Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

1) Die von der Erde auf den Mond ausgeübte Anziehung

Kapitel I.

Das Newtonsche Anziehungsgesetz.

1) Die von der Erde auf den Mond ausgeübte Anziehung.

Die Lehre vom Potential hat ihren Ausgangspunkt nicht in der Technik, sondern in der kosmischen Physik gefunden. Newton war es, der vor mehr als 200 Jahren die Vermutung aussprach, die Centripetalkraft, die z. B. den Mond an die Erde fesselt, sei im Grunde dieselbe Kraft, die jeden aufgehobenen Stein zur Erde niederzieht und die wir als Schwerkraft bezeichnen; nur sei die Wirkung in grofser Entfernung weit schwächer als an der Erdoberfläche. Er berechnete die jener Centripetalkraft entsprechende Beschleunigung g_1 und fand, dafs sie etwa der 3600. Teil der Fallbeschleunigung $g = 9{,}81$ m an der Erdoberfläche sei. Da aber der Mond nach trigonometrischen Messungen, die gleichzeitig von zwei Stellen der Erdoberfläche aus vorgenommen werden können, etwa 60 mal soweit vom Erdmittelpunkt entfernt ist wie ein auf der Erdoberfläche befindlicher Stein, so vermutete Newton, jene anziehende Kraft sei umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung.

In der wirklichen Berechnung ergiebt sich dies folgendermafsen. Man betrachte die Bewegung des Mondes um die Erde als eine Kreisbewegung; dann ist die Centripetalkraft $p = mg_1 = \frac{4\, m r_1 \pi^2}{t^2}$, wo r_1 der Radius der Bahn, t die Umlaufszeit, m die Masse des Mondes ist. Daraus folgt als Centripetalbeschleunigung $g_1 = \frac{4\, r_1 \pi^2}{t^2}$. Setzt man $60\, r$ für r_1 ein, wo r den Erdradius bedeutet, und setzt man die Umlaufszeit des Mondes gleich 27 Tg. 7 St. 43 Min. oder 2 360 580 Sek., so wird $g_1 = \frac{4 \cdot 60\, r \cdot \pi^2}{2\,360\,580^2} = \frac{2\, r\pi \cdot 120\, \pi}{2\,360\,580^2}$. Setzt man ferner den Erdumfang $2\, r\pi$ abgerundet gleich 40 000000 m, was der ursprünglichen Definition des Meters entspricht, so ergiebt sich als Centripetalbeschleunigung $g_1 = 0{,}00276$ m, also etwas mehr als $\frac{1}{4}$ cm. Jetzt folgt:

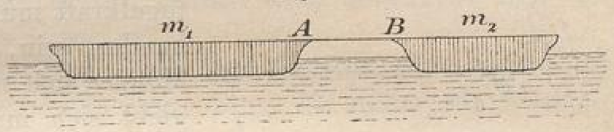
$$\frac{g}{g_1} = \frac{9{,}81}{0{,}00276} = \text{rd. } 3555.$$

Dafs nicht genau 3600 erhalten wird, hat seinen Grund in der Annahme der abgerundeten Zahlen 60 und 40000000. Auch müfste 9,81 um den Betrag vergröfsert werden, um den g infolge der Erddrehung vermindert worden ist. Der Näherungswert reicht aber für unsere Zwecke aus. (Will man genauer rechnen, so addiere man zu dem Äquatorialwerte $g = 9{,}780$ den durch die Centrifugalkraft verloren gegangenen Anteil 0,033, was 9,813 giebt und nehme z. B. das arithmetische Mittel zwischen diesem Werte und dem Polarwerte 9,831, was auf 9,822 führt.) Nimmt man umgekehrt das Newtonsche Gesetz als richtig an, so ergiebt sich die Mondentfernung aus $\frac{g}{g_1} = \frac{(x\varrho)^2}{\varrho^2}$ oder $\frac{g}{x^2} = \frac{4\pi^2 x\varrho}{t^2}$ als $x = \sqrt[3]{\frac{gt^2}{4\pi^2\varrho}} = 60{,}144$ Erdradien, denn hier bedeutet $1 : x$ das Verhältnis der Entfernungen.

2) Das Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung.

Newton stellte ferner das Gesetz von der Gleichheit der Wirkung und der Gegenwirkung auf, das uns als etwas Selbstverständliches erscheint, damals aber bei manchen Gelehrten auf Widerspruch stiefs.

Fig. 1.



Er behauptete also: Die Erde wird vom Monde mit derselben Kraft angezogen wie der Mond von der Erde.

Zur Erläuterung dieser Annahme diene folgendes Beispiel: Zwei Schiffe von den Massen m_1 und m_2, Fig. 1, seien durch ein Tau AB miteinander verbunden, dieses Tau aber werde auf irgend eine Weise angespannt, sei es, dafs bei A oder bei B oder gleichzeitig bei A und B gezogen wird, was ganz gleichgültig ist. Ist nun p die spannende Kraft, so setzen sich beide Schiffe in Bewegung, das eine gemäfs der Formel $p = m_1 g_1$, das andere gemäfs der Gleichung $p = m_2 g_2$, sobald nur vom Widerstande des Wassers und der Luft abgesehen wird. Daraus aber folgt: $m_1 g_1 = m_2 g_2$ und $m_1 : m_2 = g_2 : g_1$, d. h. die Beschleunigungen verhalten sich umgekehrt wie die Massen der Schiffe.

Man kann nun die spannende Kraft durch irgend eine andere ersetzen; man denke sich z. B. bei A den Nordpol eines starkwirkenden Magnetstabes, bei B den Südpol eines anderen Magneten. Auch dabei