Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

Kapitel I. Das Newtonsche Anziehungsgesetz.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Kapitel I.

Das Newtonsche Anziehungsgesetz.

1) Die von der Erde auf den Mond ausgeübte Anziehung.

Die Lehre vom Potential hat ihren Ausgangspunkt nicht in der Technik, sondern in der kosmischen Physik gefunden. Newton war es, der vor mehr als 200 Jahren die Vermutung aussprach, die Centripetalkraft, die z. B. den Mond an die Erde fesselt, sei im Grunde dieselbe Kraft, die jeden aufgehobenen Stein zur Erde niederzieht und die wir als Schwerkraft bezeichnen; nur sei die Wirkung in groſser Entfernung weit schwächer als an der Erdoberfläche. Er berechnete die jener Centripetalkraft entsprechende Beschleunigung g_1 und fand, daſs sie etwa der 3600. Teil der Fallbeschleunigung $g = 9{,}81$ m an der Erdoberfläche sei. Da aber der Mond nach trigonometrischen Messungen, die gleichzeitig von zwei Stellen der Erdoberfläche aus vorgenommen werden können, etwa 60 mal soweit vom Erdmittelpunkt entfernt ist wie ein auf der Erdoberfläche befindlicher Stein, so vermutete Newton, jene anziehende Kraft sei umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung.

In der wirklichen Berechnung ergiebt sich dies folgendermaſsen. Man betrachte die Bewegung des Mondes um die Erde als eine Kreisbewegung; dann ist die Centripetalkraft $p = mg_1 = \frac{4\,m r_1 \pi^2}{t^2}$, wo r_1 der Radius der Bahn, t die Umlaufszeit, m die Masse des Mondes ist. Daraus folgt als Centripetalbeschleunigung $g_1 = \frac{4\,r_1 \pi^2}{t^2}$. Setzt man $60\,r$ für r_1 ein, wo r den Erdradius bedeutet, und setzt man die Umlaufszeit des Mondes gleich 27 Tg. 7 St. 43 Min. oder 2 360 580 Sek., so wird $g_1 = \frac{4 \cdot 60\,r \cdot \pi^2}{2\,360\,580^2} = \frac{2\,r\pi \cdot 120\,\pi}{2\,360\,580^2}$. Setzt man ferner den Erdumfang $2\,r\pi$ abgerundet gleich 40 000000 m, was der ursprünglichen Definition des Meters entspricht, so ergiebt sich als Centripetalbeschleunigung $g_1 = 0{,}00276$ m, also etwas mehr als $\frac{1}{4}$ cm. Jetzt folgt:

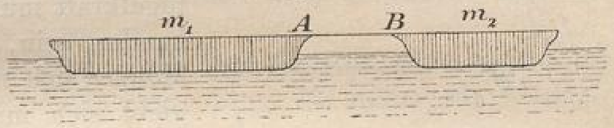
$$\frac{g}{g_1} = \frac{9{,}81}{0{,}00276} = \text{rd. } 3555.$$

Dafs nicht genau 3600 erhalten wird, hat seinen Grund in der Annahme der abgerundeten Zahlen 60 und 40000000. Auch müfste 9,81 um den Betrag vergröfsert werden, um den g infolge der Erddrehung vermindert worden ist. Der Näherungswert reicht aber für unsere Zwecke aus. (Will man genauer rechnen, so addiere man zu dem Äquatorialwerte $g = 9{,}780$ den durch die Centrifugalkraft verloren gegangenen Anteil 0,033, was 9,813 giebt und nehme z. B. das arithmetische Mittel zwischen diesem Werte und dem Polarwerte 9,831, was auf 9,822 führt.) Nimmt man umgekehrt das Newtonsche Gesetz als richtig an, so ergiebt sich die Mondentfernung aus $\frac{g}{g_1} = \frac{(x\varrho)^2}{\varrho^2}$ oder $\frac{g}{x^2} = \frac{4\pi^2 x\varrho}{t^2}$ als $x = \sqrt[3]{\frac{gt^2}{4\pi^2\varrho}} = 60{,}144$ Erdradien, denn hier bedeutet $1 : x$ das Verhältnis der Entfernungen.

2) Das Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung.

Newton stellte ferner das Gesetz von der Gleichheit der Wirkung und der Gegenwirkung auf, das uns als etwas Selbstverständliches erscheint, damals aber bei manchen Gelehrten auf Widerspruch stiefs.

Fig. 1.



Er behauptete also: Die Erde wird vom Monde mit derselben Kraft angezogen wie der Mond von der Erde.

Zur Erläuterung dieser Annahme diene folgendes Beispiel: Zwei Schiffe von den Massen m_1 und m_2, Fig. 1, seien durch ein Tau AB miteinander verbunden, dieses Tau aber werde auf irgend eine Weise angespannt, sei es, dafs bei A oder bei B oder gleichzeitig bei A und B gezogen wird, was ganz gleichgültig ist. Ist nun p die spannende Kraft, so setzen sich beide Schiffe in Bewegung, das eine gemäfs der Formel $p = m_1 g_1$, das andere gemäfs der Gleichung $p = m_2 g_2$, sobald nur vom Widerstande des Wassers und der Luft abgesehen wird. Daraus aber folgt: $m_1 g_1 = m_2 g_2$ und $m_1 : m_2 = g_2 : g_1$, d. h. die Beschleunigungen verhalten sich umgekehrt wie die Massen der Schiffe.

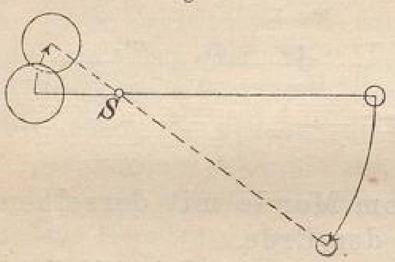
Man kann nun die spannende Kraft durch irgend eine andere ersetzen; man denke sich z. B. bei A den Nordpol eines starkwirkenden Magnetstabes, bei B den Südpol eines anderen Magneten. Auch dabei ist die Anziehung eine **gegenseitige**, d. h. es wird wiederum für jede Stellung $m_1 g_1 = m_2 g_2$ oder $p_1 = p_2$. Eine ähnliche gegenseitige Anziehung nimmt **Newton**, ohne ihr Wesen weiter zu erklären*), auch bei dem Monde und der Erde an. Würden also beide zunächst stillgestellt, so würden sie sich einander entgegen bewegen, und zwar würde der Mond mit der oben berechneten Beschleunigung von etwa $\frac{1}{4}$ cm beginnen, die Erde aber, deren Masse nach unten anzugebender Berechnung etwa 81 mal so grofs ist wie die des Mondes, mit dem 81. Teile dieser Beschleunigung. Schliefslich würden sie sich in dem Punkte treffen, der den ursprünglichen Abstand im Verhältnis 1 : 81 teilt, d. h. (wenn man beide Körper als Punkte betrachtet, so dafs die Mittelpunkte einander unendlich nahe rücken können) in dem gemeinschaftlichen Schwerpunkte, der während der ganzen Bewegung seine Lage nicht ändern würde.

Hierin lag der erste Keim zu dem später entwickelten **Schwerpunktsprinzip** der Mechanik.

3) **Mond und Erde umkreisen den gemeinschaftlichen Schwerpunkt.**

Nach dem Gesagten wird der Mond durch die Centripetalkraft an die Erde gefesselt, jedoch durch eine ebenso grofse Centrifugalkraft gehindert, sich ihr zu nähern. Eine ebenso starke Centripetal- und Centrifugalkraft mufs auch bei der Erde vorhanden sein, wenn ihr Abstand vom Monde sich nicht ändern soll. So ergiebt sich mit Notwendigkeit die Annahme, dafs beide Körper um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt kreisen, Fig. 2.

Fig. 2.



Dabei wirken, wenn r_1 und r_2 die Abstände von diesem sind, die entgegengesetzt gerichteten Centrifugalkräfte $m_1 r_1 \vartheta^2$ und $m_2 r_2 \vartheta^2$, wo ϑ die gemeinschaftliche Winkelgeschwindigkeit ist. Beide sind gleich, denn es ist $m_1 = 81\, m_2$, $r_1 = \frac{1}{81} r_2$, also $m_1 r_1 = 81\, m_2 \cdot \frac{1}{81} r_2 = m_2 r_2$. Ebenso grofs wie die Centrifugalkräfte sind die wirkenden Centripetalkräfte.

In dieser neuen Auffassung lag der Keim zu der von **Newton** angebahnten Himmelsmechanik, die durch **Laplace** und **Gaufs** erfolgreich ausgebaut wurde, obwohl z. B. das Problem der drei Körper

*) Die neuere Physik ersetzt die Fernwirkungen durch vermittelnde Aktionen der Ätherteilchen aufeinander, die wie elektrische und optische Ätherschwingungen mit grofser Geschwindigkeit den Weltraum durcheilen.

noch heute die Kräfte der Analysis übersteigt und mit Hilfe der Störungstheorie nur Näherungslösungen gefunden hat. Dafs in Wahrheit beide Körper sich (von den Störungen abgesehen) nicht in Kreisen, sondern in ähnlichen Ellipsen um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt bewegen, der dabei in je einem der Brennpunkte der Ellipsen liegt, sei beiläufig bemerkt. Die Bahnen könnten ebenso gut Parabeln oder Hyperbeln sein, also Kegelschnitte überhaupt. Darin hat man das Gesetz für die Bewegung der Doppelsterne.

4) Formulierung des Newtonschen Gesetzes.

Aus der Erfahrung wufste man von jeher, dafs ein Stein von doppelter Masse das doppelte Gewicht eines solchen von einfacher Masse hat, und so drängte sich Newton die Annahme auf, dafs die gegenseitigen Anziehungen den Massen der Körper proportional sein müfsten. Oben war aber schon gezeigt, dafs sie umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung seien, demnach konnte die Anziehung oder Gravitation nur in der Form $\frac{m_1 m_2}{r^2}$ oder in der Form $k\frac{m_1 m_2}{r^2}$ dargestellt werden, wo k irgend eine konstante Gröfse ist.

Das Newtonsche Anziehungsgesetz sagt demnach folgendes aus:

Je zwei Weltkörper ziehen sich gegenseitig an mit einer Kraft $p = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$, die also proportional dem Produkte ihrer Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes ihrer Mittelpunkte ist.

Die Annahme, dafs bei Kugeln die Mittelpunkte mafsgebend seien, war zunächst nur eine instinktive Vermutung, die später von Newton durch eine interessante Berechnung als richtig nachgewiesen wurde. Unten wird sie in vereinfachter Form ausgeführt werden.

Die Bedeutung der Konstante k ergiebt sich aus folgendem: Ist sowohl m_1 als auch m_2 gleich der Masseneinheit und r gleich der Längeneinheit, so ist die Anziehung $p = k\frac{1 \cdot 1}{1^2} = k$. Demnach ist k diejenige Anziehung, die zwei irgendwie gewählte Masseneinheiten in einem Abstande, der gleich der irgendwie gewählten Längeneinheit ist, aufeinander ausüben. Selbstverständlich kann man die Wahl der Masseneinheit so treffen, dafs $k = 1$ wird; auch kann man k zunächst willkürlich gleich 1 setzen. Davon soll bisweilen Gebrauch gemacht werden, weil es sich dann um die einfachere Form $p = \frac{m_1 m_2}{r^2}$ handelt. Die Gröfse von k soll unten bestimmt werden. Zu ihrer Kenntnis ist die der mittleren Dichte des Erdkörpers nötig.

Ist nämlich m_1 die Masse des Erdkörpers, m_2 die eines Steines, so ist an der Erdoberfläche nach dem Newtonschen Gesetze die Anziehung

$$p = k \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

zugleich nach der Definition der Schwerkraft

$$p = m_2 g.$$

Da die linken Seiten gleich sind, sind auch die rechten gleich, also ist

$$k \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_2 g$$

oder

$$k = \frac{r^2 g}{m_1},$$

wo g die mittlere Schwerebeschleunigung 9,822, r der Erdradius, m_1 die Erdmasse ist. Vorläufig folgt daraus die Beziehung

$$g = k \frac{m_1}{r^2}.$$

Diese giebt zunächst die Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche an, wenn m_1 die Erdmasse, r die Entfernung des Steines vom Mittelpunkte der Erde ist; sie gilt aber auch für die Centripetalbeschleunigung des von der Erde angezogenen Mondes, sobald nur r die Entfernung desselben vom Erdmittelpunkte bedeutet.

Setzt man für m_1 die Sonnenmasse, so gilt die Gleichung für die Centripetalbeschleunigung, welche einen Planeten abhält, sich von der Sonne zu entfernen.

5) Eins der Kepplerschen Gesetze. Das hier zu sagende gilt zunächst für Kreisbahnen. Die Anziehung der Sonne gebe einem Planeten die Centripetalbeschleunigung

$$g_1 = \frac{mk}{r_1^2} = \frac{4 r_1 \pi^2}{t_1^2},$$

einem andern

$$g_2 = \frac{mk}{r_2^2} = \frac{4 r_2 \pi^2}{t_2^2}$$

dann folgt durch Division

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_1}{r_2} \frac{t_2^2}{t_1^2}$$

oder

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}.$$

Folglich: Die Quadrate der Umlaufszeiten beider Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der Entfernung.

Ist z. B. m_1 doppelt so weit von der Sonne entfernt, wie m_2, und ist t_1, die Umlaufszeit von m_1, gleich einem Jahre, so ist

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8},$$

folglich $t_2 = t_1\sqrt{8} = \sqrt{8}$ Jahre $= \sim 2{,}83$ Jahre.

Aus der Entfernung erhält man so die Umlaufszeit, aus der Umlaufszeit die Entfernung. Die erstere ergiebt sich durch Beobachtung, die letztere durch Rechnung.

6) Massenverhältnisse der Weltkörper.

Man kann dieselbe Methode benutzen, die Verhältnisse der Massen zu ermitteln, indem man einen der Sonne gehorchenden Planeten und einen zum letzteren gehörigen Trabanten (Mond) betrachtet.

Die Anziehung der Erde auf den Mond giebt als Beschleunigung

$$\frac{4\,r\pi^2}{t^2} = k\frac{m}{r^2},$$

die von der Sonne auf die Erde ausgeübte Anziehung giebt als Beschleunigung

$$\frac{4\,R\pi^2}{t_1^2} = k\frac{M}{R^2},$$

wo R die Entfernung der Erde von der Sonne, t_1 ihre Umlaufszeit, M die unbekannte Masse der Sonne ist. Durch Division erhält man

$$\frac{r}{R}\frac{t_1^2}{t^2} = \frac{m}{M}\cdot\frac{R^2}{r^2},$$

folglich ist

$$M = m\frac{R^3}{r^3}\frac{t^2}{t_1^2}.$$

Setzt man die Umlaufszeit des Mondes gleich 39 343 Minuten, die der Erde (das Jahr) gleich 525 950 Minuten, setzt man ferner die mechanisch oder trigonometrisch zu berechnenden Entfernungen R und r gleich 20 000 000 bezw. 50 000 Meilen, also $\frac{R}{r} = \frac{400}{1}$, so folgt

$$M = 400^3\cdot\frac{39\,343^2}{525\,950^2}m = \sim 358\,120\text{ m}.$$

Unter den gemachten Annahmen ist also die Sonnenmasse das 358 000fache der Erdmasse. Genauere Berechnungen ergeben das 355 000fache.

Kennt man also bei einem Planeten seine Umlaufszeit um die Sonne und die Umlaufszeit eines seiner Trabanten, kennt man ferner die Entfernung des Trabanten vom Planeten und die (z. B. aus der Umlaufszeit und dem Vergleiche mit dem Erdjahr zu berechnende) Entfernung des Planeten von der Sonne, so kann man das Massenverhältnis zwischen der Sonne und dem Planeten berechnen.

So hat man z. B. die Jupitermasse gleich 340 Erdmassen, die Saturnmasse gleich 102 Erdmassen, die des Uranus gleich 14,5 Erdmassen gefunden.

Dividiert man jede der gefundenen Massen durch den Inhalt $\frac{4}{3} r^3 \pi$ des betreffenden Weltkörpers (dessen Durchmesser sich aus dem scheinbaren Durchmesser und der Entfernung berechnen läfst), so findet man die Dichtigkeit des Weltkörpers im Verhältnis zu der der Erde.

Die Sonne hat 1 409 725 Erdvolumina, der Jupiter 1491, der Saturn 772, der Uranus 86,5.

Setzt man die Dichte der Erde gleich 1, so ergiebt sich für die Sonne die Dichtigkeit 0,252, für den Jupiter 0,227, für den Saturn 0,131, für den Uranus 0,167. Aus der geringen Dichte der Sonne wird man auf hohen Hitzegrad schliefsen dürfen, der dem starken Massendruck im Innern dieses Weltkörpers entgegen zu wirken hat, möge dieser nun flüssig oder gasförmig sein.

7) Fallbeschleunigung auf den Weltkörpern.

Die Masseneinheit wird auf der Sonne die Beschleunigung

$$g_1 = \frac{m_1 k}{r_1^2}$$

erhalten, auf der Erde ist

$$g = \frac{mk}{r^2},$$

folglich ist

$$\frac{g_1}{g} = \frac{m_1}{m} \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{355\,000}{1} \cdot \frac{1^2}{112^2},$$

denn der Durchmesser der Sonne, also auch der Halbmesser, ist etwa 112 mal so grofs, als der der Erde. Demnach findet man als Fallbeschleunigung auf der Sonnenoberfläche

$$g_1 = \frac{9{,}82 \cdot 355\,000}{112^2} = \sim 272\,\text{m},$$

also etwa das 28,3 fache von der Fallbeschleunigung auf der Erde.

Ebenso hat man die Fallbeschleunigung auf den Planeten des Sonnensystems bestimmt.

8) Dichtigkeit der Erde und anderer Weltkörper. Weiter kommt man von hier aus nur, wenn man die Dichtigkeit der Erde kennt. In den Lehrbüchern der Physik wird beschrieben, wie Mackelyne und Hutton im Jahre 1772 auf beiden Seiten des Berges Schuhallien in Schottland die von der Bergmasse auf das Bleilot ausgeübte Ablenkung maſsen und 4,71 als die Dichte der Erde im Vergleich zum Wasser fanden. Cavendish hat auf Anregung Michells die Torsion, die eine an der Torsionswage hängende und von groſser seitlich befindlicher Bleimasse angezogene Bleikugel anzeigte, mit Hilfe des Gesetzes der Torsionselastizität benutzt, den Vergleich mit der Erdanziehung zu machen. Entsprechende Versuche wurden im Jahre 1837 von Reich angestellt. Das Mittel ergab sich als 5,44. Baily hat im Jahre 1843 aus langen Versuchsreihen 5,66 abgeleitet. Reich wiederholte die Versuche und gab im Jahre 1852 den Wert 5,58 an. Weitere Versuche aus neuerer Zeit lassen **5,56** bis **5,6** als den wahrscheinlichen Wert der mittleren Dichte der Erde erscheinen.

Oben waren die Dichtigkeiten einiger Weltkörper im Vergleich zu der der Erde angegeben. Jetzt kann man sie auf Wasser beziehen und findet z. B. als Dichte der Sonne 1,38, des Jupiter 1,25, des Saturn 0,72, des Uranus 0,92 u. s. w.

9) **Aufgabe.** Wie groſs ist die Gravitationskonstante?

Auflösung. An der Erdoberfläche gilt für jede Anziehung die Gleichung

$$p = mg,$$

gleichzeitig soll sein

$$p = k\frac{m \cdot m_1}{r^2},$$

wo m_1 die Erdmasse, r der Erdradius, z. B. in Metern, ist. Aus beiden Gleichungen folgt:

$$k\frac{m_1}{r^2} = g,$$

also

$$k = \frac{g \cdot r^2}{m_1} = \frac{g \cdot r^2}{\frac{4}{3} r^3 \pi p'} = \frac{3g}{4r\pi p'}.$$

Hier ist $g = 9{,}8224$, $4r\pi$ als doppelter Erdumfang gleich 80 000 000 zu setzen; das spezifische Gewicht p' der Erde soll als 5,56 angenommen werden. Dann wird

$$k = \frac{3 \cdot 9{,}8224}{80\,000\,000 \cdot 5{,}56} = 6{,}625 \cdot 10^{-8}.$$

10) Bemerkungen über die Bedeutung des Newtonschen Gesetzes. Wir werden noch mehrfach auf kosmische Verhältnisse

zu reden kommen, obwohl diese Dinge mit den beabsichtigten technischen Lehren nichts zu thun haben. Sie klären aber über andere physikalische Verhältnisse auf, die sich experimentell kaum mit entsprechender Genauigkeit nachweisen lassen.

Das Newtonsche Gesetz gilt nämlich nach Coulomb auch von den gegenseitigen Anziehungen kleiner magnetischer Massen, ebenso von den gegenseitigen Abstofsungen bei entgegengesetztem Magnetismus. Das Gleiche gilt von elektrischen Teilchen. Das Gesetz lehrt uns ferner die Entstehung des galvanischen Stromes kennen. Die gegenseitigen Einwirkungen bewegter Stromteilchen aufeinander, die sich in verschiedenen Drähten bewegen, erfolgen allerdings nach einem anderen Gesetze. Dieses aber schliefst das Newtonsche als besonderen Fall in sich. Auf andere Anwendungen kann jetzt noch nicht eingegangen werden.

Die Aufstellung des Gravitationsgesetzes durch Newton, welches den gesamten Weltraum beherrscht, war eine Grofsthat, der wir den Ausbau der Astronomie und der mathematischen Physik verdanken, wie er besonders in den letzten 100 Jahren im Sturmschritt vor sich gegangen ist.

Erst seit Newtons Entdeckung konnte man die Kepplerschen Gesetze begründen und die Dynamik des Sonnensystems in derartiger Schärfe ausbauen, dafs man z. B. aus den Abweichungen der Uranus-Bewegung auf die Existenz eines noch nicht bekannten Planeten schliefsen durfte, der auf Grund der Berechnungen Leverviers von Galle aufgesucht und gefunden wurde. Auch die Erklärung der Ebbe und Flut, die man von Aristoteles bis auf Newton vergeblich gesucht hatte, wurde durch den letzteren gegeben. Auf Jahrhunderte hinaus war man jetzt imstande, Tag und Stunde hervorragend starker Fluten für jeden Küstenort vorher zu berechnen. Die Resultate dieser Zeitberechnungen sind in neuerer Zeit als kritische Tage erster Ordnung vielfach für meteorologische Zwecke mifsbraucht worden.