *e)* eines I Profils; *f)* eines Parallelogrammes; *g)* eines Dreiecks?

81. Auf der einen Seite eines Hebels liegt eine gleichmäßig verteilte Last P. Wie findet man das Drehmoment derselben?

82. Auf einem Hebel liegt eine gleichmäßig verteilte Last P, welche links vom Drehpunkt die Strecke l und rechts vom Drehpunkt die Strecke r bedeckt. Beweise, daß man das richtige Moment erhält, wenn man die ganze Last P in ihrem Mittelpunkt vereinigt denkt. (Aufg. *81.*)



§ 6.

83. Wie groß (E) ist der Effekt einer Kraft, welche in t = 13 *Sek.* die Arbeit A = 2925 *kgm* leistet? Anl. E = A : t.

84. Ein Arbeiter dreht die 35 *cm* lange Kurbel einer Seiltrommel mit einem mittleren Kraftaufwand von 15 *kg* 12 mal pro *Min.* herum. Wie groß (E) ist sein Effekt?

85. Wie groß (E) ist der Effekt einer Kraft P, welche einen Körper mit der Geschwindigkeit c gleichförmig bewegt?

86. Wieviel (N) Pferdestärken hat eine Maschine, welche pro *Min.* 13 500 *kgm* Arbeit leistet?
Anl. 1 Pferdestärke (1 P. S. oder 1 HP.) = 75 *kgm* pro *Sek.*

87. Wieviel (N) Pferdestärken braucht eine Lokomotive, um sich auf horizontaler Bahn mit der Geschwindigkeit $c = 80\ km$ pro Stunde gleichmäßig fortzubewegen, wenn Reibung und Luftwiderstand zusammen $630\ kg$ betragen?

88. Eine Dampfmaschine hat $h = 0,95\ m$ Kolbenhub, $d = 500\ mm$ Kolbendurchmesser und bei einem (mittleren) Dampfüberdruck von $p = 3\ Atm.$ $n = 55$ Umdrehungen der Kurbel pro *Min.* Wieviel (N) indizierte Pferdestärken hat die Maschine?

89. Wie groß (f) ist der Reibungskoeffizient, wenn der Normaldruck $N = 50\ kg$ die Reibung $\varrho = 10\ kg$ hervorruft? Anl. $f = \varrho : N$.

90. Um einen Sandsteinwürfel von $a = 0,5\ m$ Kantenlänge auf harter Erde horizontal fortzuschieben, ist eine Kraft $P = 165\ kg$ erforderlich. Wie groß (f) ist der Reibungskoeffizient für Sandstein auf harter Erde? ($s = 2,4\ kg$ pro *cdm.*)

91. Die Geschwindigkeit einer Bewegung nimmt in $t = 15\ Sek.$ gleichmäßig um $\delta = \frac{36\ m}{Sek.}$ zu. Wie groß ist die Beschleunigung p?

Anl. $p = \frac{\delta}{t}$, gewöhnlich in $\frac{m}{Sek.^2}$.

92. Eine Lokomotive steigert ihre Geschwindigkeit in $t = 20\ Sek.$ von $c = 8\ m$ pro *Sek.* auf $v = 12\ m$ pro *Sek.* Wie groß ist ihre Beschleunigung p?

93. Ein frei fallender Körper erlangt in $t = 5\ Sek.$ die Geschwindigkeit $v = 49,05\ m$ pro *Sek.* Wie groß ist hiernach die Beschleunigung g beim freien Fall?

94. Eine Anzahl Güterwagen werden bei der Geschwindigkeit $c = 6\ m$ pro *Sek.* sich selbst überlassen und rollen auf horizontaler Bahn noch $2^1/_2$ *Min.* Wie groß ist die Verzögerung p?

95. Wie groß ist in Aufg. *92, 93* und *94* die mittlere Geschwindigkeit (v_m) und wie groß (s) ist der zurückgelegte Weg nach der Gleichung: $s = v_m \cdot t$?

96. In einem Zimmer befindet sich ein Thermometer mit Celsius- und Réaumur-Skala. Wie kann man aus beiden Ablesungen am einfachsten die betreffende Temperatur nach Fahrenheit berechnen?

97. $50\ l$ Wasser sollen von $0^0\ C$ auf $1^0\ C$ erwärmt werden. Welche Wärmemenge (W) ist hierzu erforderlich?

98. 4,5 *kg* Alkohol sollen um $\triangle = 10$ Celsiusgrade erwärmt werden. Welche Wärmemenge (W) ist hierzu erforderlich, wenn die spezifische Wärme des Alkohols $c = 0{,}7$ *Kal.* ist?

99. Welche Wärmemenge (W) wird von 500 g Asche bei der Abkühlung von 270° C auf 15° C abgegeben? ($c = 0{,}2$ *Kal.*)

100. Eine Glasflasche von 230 *g* Gewicht ist mit 4,2 *kg* Quecksilber gefüllt und soll mit ihrem Inhalt von —11° C auf +31° C erwärmt werden. Welche Wärmemenge (W) ist hierzu erforderlich? (c_1 für Glas $= 0{,}19$ *Kal.*, c_2 für Quecksilber $= 0{,}033$ *Kal.*)

101. Welche Wärmemenge (W) ist erforderlich, um 4 *kg* Zinn bei der Schmelztemperatur (228° C) zu schmelzen, wenn die Schmelzwärme des Zinnes $r = 14{,}25$ *Kal.* ist?

102. Welche Wärmemenge (W) ist erforderlich, um 400 *g* Alkohol bei der Siedetemperatur (78,3° C) zu verdampfen, wenn die Verdampfungswärme des Alkohols $r = 245$ *Kal.* ist?

XV. Allgemeine Potenzen und dekadische Logarithmen.

§ 1.

1. Welche Form erhält die rechte Seite der Formel:

$$\text{P.V.)}\ a^n : a^m = a^{(n-m)},$$

a) wenn $m = n-1$, *b)* wenn $m = n$, *c)* wenn $m = n + k$ ist?

2. Welche Bedeutung muß man den nachfolgenden Ausdrücken geben: *a)* a^1; *b)* a^0; *c)* a^{-1}; *d)* a^{-2}; *e)* a^{-k}?

3. Verwandle in eine Multiplikationsaufgabe unter Benutzung der neu eingeführten Potenzen:

a) $\frac{1}{a}$; *b)* $\frac{a^4}{b^5}$; *c)* $\frac{51a^2b}{c^4d}$; *d)* $\frac{2}{a+x}$; *e)* $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$.