Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

3) Mond und Erde umkreisen den gemeinsamen Schwerpunkt

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

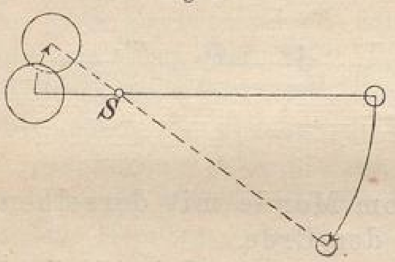
ist die Anziehung eine gegenseitige, d. h. es wird wiederum für jede Stellung $m_1 g_1 = m_2 g_2$ oder $p_1 = p_2$. Eine ähnliche gegenseitige Anziehung nimmt Newton, ohne ihr Wesen weiter zu erklären*), auch bei dem Monde und der Erde an. Würden also beide zunächst stillgestellt, so würden sie sich einander entgegen bewegen, und zwar würde der Mond mit der oben berechneten Beschleunigung von etwa $\frac{1}{4}$ cm beginnen, die Erde aber, deren Masse nach unten anzugebender Berechnung etwa 81 mal so grofs ist wie die des Mondes, mit dem 81. Teile dieser Beschleunigung. Schliefslich würden sie sich in dem Punkte treffen, der den ursprünglichen Abstand im Verhältnis 1 : 81 teilt, d. h. (wenn man beide Körper als Punkte betrachtet, so dafs die Mittelpunkte einander unendlich nahe rücken können) in dem gemeinschaftlichen Schwerpunkte, der während der ganzen Bewegung seine Lage nicht ändern würde.

Hierin lag der erste Keim zu dem später entwickelten Schwerpunktsprinzip der Mechanik.

3) Mond und Erde umkreisen den gemeinschaftlichen Schwerpunkt.

Nach dem Gesagten wird der Mond durch die Centripetalkraft an die Erde gefesselt, jedoch durch eine ebenso grofse Centrifugalkraft gehindert, sich ihr zu nähern. Eine ebenso starke Centripetal- und Centrifugalkraft mufs auch bei der Erde vorhanden sein, wenn ihr Abstand vom Monde sich nicht ändern soll. So ergiebt sich mit Notwendigkeit die Annahme, dafs beide Körper um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt kreisen, Fig. 2. Dabei wirken, wenn r_1 und r_2 die Abstände von diesem sind, die entgegengesetzt gerichteten Centrifugalkräfte $m_1 r_1 \vartheta^2$ und $m_2 r_2 \vartheta^2$, wo ϑ die gemeinschaftliche Winkelgeschwindigkeit ist. Beide sind gleich, denn es ist $m_1 = 81\, m_2$, $r_1 = \frac{1}{81} r_2$, also $m_1 r_1 = 81\, m_2 \cdot \frac{1}{81} r_2 = m_2 r_2$. Ebenso grofs wie die Centrifugalkräfte sind die wirkenden Centripetalkräfte.

Fig. 2.



In dieser neuen Auffassung lag der Keim zu der von Newton angebahnten Himmelsmechanik, die durch Laplace und Gaufs erfolgreich ausgebaut wurde, obwohl z. B. das Problem der drei Körper

*) Die neuere Physik ersetzt die Fernwirkungen durch vermittelnde Aktionen der Ätherteilchen aufeinander, die wie elektrische und optische Ätherschwingungen mit grofser Geschwindigkeit den Weltraum durcheilen.

noch heute die Kräfte der Analysis übersteigt und mit Hilfe der Störungstheorie nur Näherungslösungen gefunden hat. Dafs in Wahrheit beide Körper sich (von den Störungen abgesehen) nicht in Kreisen, sondern in ähnlichen Ellipsen um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt bewegen, der dabei in je einem der Brennpunkte der Ellipsen liegt, sei beiläufig bemerkt. Die Bahnen könnten ebenso gut Parabeln oder Hyperbeln sein, also Kegelschnitte überhaupt. Darin hat man das Gesetz für die Bewegung der Doppelsterne.

4) Formulierung des Newtonschen Gesetzes.

Aus der Erfahrung wufste man von jeher, dafs ein Stein von doppelter Masse das doppelte Gewicht eines solchen von einfacher Masse hat, und so drängte sich Newton die Annahme auf, dafs die gegenseitigen Anziehungen den Massen der Körper proportional sein müfsten. Oben war aber schon gezeigt, dafs sie umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung seien, demnach konnte die Anziehung oder Gravitation nur in der Form $\frac{m_1 m_2}{r^2}$ oder in der Form $k\frac{m_1 m_2}{r^2}$ dargestellt werden, wo k irgend eine konstante Gröfse ist.

Das Newtonsche Anziehungsgesetz sagt demnach folgendes aus:

Je zwei Weltkörper ziehen sich gegenseitig an mit einer Kraft $p = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$, die also proportional dem Produkte ihrer Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes ihrer Mittelpunkte ist.

Die Annahme, dafs bei Kugeln die Mittelpunkte mafsgebend seien, war zunächst nur eine instinktive Vermutung, die später von Newton durch eine interessante Berechnung als richtig nachgewiesen wurde. Unten wird sie in vereinfachter Form ausgeführt werden.

Die Bedeutung der Konstante k ergiebt sich aus folgendem: Ist sowohl m_1 als auch m_2 gleich der Masseneinheit und r gleich der Längeneinheit, so ist die Anziehung $p = k\frac{1 \cdot 1}{1^2} = k$. Demnach ist k diejenige Anziehung, die zwei irgendwie gewählte Masseneinheiten in einem Abstande, der gleich der irgendwie gewählten Längeneinheit ist, aufeinander ausüben. Selbstverständlich kann man die Wahl der Masseneinheit so treffen, dafs $k = 1$ wird; auch kann man k zunächst willkürlich gleich 1 setzen. Davon soll bisweilen Gebrauch gemacht werden, weil es sich dann um die einfachere Form $p = \frac{m_1 m_2}{r^2}$ handelt. Die Gröfse von k soll unten bestimmt werden. Zu ihrer Kenntnis ist die der mittleren Dichte des Erdkörpers nötig.

Ist nämlich m_1 die Masse des Erdkörpers, m_2 die eines Steines,